Есть в математике нечто, вызывающее человеческий восторг
Феликс Хаусдорф, немецкий математик

Материалы М7 были подготовлены преподавателями с различным опытом и пониманием преподавания, но с одной целью – показать красоту математики и математических рассуждений. Семиклассники были вполне способны пройти путь настоящего математика, когда в процессе решения приходлось полностью менять идейный подход к задаче или существенно дополнять старый. Так же, как и в настоящей математике, нетривиальные результаты строились из самых базовых свойств математических объектов. Тем самым мы хотели, чтобы школьники всегда понимали, что они уже доказали, а что – ещё нет.

Темы были выбраны так, чтобы одни и те же задачи и понятия были рассмотрены с разных сторон. Почти все утверждения в комбинаторике, да и не только, доказывались двумя, а то и тремя способами. Чисто математические темы пронизывались различными методами – например, методом математической индукции и инварианта. Они показывали, что отдельные занятия связаны большим, чем кажется поначалу.

У семиклассников был совсем небольшой опыт работы с геометрией до смены. Тем не менее, с небольшим арсеналом идей, представленых в этой книге, у них появилась возможность решать очень сложные на первый взгляд задачи. В очередной раз мы убедились в том, что сила математика – не в конкретных знаниях, а в умении выбирать и применять идеи.

Последнее из занятий – это листочек с ложными доказательствами. В течение смены мы искали ошибки в рассуждениях семиклассников, поэтому существование листка более чем оправдано – и они должны учиться искать ошибки у нас. Умение понимать и критически анализировать чужие рассуждения – тоже черта образованного математика.

Мы благодарны преподавателям М7-Профи за некоторое количество красивых задач и техническую помощь при создании этой книги. Больше всего мы хотим сказать спасибо детям первой, второй и третьей групп, которые безоговорочно принимали наши листочки и наслаждались решением задач без каких-либо корыстных целей. Нам всем было с вами приятно работать, удачи на зачёте!

//Авторы

Вступительная олимпиада. 4 июля

1. В избушке живут три медведя: Михаил Иванович, Настасья Петровна и их сын Мишутка. Михаил Иванович налил в тарелку 5 поварешек супа, а Настасья Петровна — 2 поварешки. Михаил Иванович съедает свою порцию за 6 минут, а Настасья Петровна — за 4 минуты. Если Мишутка будет есть суп вместе с папой, то папина порция будет съедена за 5 минут. За какое время будет съедена мамина порция, если Мишутка будет есть вместе с мамой?

2. Таня стоит на берегу речки. У неё есть два пустых кувшина: один — на 5 литров, а про второй Таня помнит лишь то, что он вмещает то ли 3, то ли 4 литра. Помогите Тане определить ёмкость второго кувшина. (Заглядывая в кувшин, нельзя понять, сколько в нём воды.)

3. Толя и Гриша живут в Дубае в высотном доме с одним подъездом, в котором на каждом этаже 10 квартир. Номер этажа Толи равен номеру квартиры Гриши. Вася утверждает, что сумма номеров их квартир равна 1001. Докажите, что Вася ошибается.

4. Можно ли покрасить клетки таблицы 8×8 в 16 цветов (каждая клетка красится в один цвет) так, чтобы для любых различных двух цветов нашлись клетки, которые покрашены этими цветами и имеют общую сторону?

5. Лена бегает быстрее Лизы, но медленнее Жени. Все трое стартовали из одной точки одновременно в одном направлении, и пробежав каждая несколько кругов по стадиону, финишировали в том же самом месте. Оказалось, что Женя обогнала Лизу 10 раз. Сколько всего раз девочки обгоняли друг друга? (Скорости всех постоянны.)

6. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD отмечена точка E – середина BC. Оказалось, что $\angle BAE + \angle EDC = 90^\circ$, $AB = 7$, $CD = 10$. Найдите AD.

7. В отряде 101 боец. Каждый вечер трое из них выходят в дозор. При этом любая пара солдат не может ходить в дозор вместе более трех раз. Какое максимальное количество вечеров отряд может отправлять в дозор бойцов?

Зацикливание. 4 июля

1. На доске написано число 76. Каждую минуту число стирают с доски и на его место записывают произведение его цифр, увеличенное на 12. Какое число окажется на доске через час (то есть чему равно 61-е число)?

2. Один преподаватель оставил на дверях всех комнат записки следующего содержания: «Я в комнате номер …» и исчез в неизвестном направлении (записки на разных дверях могут сообщать разную информацию). Настойчивый школьник начал поиски преподавателя, руководствуясь этими указаниями. Докажите, что с некоторого момента он начнет двигаться по циклу.

3. Каждое следующее число в последовательности целых чисел получается из предыдущего так: число возводится в квадрат, и из него вычеркиваются все цифры, кроме последних четырех. Докажите, что последовательность периодическая, и длина периода не больше 10000.

4. Найдите сотую цифру после запятой числа 4/135.

Простой принцип зацикливания. *Если система может находиться в конечном числе состояний, и каждое следующее состояние однозначно определяется по предыдущему, то система с некоторого момента зациклится.*

5. Последовательность натуральных чисел строится так: первые два члена произвольны, а каждое следующее число равно последней цифре суммы квадратов предыдущих членов. Докажите, что эта последовательность всегда зацикливается.

6. Жители страны Пуп Мира очень гордятся тем, что у них президентская форма правления: каждые 4 года президентом избирается либо республиканец, либо демократ. ПупМировские политологи обнаружили строгий закон, по которому определяется партийность очередного президента. Хотя этот закон засекречен «Актом о демократии», в печать просочились сведения, что партийность очередного президента полностью определяется партийностью предыдущих десяти. Докажите, что последовательность партийностей президентов зациклится, и оцените как-нибудь длину периода.

Составной принцип зацикливания. *Если система может находиться в конечном числе состояний, и каждое следующее состояние однозначно определяется по фиксированному числу предыдущих, то система с некоторого момента зациклится.*

7. Вот уже миллиард лет погода в Вишкиле в данный день полностью определяется предыдущей декадой. Как известно, существует восемь типов погоды. Во все дни последней недели погода была разная. Докажите, что еще когда-нибудь встретится неделя с точно такой же погодой.

Для самостоятельного решения

8. Докажите, что в задаче 3 длина периода не больше **(a)** 5000; **(b)** 2500.

9. Вася написал программу для своего компьютера, которая должна печатать на принтере цифры десятичной записи числа $0,100100010000\ldots$. Докажите, что у Васи ничего не получилось: его программа рано или поздно напечатает неправильную цифру.

Графы-1. 5 июля

1. В ЛМШ приехало 62 семиклассника, некоторые из которых знакомы. Алексей Сергеевич построил всех в шеренгу, в которой крайними оказались

Дима и Степа. Егор Вадимович перестроил шеренгу так, что теперь крайними стоят Толя и Толя. Оказалось, что оба раза семиклассники, стоявшие рядом, знали друг друга. Докажите, что можно посадить несколько семиклассников за круглый стол так, что любые два соседа будут знакомы.

Определение. Будем говорить, что задан *граф*, если задано множество его вершин и про любую пару различных вершин сказано, связаны они ребром или нет. На рисунке вершины изображаются точками, а ребра - отрезками или кривыми. Количество ребер, выходящих из данной вершины, будем называть *степенью* данной вершины.

Определение. Замкнутый путь в графе, не проходящий ни по одному ребру два раза, называется *циклом*.

Переформулируйте условие предыдущей задачи на языке графов.

2. Каждый семиклассник ежедневно даёт пять ровно двум другим семиклассникам. Докажите, что их всех можно рассадить за несколько круглых столов так, что любые два соседа вчера давали друг другу пять.

Определение. Граф называется *связным*, если между любыми двумя вершинами существует путь.

В какой из предыдущих задач построенный граф является заведомо связным, а в какой не обязательно?

3. Из одной вершины графа существует путь в любую другую вершину графа. Докажите, что граф связен.

4. В стране несколько городов, некоторые пары соединены дорогами. Известно, что можно построить ещё три дороги так, что из любого города можно будет проехать в любой другой. Докажите, что можно разделить страну не более чем на четыре связных республики так, что любая дорога соединяла города из одной республики.

Определение. Граф, не являющийся связным, можно представить в виде объединения непересекающихся связных подграфов. Такие подграфы называются *компонентами связности*.

Изобразите граф соседства по комнате детей нашей параллели. Сколько в нем компонент связности?

5. Из вершины A связного графа G без циклов Савва отправился в самую удалённую от нее вершину B. C — самая удалённая вершина от B. Докажите, что B — самая удаленная вершина от C.

Для самостоятельного решения

6. В доску вбито четыре гвоздя, любые два соединены ниткой. Двое по очереди пережигают нити до тех пор, пока **(a)** один из гвоздей не окажется отрезан от остальных; **(b)** несколько гвоздей не окажутся отрезанными от остальных.

В этом случае тот, после чьего хода это произошло, объявляется проигравшим. Кто может гарантировать себе победу?

7. В нашем отряде 15 девочек и 47 мальчиков. Каждая девочка дружит не более чем с тремя мальчиками (например, Лера дружит с Семёном). Может ли оказаться, что у каждого мальчика в нашем отряде поровну подруг?

8. В стране несколько городов, из каждого выходит **(a)** 99; **(b)** 100 дорог в другие города. Из любого города можно проехать в любой другой. Может ли так оказаться, что закрытие одной дороги на ремонт лишит жителей возможности проехать в любой другой город?

Сравнения по модулю. 5 июля

Определение 1. Говорят, что целое число n *делится* на целое число m ($m \neq 0$), если n можно представить в виде $n = m \cdot k$, где k также целое число.

