

Счастливые билеты.

Определение. Билет с номером от 000000 до 999999 называется *счастливым*, если сумма его первых трех цифр равна сумме последних трех цифр.

1. Не считая КСБ, докажите, что:

(а) КСБ не более 100000;

(б) сумма номеров всех счастливых билетов делится на несчастливое число 13, а также на счастливое число 7.

Обозначение. a_k – количество трехзначных номеров с суммой цифр k .

2. Докажите, что:

(а) КСБ с суммой цифр $2k$ равно a_k^2 ;

(б) $a_k = a_{27-k}$;

(с) КСБ равно $2(a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{13}^2)$.

3. Найдите a_0, \dots, a_9 .

Определение. Рассмотрим все тройки неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих уравнению $x + y + z = k$. Назовем *нарушением* ситуацию, когда x , y или z больше 9. Назовем тройку *хорошей*, если в ней нет нарушений и *плохой* в противном случае.

4. (а) Найдите количество плохих троек для $k = 10$ и $k = 11$.

(б) Найдите a_{10}, \dots, a_{19} .

5. Посчитайте вероятность получить в автобусе счастливый билет.

6. Докажите, что КСБ равно количеству 6-значных номеров с суммой цифр 27.

Определение. Аналогично определяем *нарушение* для решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 27$.

7. (а) Докажите, что КСБ $< C_{32}^5$;

(б) Чему равно количество плохих шестерок с нарушением на фиксированном месте?

(с) Чему равно количество плохих шестерок с нарушением на двух фиксированных местах?

8. Еще раз посчитайте вероятность получить в автобусе счастливый билет.