

Теорема Менелая.

1. (Теорема Менелая.) На прямых AB , BC и CA выбраны точки A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что точки A_1 , B_1 и C_1 при должном расположении лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

2. Взят треугольник ABC . Точка D симметрична точке A относительно B . На луче BC за точкой C отложен отрезок CE , в два раза больший BC . Прямая AC пересекает прямую DE в точке F . Найдите (a) $\frac{AC}{CF}$; (b) $\frac{DF}{FE}$.

3. Докажите, что биссектрисы двух внутренних углов треугольника и биссектриса внешнего угла, не смежного с ними, пересекают прямые, содержащие противоположные стороны треугольника в трёх коллинеарных точках.

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и BC . Отрезки CE и DF пересекаются в точке O . Докажите, что если прямые AO и BO делят сторону CD на три равные части, то $ABCD$ — параллелограмм.

5. В трапеции $ABCD$ на продолжении диагонали AC за точку C взята точка P . X , Y — середины оснований AB и CD . PX и PY пересекают стороны BC и AD в точках M и N . Докажите, что $MN \parallel AB$.