Определение 2. *Разделить* целое число n на целое число m ($m \neq 0$) *с остатком* означает представить n в виде $n = m \cdot k + r$, где $0 \leqslant r < |m|$. При этом неотрицательное число r называется *остатком от деления*, а целое число k — *неполным частным.*

Например, $13 = 5 \cdot 2 + 3$ и $-13 = 5 \cdot (-3) + 2$ — правильные представления для деления с остатком 13 на 5 и -13 на 5 соответственно, а $13 = 5 \cdot 3 - 2$ и $-13 = 5 \cdot (-100) + 487$ — неправильные.

Определение 3. Два целых числа a и b называются *сравнимыми по модулю* m, если при делении на m они дают одинаковые остатки.

Определение 4. Два целых числа a и b называются *сравнимыми по модулю* m, если их разность делится на m.

Определения 3 и 4 равносильны.

Замечание. Запись $a \underset{m}{\equiv} b$ обозначает, что числа a и b сравнимы по модулю m.

Свойства сравнений:

(c) Если $a \underset{m}{\equiv} b$ и $b \underset{m}{\equiv} c$, то $a \underset{m}{\equiv} c$;

(d) Если $a \underset{m}{\equiv} b$ и $c \underset{m}{\equiv} d$, то $a \pm c \underset{m}{\equiv} b \pm d$;

(e) Если $a \underset{m}{\equiv} b$ и $c \underset{m}{\equiv} d$, то $a \cdot c \underset{m}{\equiv} b \cdot d$;

(f) Если $a \underset{m}{\equiv} b$, то $a^k \underset{m}{\equiv} b^k$.

1. Докажите свойства сравнений.

2. Найдите остаток от деления:

(a) $7778 \cdot 7779 \cdot 7780 \cdot 7781 \cdot 7782 \cdot 7783$ на 7;

(b) $1001 \cdot 1002 \cdot 1003$ на 1004.

3. Найдите остаток от деления:

(a) 9^{2014} на 8;

(b) 12^{2015} на 13;

(c) 23^{2016} на 7;

(d) $2^{75}+2^{76}+2^{77}+2^{78}$ на 5.

4. Пусть $5x+8y \underset{13}{\equiv} 1$

(a) Показать, что $5x+60y \underset{13}{\equiv} 1$;

(b) Найти остаток от деления $18x-31y$ на 13;

(c) Найти остаток от деления $2x-2y$ на 13.

5. Сумма двух цифр a и b делится на 7. Докажите, что число $\overline{aba}$ также делится на 7.

Для самостоятельного решения

6. Докажите, что при любом $n \in \mathbb{N}$ число $16^{n+2}+23^{n+1}+37^{n}$ делится на 7.

7. Пусть A — произведение всех нечётных чисел от 1 до 2009, B — произведение всех чётных чисел от 2 до 2010. Докажите, что $A+B$ делится на 2011.

8. Пусть $a \neq b$ и $a^n \underset{a-b}{\equiv} 0$, доказать, что $b^n \underset{a-b}{\equiv} 0$.

9. На очень длинной доске записали число **(a)** 8^{2014} **(b)** 2^{2014} в десятичной записи. Потом вместо этого числа записали сумму его цифр. Затем снова вместо получившегося числа записали его сумму цифр. Этот процесс продолжался до тех пор, пока не осталось однозначное число. Какое число осталось?

Комбинаторика-1. 6 июля

1. В группе 15 человек. Сколькими способами можно выбрать шестерых для участия в викторине? А сколькими способами можно выбрать из этих же школьников 9 человек, в викторине не участвующих?

2. Докажите тождество $C_n^k = C_n^{n-k}$ двумя способами – алгебраически и путём комбинаторных рассуждений.

3. **(a)** В группе 15 человек. Для участия в спортивных соревнованиях необходимо выставить команду из 6 человек, причём Гришу в неё включать нельзя (в целях минимизации травматизма). Сколькими способами это можно сделать?

(b) ...а для проведения матбоя нужна команда из 6 человек, в которой Гриша будет капитаном. Сколькими способами можно собрать такую команду, если в группе по-прежнему 15 человек?

(c) Сколькими способами преподаватель может выбрать для дежурства 6 человек, не задумываясь о том, будет ли среди них Гриша?

4. Докажите тождество $C_{n+1}^{k} = C_n^k + C_n^{k-1}$ двумя способами – алгебраически и путём комбинаторных рассуждений.

5. Мальчики подарили Люде и Полине 10 разноцветных воздушных шаров. Сколькими способами можно разделить эти шары между Людой и Полиной? (К сожалению, кому-то из них может и не достаться шаров.)

6. Докажите тождество $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$.

7. Найдите два способа решения каждой задачи:

(a) Сколькими способами можно выбрать из 15 человек 6 членов команды, возглавляемой капитаном?

(b) Сколькими способами можно выбрать из n человек k членов парламента, возглавляемого президентом парламента?

8. Докажите тождество $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$ двумя способами – алгебраически и путём комбинаторных рассуждений.

9. В коробке лежит n синих и n красных шариков (все шарики разные). Сформулируйте вопрос, позволяющий доказать, что $C_n^0 \cdot C_n^k + C_n^1 \cdot C_n^{k-1} + \dots + C_n^k \cdot C_n^0 = C_{2n}^k$.

Для самостоятельного решения

10. Придумайте и запишите задачи, моделирующие следующие равенства:

(a) $C_n^k = C_{n-2}^k + 2 \cdot C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2}$

(b) $C_n^k = C_{n-3}^{k-3} + 3 \cdot C_{n-3}^{k-2} + 3 \cdot C_{n-3}^{k-1} + C_{n-3}^k$

Докажите равенства, решив придуманные задачи.

(c) Как можно обобщить результаты первых двух пунктов?

11. Придумайте и запишите задачу, моделирующую формулу:
$C_r^m \cdot C_m^k = C_r^k \cdot C_{r-k}^{m-k}$, $0 \leqslant k \leqslant m \leqslant r$.

Площадь-1. 6 июля

Каждой фигуре M на плоскости мы сопоставим число S_M, называемое *площадью* и обладающее следующими свойствами:

1) Площадь неотрицательна;

2) Площади равных фигур равны;

3) Площадь объединения фигур, не имеющих общих внутренних точек, есть сумма площадей фигур;

4) Площадь прямоугольника равна произведению его сторон.

1. Сторона EF прямоугольника $BEFD$ проходит через вершину прямоугольника $ABCD$. Найдите площадь прямоугольника $BEFD$, если площадь прямоугольника $ABCD$ равна 1.

2. Выразите площадь через длины сторон и высот для: **(a)** прямоугольного треугольника; **(b)** остроугольного треугольника (рис. 1); **(c)** произвольного треугольника (рис. 2).

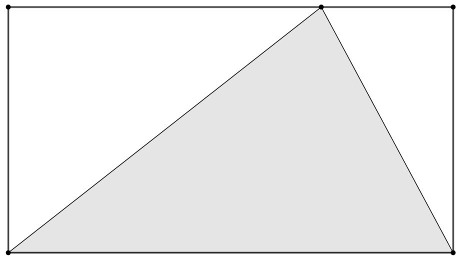


Рисунок 1

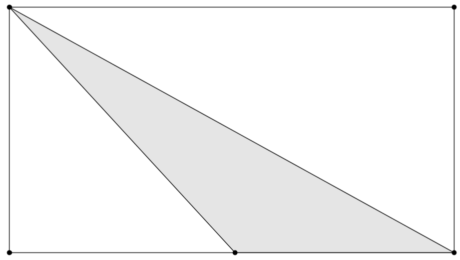


Рисунок 2

3. **(a)** Докажите, что медиана делит треугольник на две фигуры равной площади. Такие фигуры называются *равновеликими*. **(b)** Докажите (зная, что медианы пересекаются в одной точке), что все медианы делят треугольник на шесть равновеликих фигур.

4. Найдите, пожалуйста, площадь большого треугольника, если площадь закрашенного треугольника равна 1 (рис. 3).

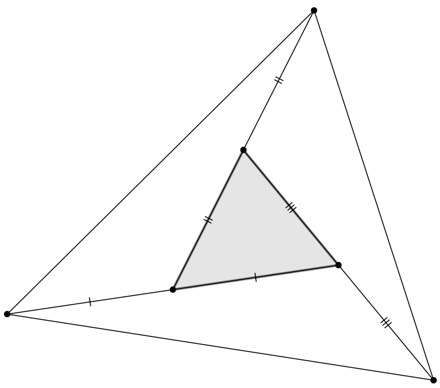


Рисунок 3

5. Отрезок AB равен 3. Найдите как можно больше треугольников ABC с площадью 3.

Для самостоятельного решения

6. Найдите площадь: **(a)** параллелограмма; **(b)** трапеции.

7. **(a)** Разделите треугольник на три равновеликие части двумя прямыми, выходящими из одной вершины. **(b)** Разделите параллелограмм на три равновеликие части двумя прямыми, выходящими из одной вершины.

8. Внутри правильного треугольника выбрали точку. Докажите, что сумма расстояний от нее до сторон треугольника от данного выбора не зависит. Верно ли это утверждение для квадрата, правильного пятиугольника?

9. Постройте треугольник, равновеликий данному выпуклому четырехугольнику.

Графы-2. 7 июля

1. **(a)** Если между двумя вершинами есть два различных пути, то в графе существует цикл.

(b) Если между любыми двумя вершинами существует ровно один путь, то граф связен и не имеет циклов.

(c) Если граф связен и не имеет циклов, то между любыми его двумя вершинами существует ровно один путь. Такой граф называется *деревом.*

2. В стране $n \geqslant 2$ городов, некоторые пары которых соединены дорогами. Известно, что из столицы можно добраться до любого другого города единственным способом. Докажите, что:

(a) В стране нет кольцевого маршрута;

(b) Существует город, из которого выходит ровно одна дорога;

(c) Существует два таких города;

(d) В стране ровно $n-1$ дорога.

Определение Вершина степени один в дереве называется *висячей*.

Определение Из связного графа можно удалить несколько рёбер так, чтобы полученный граф был деревом. Полученная конструкция называется *остовным деревом* графа.

Проверьте корректность определения, то есть удостоверьтесь, что из связного графа действительно всегда можно получить дерево.

