

Дискретная непрерывность.

Если некоторая целочисленная величина время от времени меняется (увеличивается или уменьшается) не более, чем на 1, то она принимает все значения между начальным и конечным. Эта величина называется *дискретной*, а предыдущее утверждение – принципом *дискретной непрерывности*.

1. Леонид Михайлович начал писать Алексею Анатольевичу сообщения по поводу занятий в ЛМШ. Наконец, после 100-го сообщения Алексей Анатольевич сподобился ответить Леониду Михайловичу, и между ними завязалась оживленная переписка. В какой-то день после этого Леонид Михайлович был настолько занят, что Алексею Анатольевичу пришлось отправить 50 писем, прежде чем достучаться до него. Докажите, что найдется отрезок времени, в течение которого они отправили друг другу ровно по 30 писем.

2. Вася выписывает натуральные числа, первое из которых равно 1. Каждое следующее число или на 1 больше предыдущего, или является собственным делителем предыдущего. Последнее равно 1000. Докажите, что в строке найдется число 123.

3. В ряд сидят 15 мальчиков и 15 девочек.

(a) Докажите, что можно выбрать 10 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.

(b) Всегда ли из них можно выбрать 20 школьников подряд, среди которых мальчиков и девочек поровну?

4. По кругу сидят 15 мальчиков и 15 девочек.

(a) Докажите, что можно выбрать 20 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.

(b) Докажите, что для каждого $2n = 2, 4, \dots, 30$ можно выбрать $2n$ школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.

5. (a) На плоскости есть $2n$ точек. Докажите, что можно провести прямую так, что с каждой стороны от нее будет находиться n точек.

(b) На плоскости есть $2n + 1$ точка, никакие три не лежат на одной прямой. Докажите, что через любую из них можно провести прямую так, что с каждой стороны от нее будет находиться n точек.

Для самостоятельного решения

6. В последовательности натуральных чисел каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в этой последовательности встретится четное число.