$\mathsf{P} \geqslant \mathsf{B} - 1$.

1. Из спичек сложена шахматная доска, каждая сторона клетки — спичка. Жука посадили в некоторую клетку. Через спичку он не ползает. Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы жук мог проползти от любой клетки до любой другой?

2. В связном графе 7 вершин, и его рёбра покрашены в 3 цвета. Оказалось, что если удалить рёбра любого цвета, то граф останется связным. Какое минимальное количество рёбер всех трёх цветов может быть в графе?

3. В отряде химиков (от слова «химия») 50 детей попарно различного веса. Опытный медик умеет точно определять вес ребёнка на глазок, и поэтому может определить самого мясистого ребёнка. Однако комиссия СЭС не верит ему на слово, и он должен обосновать свою точку зрения, пользуясь стационарными двухчашечными весами и взвешивая одновременно только одну пару детей. За какое наименьшее число взвешиваний ему удастся убедить комиссию СЭС?

4. Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам. Пара различных цветов называется *хорошей*, если существует две соседние клетки, закрашенные этими цветами. Каково минимально возможное число хороших пар?

5. Сначала была бесконечная клетчатая доска, и была она белой. Потом все клетки, кроме клеток квадрата 7×7, покрасили в красный цвет. Далее за одну операцию можно покрасить в красный цвет любую белую клетку, которая имеет ровно одного соседа по стороне красного цвета. Какое наибольшее количество операций можно совершить?

Для самостоятельного решения

6. Даны 10 чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10} \in \mathbb{R}$. Известно, что среди попарных сумм $a_i + a_j$ $(i < j)$ как минимум 37 целых. Докажите, что $2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_{10} \in \mathbb{Z}$.

7. На шахматной доске, первоначально пустой, расставляются фишки по следующим правилам. За ход выбираются любые четыре пустые клетки, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам доски, после чего на одну из этих клеток ставится фишка. Какое наибольшее число фишек можно расставить на доске по этим правилам?