3. Сколько рёбер нужно удалить из графа на n вершинах для получения остовного дерева, если граф является: **(a)** циклом; **(b)** полным?

4. В стране 100 городов и 199 дорог между ними. Из любого города можно добраться в любой другой. Докажите, что можно закрыть все дороги некоторого кольцевого маршрута на ремонт так, чтобы это условие не нарушилось.

Для самостоятельного решения

5. **(a)** В связном графе все вершины имеют четную ненулевую степень. Докажите, что в графе есть цикл.

(b) В дереве все вершины имеют нечётную степень. Докажите, что более половины вершин - висячие.

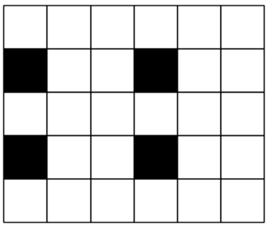
6. Граф, каждая компонента связности которого является деревом, называется *лесом* (пустой граф тоже будем считать лесом). Докажите, лес останется лесом, если удалить **(a)** ребро; **(b)** вершину и все ее рёбра; **(c)** любой набор вершин (но не все) и все их ребра.

7. В стране нет кольцевых маршрутов по чётному числу городов. Докажите, что города можно разбить на три независимые республики так, чтобы любая дорога соединяла города из разных республик.

8. Букашка, сидящая на стенке лабиринта, может попасть в любое другое место на стенке лабиринта единственным путём. Докажите, что крыса, сидящая в лабиринте, сможет выбраться.

Инвариант. 7 июля

0. В клетчатом прямоугольнике 5×6 закрашены 4 клетки как на рисунке. За ход разрешается менять местами любые две строки или любые два столбца. Докажите, что после тысячи таких операций закрашенные клетки снова окажутся угловыми клетками какого-то прямоугольника.



В задачах, где происходит какой-нибудь процесс, бывает полезно рассмотреть что-то, что при процессе никогда не изменяется. Такая величина или такое свойство называется *инвариант*.

1. Волк и семеро козлят встали в один ряд и играют в чехарду: каждую секунду двое из них, стоящие через одного, могут, прыгнув, поменяться местами. Если окажется, что они стоят в обратном порядке по сравнению с исходным, игра заканчивается. Закончится ли игра?

2. В пещере живёт 1001-головая гидра. Гидра считается побеждённой, если в некоторый момент времени у неё отсутствуют все головы. Геракл за один раз может срубить 10 или 7 голов. Если он срубит 10, тогда у гидры вырастет 7 новых, а если 7, то 16 новых голов. Сможет ли Геракл победить гидру?

3. Круг разделен на 6 секторов. Разрешается добавлять по одному камешку в любые два соседних сектора. Можно ли добиться, чтобы во всех секторах было поровну камешков, если:

(a) в начале в одном секторе лежит один камешек;

(b) в начале в двух секторах, расположенных через один, лежит по камешку?

4. На доске написаны числа 4, 5, 6. Разрешается взять любые два из написанных чисел a и b, стереть их, а вместо них написать числа

(a) $\frac{5a-3b}{2}$ и $\frac{5b-3a}{2}$;

(b) $\frac{a^2}{b}$ и $\frac{b^2}{a}$;

Можно ли такими операциями получить числа 6, 7, 8?

5. Болельщик Вася нарисовал расположение игроков на футбольном поле к началу первого и второго таймов. Оказалось, что некоторые игроки поменялись местами, а остальные остались на своих местах. При этом расстояние между любыми двумя игроками не увеличилось. Докажите, что все эти расстояния не изменились.

6. Любую вершину треугольника разрешается сдвигать по проходящей через нее прямой, параллельной противоположной стороне. Можно ли при помощи таких операций из равностороннего треугольника со стороной 1 сделать прямоугольный треугольник с катетами, равными 1?

Для самостоятельного решения

7. Есть три кучки камней: в первой 51 камень во второй — 49, а в третьей — 5. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из чётного числа камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

8. Прямоугольное поле 100×150 метров разбито на 150 квадратных одинаковых участков, 12 из которых поросли бурьяном. Известно, что бурьян за год распространяется на те и только те участки, у которых ровно два соседних (то есть имеющих общую сторону) участка уже поросли бурьяном. Докажите, что поле никогда не зарастет бурьяном полностью.

Абака. 7 июля

Геометрия.

1. (10) На плоскости расположены точки A, B, C, D и E. Расстояние AC равно 5 см, AE - 4 см, BC - 14 см, BD - 2 см, DE - 3 см. Чему равно расстояние между серединами отрезков AB и CD?

2. (20) В треугольнике ABC $AB = BC$. Из точки E на стороне AB опущен перпендикуляр ED на BC. Оказалось, что $AE = ED$. Найдите угол DAC.

3. (30) Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC. Они пересекают прямые CB и BA в точках K и M соответственно. Чему может равняться длина AB, если $BM = 8$ см, $KC = 1$ см? Укажите все возможные варианты.

4. (40) Какое наибольшее число острых внутренних углов может иметь выпуклый 2014-угольник?

5. (50) Отрезки AC и BD пересекаются в точке O. Периметр треугольника ABC равен периметру треугольника ABD, а периметр треугольника ACD равен периметру треугольника BCD. Найдите длину AO, если $BO = 10$ см.

6. (60) В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все внутренние углы равны. Известно, что $AB = 2$, $CD = 5$, $DE = 7$, $EF = 1$. Найдите BC и AF.

Графы.

1. (10) В стране Древляндия 101 город, и некоторые из них соединены дорогами. При этом любые два города соединяет ровно один путь. Сколько в этой стране дорог?

2. (20) 20 телефонов соединены проводами так, что каждый провод соединяет два телефона, каждая пара телефонов соединена не более чем одним проводом и от каждого телефона отходит не более двух проводов. Нужно закрасить провода (каждый провод целиком одной краской) так, чтобы от каждого телефона отходили провода разных цветов. Какого наименьшего числа красок достаточно для такой закраски?

3. (30) Район построен в виде квадрата 3 квартала на 3 квартала (кварталы – квадраты со стороной 1, всего 9 кварталов). Какой наименьший путь должен пройти асфальтоукладчик, чтобы заасфальтировать все улицы района, если он начинает и кончает свой путь в угловой точке A? (Стороны квадрата – тоже улицы).

4. (40) В системе связи, состоящей из 999 абонентов, каждый абонент связан ровно с n другими. Определите все возможные значения n.

5. (50) Компания из нескольких друзей вела переписку так, что каждое письмо получали все, кроме отправителя. Каждый написал одно и то же количество писем, в результате чего всеми вместе было получено 440 писем. Сколько человек могло быть в этой компании?

6. (60) 12 шахматистов сыграли турнир в один круг (т.е. каждый с каждым один раз). Потом каждый из них написал 12 списков. В первом только он, в $k+1$-м - те, кто были в k-м и те, у кого они выиграли. Оказалось, что у любого шахматиста 12-ый список отличается от 11-ого. Сколько было ничьих?

Комбинаторика.

1. (10) На прямой отмечено 100 синих и n красных точек, причем между двумя одноцветными точками есть точка другого цвета. Чему может быть равно n? Укажите все варианты.

2. (20) Назовем пятизначное число "интересным", если все его цифры различны, а первая цифра равна сумме остальных четырех. Сколько существует "интересных" пятизначных чисел?

3. (30) Вася выписал все слова (не обязательно осмысленные), которые получаются вычеркиванием ровно двух букв из слова ИНТЕГРИРОВАНИЕ, а

Маша сделала то же самое со словом СУПЕРКОМПЬЮТЕР. У кого получилось больше слов и на сколько?

4. (40) На окружности отмечено 10 точек. Сколько существует незамкнутых несамопересекающихся девятизвенных ломаных с вершинами в этих точках?

5. (50) Фабрика игрушек выпускает проволочные кубики, в вершинах которых расположены маленькие разноцветные шарики. По ГОСТу в каждом кубике должны быть использованы шарики всех восьми цветов (белого и семи цветов радуги). Сколько разных моделей кубиков может выпускать фабрика?

6. (60) Сколькими способами можно расставить в клетках таблицы 10×20 числа 1 и -1 так, чтобы произведение чисел в любой строке и любом столбце равнялось 1?

Конструкции.

1. (10) Разрежьте клетчатый прямоугольник 5×6 по линиям сетки на семь прямоугольников различной площади.

2. (20) Клетчатая доска 9×9 раскрашена в шахматном порядке так, что угловые клетки — белые. Расставьте на ней 5 ладей так, чтобы они побили все незанятые белые клетки.

3. (30) В клетках таблицы 4×4 расставьте числа, не равные нулю так, чтобы сумма чисел, стоящих в углах любого квадрата 2×2, 3×3 или 4×4, была равна нулю.

4. (40) Расставьте числа $1, 2, 3, \ldots, 10$ в другом порядке, чтобы первым шло 10, а каждое следующее было делителем суммы всех предыдущих.

5. (50) Нарисуйте два пятиугольника так, чтобы у них были одни и те же вершины, но не было ни одной общей стороны.

6. (60) Поставьте в ряд 6 различных простых чисел так, чтобы разности соседних чисел в ряду были равны.

Последовательности.

1. (10) Тринадцать индюшат клевали зерно. Первый индюшонок склевал 40 зерен; второй — 60, каждый следующий — среднее арифметическое зерен, склеванных всеми предыдущими индюшатами. Сколько зерен склевал 10-й индюшонок?

2. (20) Стороны треугольника — последовательные целые числа. Найдите эти стороны, если известно, что одна из его биссектрис перпендикулярна одной из его медиан.

3. (30) В старой усадьбе дом обсажен по кругу высокими деревьями — соснами и березами. Всего деревьев 96. Эти деревья обладают странным свойством:

из двух деревьев, растущих через одно от любого хвойного — одно хвойное, а другое лиственное, и из двух деревьев, растущих через три от любого хвойного — тоже одно хвойное, а другое лиственное. Сколько берез посажено вокруг дома?

