

Формула Пика.

Теорема (формула Пика). Вершины многоугольника расположены в узлах клетчатой решетки с клетками размера 1×1 . Внутри него лежит n узлов, а на границе m узлов. Тогда площадь этого многоугольника равна $n + \frac{m}{2} - 1$.

1. Докажите формулу Пика для

(a) прямоугольника со сторонами, идущими по линиям сетки;

(b) прямоугольного треугольника с катетами, идущими по линиям сетки.

(c) Пусть многоугольник M разрезан ломаной с вершинами в узлах решетки на два многоугольника M_1 и M_2 . Докажите, что если формула Пика верна для M_1 и M_2 , то она верна и для M . Докажите, что если формула Пика верна для M и M_1 , то она верна и для M_2 ;

(d) Докажите формулу Пика для произвольного треугольника.

(e) (**Лемма о диагонали.**) Докажите, что во всяком многоугольнике есть диагональ, которая лежит внутри него.

(f) Завершите доказательство формулы Пика.

2. Можно ли квадрат 50×50 разбить на 15 равных многоугольников с вершинами в узлах сетки?

3. Петя нарисовал треугольник с вершинами в узлах целочисленной решетки. Все его стороны оказались длиннее 5. Какова его наименьшая возможная площадь?

Для самостоятельного решения

4. Три кузнечика в начальный момент времени сидят в трех вершинах одной клетки бесконечной клетчатой решетки, а затем начинают «играть в чехарду»: каждый может прыгнуть через одного из двух других, после чего оказывается в симметричной относительно него точке. Может ли случиться так, что через несколько прыжков строго внутри треугольника, образованного кузнечиками, будет лежать целочисленная точка?

5. Докажите, что найдется прямая, проходящая через два узла клетчатой бумаги, и не лежащий на этой прямой узел, такой, что расстояние между ними меньше 0.0000000001.