4. (40) На доске были записаны числа 3, 9 и 15. Разрешалось сложить два записанных числа, вычесть из этой суммы третье, а результат записать на доску вместо того числа, которое вычиталось. После многократного выполнения такой операции на доске оказались три числа, наименьшее из которых было 999. Каковы были два остальных числа?

5. (50) На какие две цифры заканчивается число $1! + 2! + \cdots + 2014!$?

6. (60) Все натуральные числа от 1000 до 2000 записаны подряд: 100010011002 . . . 19992000. Сколько раз в этом ряду после нечётной цифры идёт чётная?

Числа.

1. (10) Преподаватель сотавил на доске верное равенство, но на перемене Сава успел заменить две цифры на другие. После перемены на доске было написано:

$$4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 2247$$

Что было написано изначально?

2. (20) Найдите все трёхзначные числа, из цифр каждого из которых можно составить шесть различных двузначных простых чисел.

3. (30) Найдите все такие двузначные числа A, для каждого из которых верны ровно два из следующих четырех условий: 1) делится на 5; 2) делится на 23; 3) $+ 7$ — квадрат целого числа; 4) ˘10 — квадрат целого числа.

4. (40) В каком-то году некоторое число ни в одном месяце не было воскресеньем. Какое это могло быть число? Укажите все варианты.

5. (50) Каждая вездочка в выражении 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10 заменяется либо на "+", либо на " · ". Пусть N - наибольшее число, которое можно получить таким образом. Чему равен наименьший простой делитель N?

6. (60) Найти три различных натуральных числа, произведение любых двух из которых делится на сумму этих двух чисел.

Треугольник Паскаля. 9 июля

1. План города имеет схему, изображённую на рис. 1. На всех улицах введено одностороннее движение: можно ехать только «вправо» или «вверх». Водитель автомобиля перед поездкой из пункта A в пункт B получает «маршрутный лист», в котором указано, в каком из двух направлений он должен ехать после каждого перекрёстка: вверх (В) или вправо (П). Составьте «маршрутный лист» для траектории, показанной на рисунке.

(a) Сколько есть различных маршрутов, ведущих из точки A в точку B?

(b) А если план города – прямоугольник $(n-k)\times k$?

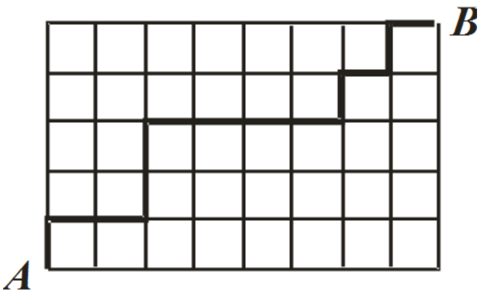


Рис. 1

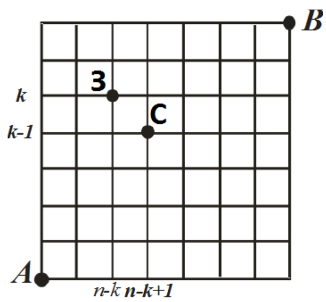


Рис. 2

2. План города (см. рис. 2) представляет собой квадрат $n \times n$. Улицы называются: 0-я вертикальная, ..., n-ая вертикальная, 0-я горизонтальная, ..., n-я горизонтальная. На пересечении k-ой горизонтальной улицы и $(n-k)$-ой вертикальной улицы находится автозаправка, а на пересечении $(k-1)$-ой горизонтальной улицы и $(n-k+1)$-ой вертикальной улицы находится станция техобслуживания. Сколькими способами можно составить маршрут из A в B (по правилам предыдущей задачи), чтобы он проходил:

(a) через автозаправку;

(b) через станцию техобслуживания?

3. Докажите формулу $\left(C_n^0\right)^2+\left(C_n^1\right)^2+\ldots+\left(C_n^n\right)^2=C_{2n}^n$.

4. В левом нижнем узле сетки находится блоха, которая может прыгать на один шаг вверх или на один шаг вправо. Найдите число маршрутов, по которым блоха может добраться до произвольного узла сетки.

5. Докажите, что каждое внутреннее число в треугольнике Паскаля равно сумме двух чисел, стоящих над ним.

6. Докажите, что числа, равноудалённые от концов любой строки, равны между собой.

7. Докажите, что в треугольнике Паскаля сумма всех чисел, стоящих в строке с номером n, в два раза больше, чем сумма всех чисел, стоящих в строке с номером $(n-1)$.

8. Найдите сумму чисел в n-ой строке треугольника Паскаля.

9. Докажите, что:

(a) Каждое число C в треугольнике Паскаля равно сумме чисел правой диагонали, начиная с самого левого вплоть до стоящего справа над числом C (рис. 3);

(b) Аналогично для левой диагонали (рис. 4).

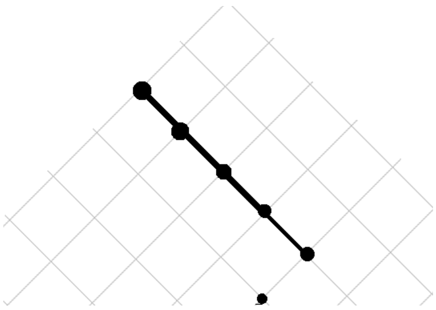


Рис. 3

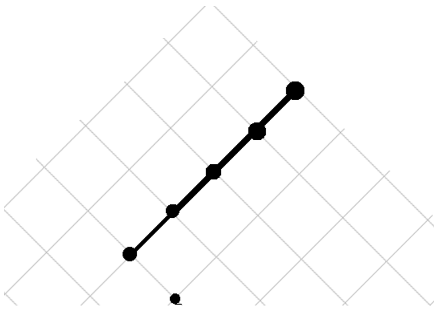


Рис. 4

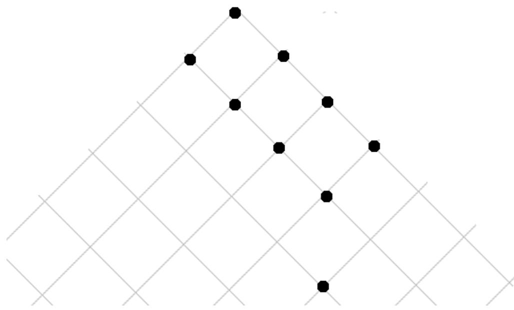


Рис. 5

10. Докажите, что каждое число C в треугольнике Паскаля, уменьшенное на 1, равно сумме всех чисел, заполняющих параллелограмм (см. рис. 5), ограниченный теми правой и левой диагоналями, на пересечении которых стоит число C (сами эти диагонали в рассматриваемый паралеллограмм не включаются).

Для самостоятельного решения

11. Встречается ли в треугольнике Паскаля число 1999?

12. Найдите натуральное число, большее единицы, которое встречается в треугольнике Паскаля **(a)** больше трёх раз; **(b)** больше четырёх раз.

13. Постройте *треугольник Лейбница*, устроенный следующим образом: он симметричен, верхнее число равно единице, каждое число равно сумме двух, расположенных под ним. Первое число в n-ой строке имеет вид $1/n$. Запишите n-ую строку треугольника Лейбница в общем виде.

НОД и НОК. 9 июля

0. У добрых, но справедливых преподавателей есть 30 булочек и 84 конфеты. Они хотят раздать их как можно большему количеству детей, причём и тех, и других поровну. Скольким детям они в итоге раздадут вкусности?

Определение 1. *Наибольшим общим делителем* двух целых чисел называется их общий делитель, который больше всех остальных общих делителей.

Определение 2. *Наименьшим общим кратным* двух целых чисел называется наименьшее положительное число, делящееся на оба этих числа.

Классические обозначения: $\text{НОД}(a, b) = (a, b)$, $\text{НОК}(a, b) = [a, b]$.

1. Найдите **(a)** $(525, 990)$; **(b)** $(99! + 100!, 101!)$.

2. Какое наибольшее значение может принимать (a, b), если $a \cdot b = 600$?

3. Найдите наибольшее трёхзначное число n такое, что $(n, 1080) = 36$.

4. Докажите следующие свойства НОД:

(a) Если m делится на n, то $(m, n) = n$; **(b)** Если $(a, b) = d$, то $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$;

(c) $(a \cdot m, a \cdot n) = a \cdot (m, n)$; **(d)** $(a, b) = (a - b, b)$;

Определение 3. Если $(a, b) = 1$, то числа a и b называются *взаимно простыми.*

5. Докажите, что $[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b$.

6. Используя свойства НОД, докажите, что числа $2n + 13$ и $n + 7$ взаимно просты при любом натуральном n.

7. Какие значения может принимать $(3n + 2, 10n + 23)$?

8. **(a)** На столе лежит клетчатая шоколадка 20×75. Каждую минуту от неё отламывают квадратик наибольшего возможного размера и кладут в тарелку. Какая сторона будет у самого маленького квадратика в тарелке?

(b) Найдите $(\underbrace{11\ldots11}_{20}, \underbrace{11\ldots11}_{75})$.

Для самостоятельного решения

9. Петя посчитал НОК всех чисел от 1 до 1000, а Вася - всех чисел от 501 до 1000. У кого результат получился больше и во сколько раз?

10. На складе лежат в большом количестве ширлы, мырлы и дырлы. Ширла состоит из пяти шашек, мырла — из семи машек, дырла — из девяти дашек. Все шашки одинаковы, машки — тоже, одинаковы и все дашки. У Васи есть чашечные весы без гирь, и он хочет за одно взвешивание узнать, что тяжелее: две шашки или машка с дашкой. К сожалению, все изделия, имеющиеся на складе — неразборные. Помогите Васе!

11. Пусть a и b - натуральные числа. Докажите, что среди чисел $a, 2a, \ldots, ba$ ровно (a, b) чисел делится на b.

12. Даны шесть натуральных чисел. Для каждой пары их НОД записали на доске. Может ли оказаться так, что на доске записаны все числа от 1 до 15.

13. Про натуральные числа a и b, известно, что $a^2 + b^2$ делится на ab. Докажите, что $a = b$.

Неравенства. 10 июля

0. Пусть a и b — длины сторон прямоугольника. Известно, что $a < 3, b < 4$. Какие значения может принимать: **(a)** периметр; **(b)** площадь; **(c)** длина диагонали; **(d)** разность длин сторон этого прямоугольника?

Свойства неравенств:

(a) если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$;

(b) если $a + b > c$, то $a > c - b$;

(c) если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$;

(d) если $a, b, c, d > 0$ и $a > b, c > d$, то $a \cdot c > b \cdot d$.

1. Сравните a и b, если известно, что:

(a) $a \geqslant m, m > b + c^2$ **(b)** $a + c > b + 1, c < 1$

2. Замените буквы в слове «ТРАНСПОРТИРОВКА» цифрами (разные буквы разными цифрами, одинаковые буквы — одинаковыми) так, чтобы выполнялось неравенство: Т>Р>А>Н<С<П<О<Р<Т>И>Р>О<В<К<А.

3. На русско-французской встрече не было представителей других стран. Суммарное количество денег у французов оказалось больше суммарного количества денег у россиян, и суммарное количество денег у женщин оказалось больше суммарного количества денег у мужчин. Обязательно ли на встрече была француженка?

4. Числа a и b таковы, что суммы $a + b$ и $3a + 2b$ положительны. Может ли быть отрицательным число $5a + 4b$? А число $2a + 3b$?

5. Компания «РОЛЛ ХОЛЛ» предлагает два вида комплексных билетов по 400 рублей: 1 час проката роликовых коньков + 1 компьютерная игра + 1 игра на бильярде + 6 жетонов для игральных автоматов ИЛИ 2 компьютерные игры + 10 жетонов для автоматов + 30 минут проката коньков. Известно, что игра на бильярде дороже компьютерной. Что дешевле: взять коньки на 20 минут или купить три жетона?

6. Когда Винни-Пух пришёл в гости к Кролику, он съел 3 тарелки мёда, 4 тарелки сгущёнки, 2 тарелки варенья, а после этого не смог выйти наружу из-за того, что сильно растолстел от такой еды. Но известно, что если бы он съел 2 тарелки мёда, 3 тарелки сгущёнки и 4 тарелки варенья или 4 тарелки мёда, 2 тарелки сгущёнки и 3 тарелки варенья, то спокойно смог бы покинуть нору гостеприимного Кролика. От чего больше толстеют: от варенья или от сгущёнки?

7. Если первый автомобиль сделает 4 рейса, а второй 3 рейса, то они перевезут вместе меньше 21 т груза, если же первый сделает 7 рейсов, а второй 4 рейса, то они перевезут больше 33 т груза. Какой автомобиль имеет большую грузоподъёмность?

Для самостоятельного решения

8. Правильную дробь перевернули. Какая из двух дробей ближе к единице: исходная или перевёрнутая?

9. Сравните числа 3^{2000} и 4^{1500}.

10. Какую максимальную площадь имеет прямоугольник с периметром 20 см?

Разнобой-1. 10 июля

1. На шахматной доске в некоторых клетках 33 жука. Изначально в каждой клетке не более одного. Каждую секунду жуки переползают в понравившуюся им соседнюю по стороне клетку. Может ли так оказаться, что в некоторый момент времени они все очутились в одной клетке?

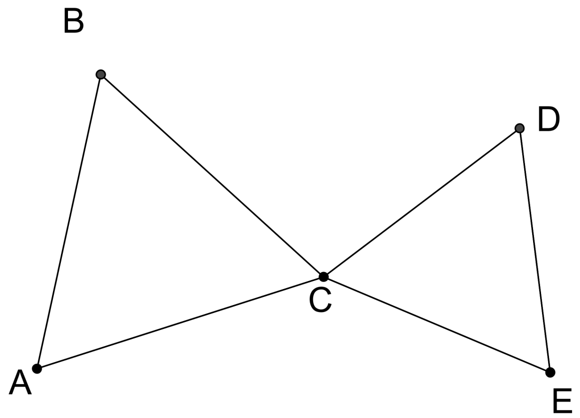
2. Операция $*$ для чисел x и y такова, что $x * y = \dfrac{2x+6}{2x+3y}$. Найдите значение выражения $(((2014 * 2013) * 2012) * 2011) * \ldots * 2) * 1$.

3. **(a)** Может ли $x^2 + y^2 + z^2 + 3^2$ делиться на 8?

(b) Может ли $x^3 + y^3 + z^3$ делиться на 7, если x, y, z не кратны 7?

4. В куче лежат 25 камней. Её делят на части, затем одну из частей опять делят надвое и т.д. до тех пор, пока не получат 25 отдельно лежащих камней. При каждом делении одной из куч на две части на доску записывается произведение количеств камней в этих частях. Докажите, что в конце сумма всех чисел на доске будет равна 300.

5. Два равносторонних треугольника ABC и CDE имеют общую вершину (см. рисунок). Найдите угол между прямыми AD и BE.

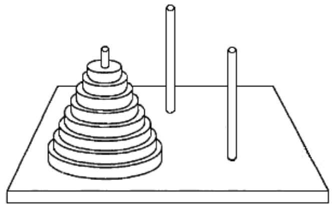


Конструкции по индукции. 11 июля

0. В квадрате $2^n \times 2^n$ вырезана одна произвольная клетка. Докажите, что фигуру можно разрезать на уголки из трёх клеток.

1. Игра «Ханойская башня».

(a) Имеется пирамида с 7 кольцами возрастающих размеров (внизу — самое большое) и еще два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что можно переложить все кольца с первого стержня на один из пустых стержней. **(b)** Решите ту же задачу для 1000 колец.



2. На столе стоят 2^n стакана с водой. Разрешается взять любые два стакана и уровнять в них количества воды, перелив часть воды из одного стакана в другой. Докажите, что с помощью таких операций можно уравнять количество воды в стаканах.

3. Плоскость разбита на части несколькими **(a)** прямыми; **(b)** окружностями.

Докажите, что эти части можно раскрасить в 2 цвета правильным образом (т.е. так, чтобы никакие две области одного цвета не имели общей границы).

4. **(a)** Найдите набор из 5 гирь, которыми можно набрать любой целый вес от 1 до 31 г.

(b) Найдите набор из 6 гирь общим весом 60 г, которыми можно набрать любой целый вес от 1 до 60 г.

(c) Докажите, что если $2^{k-1} \leqslant n < 2^k$, то существует набор из k гирь общим весом n г, которыми можно набрать любой целый вес от 1 до n г.

5. **(a)** Незамкнутая цепочка составлена из 7 звеньев. Известно, что одно из звеньев — фальшивое, легче остальных. Как, раскрыв не более двух звеньев, при помощи взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти фальшивое звено? (Число взвешиваний не ограничено. При раскрывании звена цепочка распадается на 3 части: это звено, цепочка слева от звена и цепочка справа.)

(b) А как найти фальшивое в цепочке из 63 звеньев, раскрыв 5 звеньев?

(c) Для какого наибольшего n можно найти одно фальшивое звено в цепочке из n звеньев, если разрешается раскрыть не более чем k звеньев?

6. В некоторых вершинах правильного n-угольника стоят нули, а в остальных — единицы. Докажите, что можно разбить n-угольник диагоналями на треугольники так, чтобы в вершинах каждого сумма чисел будет 1 или 2.

Для самостоятельного решения

7. Разрежьте треугольник на **(a)** 4 **(b)** 16 **(c)** 25 **(d)** 1000 **(e)** $n > 6$ меньших треугольников с такими же углами, как у исходного.

8. Прямоугольник $2 \times n$ разбит на доминошки. Докажите, что его клетки можно раскрасить в два цвета так, чтобы любая доминошка в данном разбиении содержала клетки разных цветов, но в любом другом разбиении этого прямоугольника на доминошки нашлась бы доминошка, содержащая две клетки одного цвета.

Шары и перегородки. 11 июля

0. **(a)** Сколькими способами Александр Михайлович может раздать 4 ученикам 20 различных полотенец?
(b) Сколькими способами Александр Михайлович может раздать 4 ученикам 20 одинаковых полотенец?
(c) Сколькими способами Александр Михайлович может раздать 4 ученикам 20 одинаковых полотенец так, чтобы каждому досталось хотя бы одно?

1. Сколько различных последовательностей можно записать:
(a) из 31 единицы и 6 нулей?
(b) из 31 единицы и 6 нулей, если нули не должны стоять ни на первом, ни на последнем местах, ни два подряд?

2. Сколько решений имеет уравнение $x + y + z = 2000$:
(a) в целых неотрицательных числах?
(b) в натуральных числах?
(c) в натуральных числах, не превосходящих 800?

3. **(a)** У Александра Михайловича есть 20 наволочек и 15 подушек. Сколькими способами он может разделить их между четырьмя учениками?
(b) Сколькими способами Элина, Марина и Полина могут выбрать себе по натуральному числу, чтобы произведение этих чисел было равно 2000000000?

4. Сколько существует семизначных чисел, цифры которых идут в:
(a) возрастающем порядке?
(b) неубывающем порядке?

5. Полина, Элина и Марина едят пироги. Марина может съесть не более 10 пирогов, Полина — не более 29, а Элина - не более 44 пирогов. Сколькими способами они могут поделить между собой 73 пирога, чтобы каждая съела хотя бы один?

Для самостоятельного решения

6. Поезд, в котором находятся m учеников, делает n остановок.
(a) Сколькими способами ученики могут выйти на этих остановках?
(b) Сколькими способами ученики могут выйти на этих остановках, если учитывать только количество учеников, вышедших на каждой остановке (т.е. если учеников считать одинаковыми).

7. Сколько решений в нечетных натуральных числах имеет уравнение $x + y + z + t = 2014$?

8. Ирина Александровна делит между четырьмя учениками 10 яблок, 11 груш и 5 чупа-чупсов. Каждому ученику должен достаться хотя бы один фрукт. Сколькими способами Ирина Александровна может это сделать, если чупа-чупс — не фрукт?

Площадь-2. 12 июля

1. На лист бумаги посадили две кляксы (желтую и синюю). В результате площадь поверхности, которую не замарали, оказалась равна площади поверхности, окрасившейся в зеленый цвет. Докажите, что суммарная площадь клякс в точности равна площади листа. Верно ли обратное?

2. На соседних сторонах прямоугольника отмечены точки N и M (см. рисунок 1). Докажите, что сумма площадей серых многоугольников равна площади заштрихованного многоугольника.

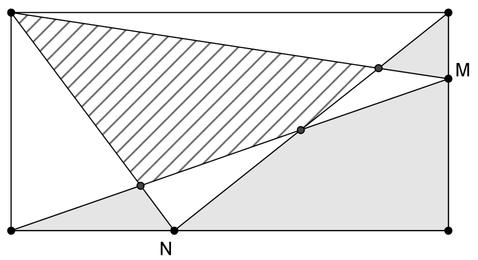


Рисунок 1

3. Точка A_1 - середина стороны BC треугольника ABC, а точки B_1, B_2 и B_3 делят сторону AC на четыре равных отрезка (см. рисунок 2). Докажите, что площадь серой области равна площади заштрихованной.

4. На стороне BC отмечена точка K (см. рисунок 3). Докажите, что площади серой и заштрихованной частей равны.

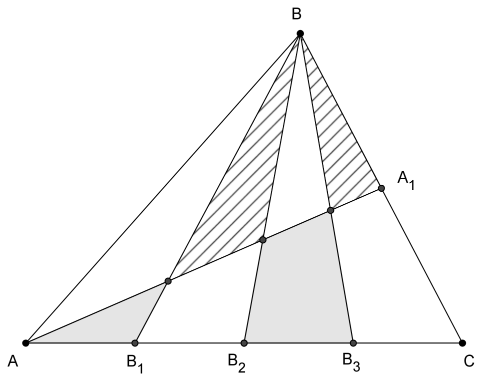


Рисунок 2

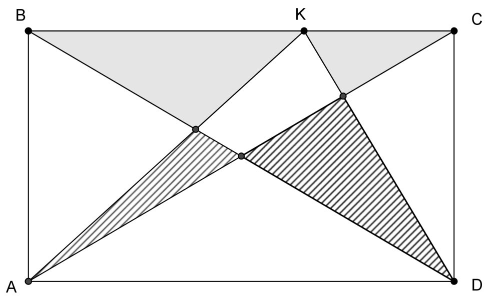


Рисунок 3

5. В трапеции $ABCD$ с меньшим основанием BC через точку B проведена прямая, параллельная CD и пересекающая диагональ AC в точке E. Сравните площади треугольников ABC и DEC.

6. Через точку D, лежащую на стороне BC треугольника ABC, проведены прямые параллельные двум другим сторонам и пересекающие стороны AB и AC соответственно в точках E и F. Докажите, что треугольники CDE и BDF равновелики.

7. Докажите, что равновелики треугольник GD и четырехугольник DGA, где E – середина BC (см. рисунок 4).

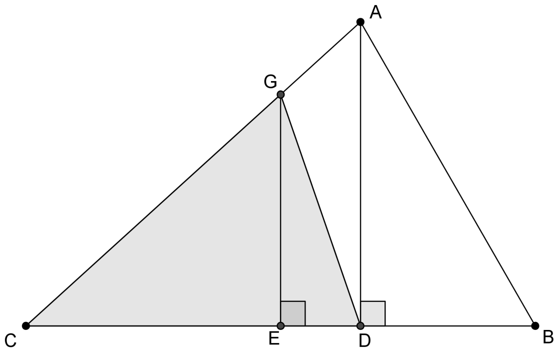


Рисунок 4

8. Дан выпуклый четырехугольник ABCD. Через середину G диагонали BD проведена прямая, параллельная диагонали AC, пересекающая сторону DC в точке H. Докажите, что отрезок AH делит площадь четырехугольника ABCD пополам.

Для самостоятельного решения

9. На сторонах AB и AD параллелограмма ABCD взяты соответственно точки E и F, причём отрезок EF параллелен диагонали BD. Докажите, что площади треугольников BCE и CDF равны.

10. На стороне AB треугольника ABC выбраны точки D и K, на стороне AC – точки E и H, а на стороне BC – точка I. Оказалось, что $AD = BK, AE = CH$ и $DE||BC$. На отрезке DE выбрана точка F. Докажите, что сумма площадей треугольников KFH и DEI равна площади треугольника AHK.

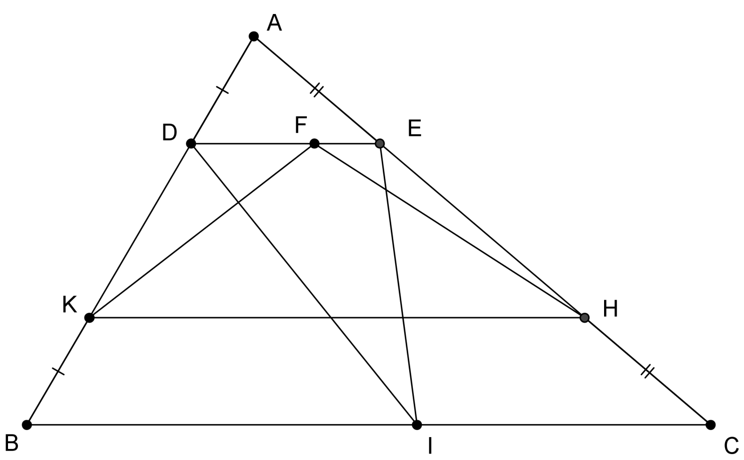


Рисунок 5

Матбой-междусобой. 12 июля

1. В треугольнике ABC с углами 30°, 30° и 120° проведены медианы AA_0, BB_0 и CC_0. Вне треугольника ABC построены отрезки A_0A_1, B_0B_1 и C_0C_1, перпендикулярные соответствующим сторонам треугольника. Оказалось, что $AA_0 = A_0A_1, BB_0 = B_0B_1$ и $CC_0 = C_0C_1$. Найдите углы треугольника $A_1B_1C_1$.

2. Влада бегает быстрее Кати, но медленнее Алины. Все трое стартовали из одной точки одновременно в одном направлении, и пробежав каждая несколько кругов по стадиону, финишировали в том же самом месте и в то же самое время. Оказалось, что Алина обогнала Катю 10 раз. Сколько всего раз девочки обгоняли друг друга? (Скорости всех постоянны.)

3. Александр Витальевич хочет вырезать из квадрата $2n \times 2n$ по линиям, параллельным сторонам квадрата, несколько прямоугольников $1 \times (n+1)$ (эти прямоугольники могут располагаться как вертикально, так и горизонтально). Для каждого натурального n укажите, сколько таких прямоугольников у него может получиться.

4. Две одинаковые шестеренки имеют по 32 зубца. Их совместили и спилили одновременно 6 пар зубцов. Доказать, что одну шестеренку можно повернуть относительно другой так, что в местах сломанных зубцов одной шестеренки окажутся целые зубцы второй шестеренки.

5. На планете Ариэль астроном пронаблюдал 50 звезд и вычислил сумму S попарных расстояний между ними. Облако заслонило 25 звезд. Доказать, что сумма попарных расстояний между оставшимися звездами меньше $S/2$.

6. Неотрицательные числа a, b, c таковы, что $a^2 - b^2 = bc$ и $b^2 - c^2 = ab$. Докажите, что $abc = 0$.

7. В лагере проводят интернет. Два инженера за ход могут соединить два корпуса проводом. Как только все компьютеры объединяются в сеть, она перегружается, и инженер, который проложил последний провод, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре, если в лагере 1043 корпуса?

8. Вася сконструировал компьютер, который хранит в памяти три числа, а на дисплей выводит только две последние цифры каждого из этих чисел. У компьютера есть кнопка, при нажатии на которую первое число увеличивается на 12, второе – на 13, а третье – на 42. Сейчас на экране горят цифры 01, 03 и 61. Может ли Вася, нажимая на кнопку, добиться того, чтобы все числа на экране стали одинаковыми?

Алгоритм Евклида. 14 июля

1. На столе лежит клетчатая шоколадка 20×75. Каждую минуту от неё отламывают квадратик наибольшего возможного размера и кладут в тарелку. Какая сторона будет у самого маленького квадратика в тарелке?

2. На столе лежит клетчатая шоколадка $a \times b$. Каждую минуту от неё отламывают квадратик наибольшего возможного размера и кладут в тарелку. Пусть у самого маленького квадратика в тарелке сторона d. Покажите, что:

(a) d делит и a, и b;

(b) стороны всех квадратиков в тарелке делятся на d;

(c) $d = (a, b)$.

Определение. Алгоритм Евклида — способ найти НОД двух натуральных чисел, последовательно заменяя пару исходных чисел на пару из меньшего числа и остатка от деления большего на меньшее.

$$\begin{array}{ccccccc}
a & = & b & \cdot & q_1 & + & r_1 \\
b & = & r_1 & \cdot & q_2 & + & r_2 \\
r_1 & = & r_2 & \cdot & q_3 & + & r_3 \\
 & \ldots & & & & & \\
r_{n-1} & = & r_n & \cdot & q_{n+1} & + & r_{n+1} \\
r_n & = & r_{n+1} & \cdot & q_{n+2} & + & 0
\end{array}$$

3. При помощи алгоритма Евклида найдите **(a)** $(525, 990)$; **(b)** $(728, 1183)$.

4. (a) На прямой сидит кузнечик, который умеет прыгать только на 9 или 7 сантиметров, зато в обе стороны. Может ли он сместиться после нескольких прыжков на 1 сантиметр вправо от начального положения?

(b) По большому колесу с длиной окружности 9 метров катится малое колесо с длиной окружности 7 метров. В малое колесо вбит гвоздь, который делает отметки на большом колесе. Покажите, что через некоторое время на большем колесе будет 9 отметок.

(c) Найдите такие целые числа x и y, что $9x + 7y = 1$.

Теорема. Если $(a, b) = d$, то существуют такие *целые* x и y, что $ax + by = d$. Эта теорема называется *теорема о линейном представлении НОД*.

5. В государстве имеют хождение монеты достоинством a и b золотых, где a и b — взаимно простые натуральные числа. Докажите, что такими монетами можно (возможно, со сдачей) набрать любую сумму.

6. Числа a, b, c взаимно просты в совокупности, то есть $(a, b, c) = 1$. Докажите, что любое целое число d представимо в виде $d = ax + by + cz$, где числа x, y, z целые.

Для самостоятельного решения

7. Двое играют в игру. На столе лежат две кучи орехов. В одной куче 1573 ореха, а в другой 97900. Очередным ходом каждый из игроков может разложить любую кучу в две, одна из которых должна совпадать по размерам с какой-нибудь из имеющихся в данный момент на столе. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

8. Найдите пару чисел, не больших 1000, для которых алгоритм Евклида заканчивает работу (получает 0) не менее чем через 14 шагов.

9. Докажите, что шахматный конь, стоящий на бесконечной шахматной доске, сможет попасть в любую клетку.

Неравенство треугольника. 14 июля

1. Внутри треугольника ABC выбрана точка D. Докажите, что

(a) $AD + DC < AB + BC$.

(b) $AD + BD + CD < AB + BC + CA$;

(c) $2(AD + BD + CD) > AB + BC + CA$.

2. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого четырёхугольника

(a) больше суммы длин противоположных сторон;

(b) больше его полупериметра;

(c) меньше периметра.

3. Найдите в выпуклом четырехугольнике точку с минимальной суммой расстояний до вершин.

Обобщите неравенство треугольника на случай произвольного многоугольника.

4. Диагональ выпуклого $2n + 3$-угольника назовем *главной*, если по одну сторону от нее лежит n вершин, а по другую $n+1$. Выбрано несколько главных диагоналей, не имеющих общих концов. Докажите, что сумма их длин меньше суммы длин оставшихся главных диагоналей, если

(a) $n = 1$;

(b) $n = 2$;

(c) n — любое натуральное.

Для самостоятельного решения

5. Точки A и B расположены

(a) по разные стороны;

(b) по одну сторону от прямой. Найти точку на прямой, чтобы суммарный путь от A и B до нее был минимальным?

(c) E - середина стороны BC четырехугольника $ABCD$. Угол AED равен $90°$. Докажите, что $AB + CD \geqslant AD$.

(d) E - середина стороны BC четырехугольника $ABCD$. Угол AED равен $120°$. Докажите, что $AB + BE + CD \geqslant AD$.

Малая теорема Ферма. 15 июля

1. Найдите число $n > 4$ такое, чтобы таблица умножения ненулевых остатков по модулю n **(a)** не содержала двух одинаковых чисел в одной строке; **(b)** содержала хотя бы один 0.

2. Докажите, что если модуль — простой, то в каждой строке и в каждом столбце таблицы умножения остатков все числа различны. (То есть каждая строка таблицы содержит все ненулевые остатки, переставленные в другом порядке.)

3. Пусть a — целое число, которое не делится на простое число p. Докажите, что:

$$a \times 2a \times 3a \times \ldots \times (p-1)a \underset{p}{\equiv} (p-1)!$$

4. **(Малая теорема Ферма)** Докажите, что если p — простое число и a не делится на p, то $a^{p-1} \underset{p}{\equiv} 1$

5. Пусть p — простое число.

(a) Сколькими способами можно покрасить вершины правильного p-угольника в n цветов?

(b) А если способы, отличающиеся друг от друга поворотом многоугольника вокруг его центра, считаются одинаковыми?

(c) Выведите из пункта (b) малую теорему Ферма.

6. Найдите остаток от деления **(a)** 2^{100} на 101; **(b)** 7^{102} на 101; **(c)** 8^{900} на 29.

7. Докажите, что $3^{3000} - 1$ делится на 1001.

8. Будет ли простым число $1001^{200} + 100$?

9. Докажите, что для любого целого a, не делящегося на 17, либо $a^8 + 1$, либо $a^8 - 1$ делится на 17.

10. Пусть p — простое число, большее 5. Докажите, что число, в котором ровно $p - 1$ единица, делится на p.

11. Пусть p и q — различные простые числа. Докажите, что $p^q + q^p \underset{pq}{\equiv} p + q$

Разнобой-2. 15 июля

1. На улице выстроились несколько детей. Некоторые из них дружат (если A друг B, то B друг A). Докажите, что преподаватель всегда может им раздать листочки с числами так, что любые два друга получат числа, имеющие НОД > 1, а дети, которые не дружат, получат взаимно простые числа.

2. Дан четырёхугольник $ABCD$. *Параллелограммом Вариньона* четырёхугольника $ABCD$ называется четырёхугольник с вершинами в серединах сторон AB, BC, CD и DA.

(a) Докажите, что параллелограмм Вариньона - параллелограмм.

(b) Докажите, что площадь параллелограмма Вариньона равна половине площади четырёхугольника.

3. На окружности отмечено более 2014 точек. Докажите, что количество способов провести три непересекающиеся хорды с концами в этих точках делится на 5.

4. На доске написаны числа от 1 до 2014. Костя и Толя по очереди стирают какое-нибудь из написанных чисел вместе со всеми его делителями. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

5. На доске в ряд написаны числа 1, 1. За ход между соседними числами на доске вписывается их сумма. Найдите сумму чисел на доске после 100-ого хода.

1-ый ход: 1 1

2-ой ход: 1 2 1

3-ий ход: 1 3 2 3 1

4-ый ход: 1 4 3 5 2 5 3 4 1

Теорема Бойяи-Гервина. 16 июля

Определение. Два многоугольника называются *равносоставленными*, если один из них можно перекроить в другой (то есть разрезать на части, переложив которые, можно получить другой).

0. Докажите, что:

(a) треугольник можно перекроить в параллелограмм с таким же основанием;

(b) параллелограмм, у которого высота падает на основание, можно перекроить в прямоугольник с таким же основанием;

(c) треугольник можно перекроить в прямоугольник с таким же основанием.

00. Докажите, что если из одного многоугольника можно сделать второй, а из второго — третий, то из первого можно сделать третий.

Теорема Бойяи-Гервина. Любые два равновеликих выпуклых многоугольника равносоставлены.

1. Если из одного многоугольника можно сделать второй, а из второго — третий, то из первого можно сделать третий.

2. Любой многоугольник можно разрезать на треугольники.

3. Любой треугольник можно перекроить в параллелограмм.

4. Из любого параллелограмма можно сделать параллелограмм, одна сторона которого — большая, а другая маленькая.

5. Из параллелограмма, одна сторона которого большая, а другая — маленькая можно сделать параллелограмм со стороной 1.

6. Из параллелограмма со стороной 1 можно сделать параллелограмм, высота которого падает на эту сторону, а не на ее продолжение.

7. Из параллелограмма со стороной 1, у которого высота, опущенная на эту сторону, падает внутрь этой стороны, а не на ее продолжение, можно сделать прямоугольник со стороной 1.

8. Из любого треугольника можно сделать прямоугольник со стороной 1.

9. Из любого многоугольника можно сделать прямоугольник со стороной 1.

10. Любые два равновеликих многоугольника равносоставлены.

Для самостоятельного решения

11. Нарисуйте, как перекроить произвольный треугольник в равнобедренный треугольник.

12. **(a)** В выпуклом многоугольнике есть две параллельные стороны. Разрежьте его на трапеции и параллелограммы.

(b) Разрежьте многоугольник (не обязательно выпуклый) на треугольники, трапеции и параллелограммы.

(c) Докажите, что любые два равновеликих (не обязательно выпуклых) многоугольника равносоставлены.

Индукция-2. 16 июля

1. На доске в ряд написаны числа 1, 1. За ход между соседними числами на доске вписывается их сумма. Докажите, что после хода номер n сумма всех чисел на доске будет равняться $3^n + 1$.

Пусть требуется доказать некоторое утверждение для любого натурального n*. Метод* математической индукции *заключается в следующих двух шагах:*

1. **1. (База индукции)** *Проверка утверждения для* $n = 1$*.*
2. **2. (Индукционный переход)** *Доказательство того, что из справедливости утверждения для* n *следует его справедливость для* $n + 1$*.*

2. Докажите, что следующее равенство верно для любого n :

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

3. Докажите, что число $111\ldots111$ (3^n единиц): **(a)** делится на 3^n; **(b)** не делится на 3^{n+1}.

4. Докажите, что при каждом натуральном n, начиная с 3, существует выпуклый n-угольник, имеющий ровно три острых угла.

5. Торт разрезали прямолинейными разрезами на несколько кусков. Оказалось, что одна сторона у ножа была грязная. Докажите, что всегда найдется хотя бы один чистый кусок.

6. На лестнице нарисованы стрелочки. На одной из ступеней стоит человек. Он идет со ступеньки в ту сторону, в которую указывает стрелочка, после чего стрелочка на ступеньке, с которой он сошел, обращается в противоположную сторону. Докажите, что когда-нибудь человек покинет лестницу.

7. У каждого целого числа от $n+1$ до $2n$ включительно (где n — натуральное) возьмем наибольший нечетный делитель и сложим все эти делители. Какое число получится?

8. Докажите *неравенство Бернулли:* $x \geqslant -1$, n — натуральное число. Тогда $(1+x)^n \geqslant 1 + n \cdot x$.

Для самостоятельного решения

9. Найдите сумму: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n!$

10. Найдите произведение: $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

11. На кольцевом шоссе стоят несколько автомобилей с общим запасом бензина, достаточным, чтобы объехать весь круг. Докажите, что можно сесть в один из автомобилей и проехать все шоссе, забирая по дороге бензин у остальных автомобилей.

12. Число $x + \frac{1}{x}$ — целое. Докажите, что число $x^n + \frac{1}{x^n}$ — тоже целое для любого n.

Касательная. 17 июля

0. (a) Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны.

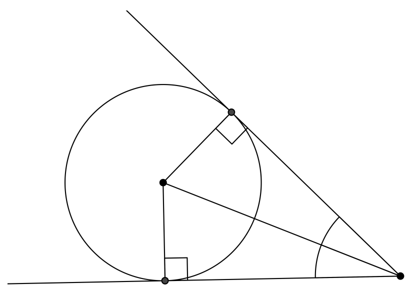


Рисунок 1

Определение. *Четырехугольник называется* описанным около окружности*, если каждая его сторона касается этой окружности.*

(b) Суммы противолежащих сторон четырёхугольника, описанного около окружности, равны.

(c) Суммы сторон описанного чётноугольника, взятых через одну, равны. Например, для шестиугольника $ABCDEF$ верно: $AB + CD + EF = BC + DE + FA$.

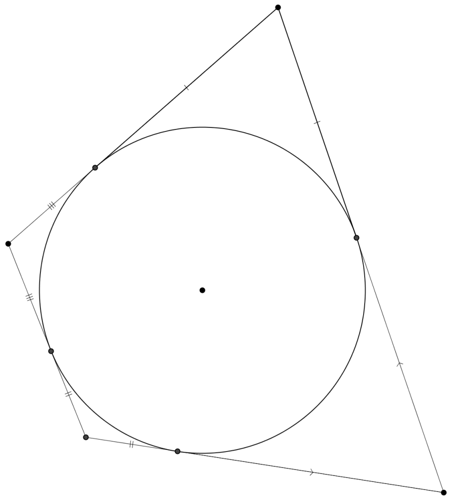


Рисунок 2

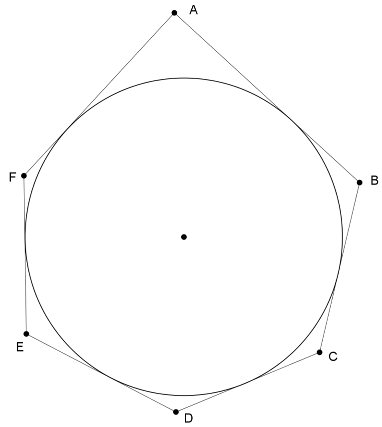


Рисунок 3

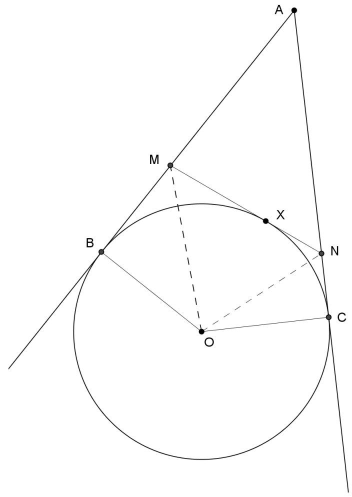


Рисунок 4

1. (a) Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4.

(b) Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c.

2. Прямые AB и AC — касательные в точках B и C к окружности с центром в точке O. Через произвольную точку X дуги BC проведена касательная к окружности, пересекающая отрезки AB и AC в точках M и N соответственно. Докажите, что периметр треугольника AMN и величина угла MON не зависят от выбора точки X.

3. (a) В треугольнике со сторонами a, b и c вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке K. Найти длину отрезка AK.

(b) В треугольнике со сторонами a, b и c найдите длину отрезка касательной AK, если K — точка касания вневписанной окружности со стороной AB.

4. Стороны пятиугольника в порядке обхода равны $5, 6, 10, 7, 8$. Доказать, что в этот пятиугольник нельзя вписать окружность.

5. К окружности, вписанной в треугольник ABC, проведены три касательные. Периметры отсеченных треугольников равны $6, 8, 10$. Найдите периметр данного треугольника.

6. Около окружности описан многоугольник, площадь которого равна 5. Его периметр равен 10. Найдите радиус этой окружности.

7. В четырёхугольнике $ABCD$ $AB = BC, AD = 3, DC = 5$. Окружности, вписанные в треугольники ABD и CBD касаются отрезка BD в точках M и N соответственно. Найти длину отрезка MN.

Для самостоятельного решения

8. Докажите, что точки касания вписанной и вневписанной окружности со стороной треугольника симметричны относительно середины этой стороны.

9. В четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность. Окружности, вписанные в треугольники ABD и CBD имеют радиусы R и r соответственно. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

Матбой-М6-М7. 17 июля

1. Сумма двух двузначных чисел равна 68. Если к большему из них приписать справа меньшее, то полученное четырёхзначное число будет на 2178 больше того четырёхзначного числа, которое получится, если к меньшему приписать справа большее. Найдите эти числа.

2. Матбой начался между 10 и 11 часами, когда часовая и минутная стрелки были направлены в противоположные стороны, а закончился между 16 и 17 часами, когда стрелки совпали. Сколько времени продолжался матбой?

3. На плоскости отмечено несколько точек, не лежащих на одной прямой. На каждой точке написано число. Известно, что сумма чисел на любой прямой, проходящей через 2 и более точек, равна нулю. Докажите, что все числа равны 0.

4. Имеется хромая ладья, которая может ходить на любое количество клеток, но если она сходила налево, то потом идет вниз, если вниз, то потом направо, если направо, то потом вверх, если вверх, то потом налево. Найти все такие m и n, что хромая ладья может обойти все клетки доски $m \times n$, побывав (остановившись) на каждой клетке ровно один раз.

5. На Петиной чаше двухчашечных весов лежат гири весом 1г, 3г,..., 2001г, а на Васиной чаше — 2г, 4г,..., 2002 г. Первым ходит Вася — он убирает по одной гире со своей чаши до тех пор, пока она не станет легче Петиной. Потом Петя убирает по одной гире со своей чаши до тех пор, пока она не станет легче Васиной. Затем опять ходит Вася, потом Петя, и так далее. Выигрывает тот, кто первым сможет убрать все гири со своей чаши. Кто может обеспечить себе победу и как ему нужно для этого играть?

6. Четверо преподавателей шли в корпус из буфета. Каждый их них запасся шоколадками — Саша купил на 5 шоколадок больше, чем Лёша, а Ира — на 7 больше, чем Егор. У входа в корпус их встретила Валя и конфисковала все шоколадки у двоих самых запасливых. Сколько всего шоколадок закупили преподаватели в буфете, если Валя конфисковала 15 штук?

7. Делится ли на 5 количество упорядоченных пятёрок натуральных чисел $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ таких, что $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = \frac{1}{67}$?

8. В королевстве Логрия живут рыцари. Любые два из них враждуют (например, сэр Гавейн враждует с сэром Ланселотом), дружат, или вовсе друг к другу безразличны. Друг врага рыцаря — враг этого рыцаря. Докажите, что хотя бы у одного рыцаря врагов больше, чем друзей.

Матбой-M7-M8. 17 июля

1. Когда в остроугольном треугольнике ABC провели высоты AD и BE, оказалось, что $S_{BDE} \leqslant S_{DEA} \leqslant S_{EAB} \leqslant S_{ABD}$. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.

2. В Эрафии водятся Лазурные, Кристаллические, Ржавые и Сказочные драконы. Известно, что Лазурный сильнее Кристаллического, Кристаллический — Ржавого, а Ржавый — Сказочного. Два героя набрали себе по 100 драконов каждый. Если первый будет составлять пары сражающихся драконов, то сможет гарантировать себе n побед. Столько же побед сможет гарантировать себе второй герой, если составлять пары будет он. Найдите наибольшее значение n.

3. В квадрате со стороной 1 лежат пять непересекающихся квадратов со сторонами, параллельными сторонам большого квадрата. Докажите, что сумма их периметров не превосходит 10.

4. Клетки таблицы 100×100 покрашены в красный и синий цвет. Известно, что если в строке есть хотя бы одна синяя клетка, то ровно половина клеток этой строки — красные, а если в столбце есть хотя бы одна красная клетка, то ровно половина клеток этого столбца — синие. Докажите, что количество синих клеток в таблице равно количеству красных.

5. В некотором клубе состоит 100 джентльменов, у каждого из которых не более трёх знакомых в этом клубе. Среди любых четырёх джентльменов какие-то двое незнакомы. Докажите, что из клуба можно исключить 33 джентльмена таким образом, чтобы из любых троих оставшихся в клубе джентльменов какие-то двое не были знакомы.

6. Известно, что a, b и $(a+b)/(a-b)$ — целые числа, а дробь a/b несократима. Докажите, что либо $ab+1$, либо $4ab+1$ — квадрат целого числа.

7. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде $p(q-r)$, где p, q, r — простые числа.

8. Существует ли четырехугольник у которого можно изменить положение любой вершины, оставив три другие на месте так, чтобы получившиеся четыре точки служили бы вершинами четырехугольника, равного исходному?

Бином Ньютона. 19 июля

1. Сколько слагаемых будет после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в выражениях:

(a) $(a+b+c+d+e)(f+g+h)$;

(b) $(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)(1+e)(1+f)(1+g)(1+h)$;

(c) $(a+b)^{10}$.

2. Сколько всего слагаемых получится после раскрытия скобок в выражении $(1+x)^n$ **(a)** без приведения подобных слагаемых; **(b)** после приведения подобных слагаемых?

3. В выражении $(a+b)^{13}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Какой коэффициент получится при: **(a)** b^{13}; **(b)** a^4b^5; **(c)** a^2b^{11}; **(d)** a^7b^6.

4. Какой коэффициент получится при слагаемом вида a^kb^{n-k} после раскрытия скобок в выражении $(a+b)^n$?

Теорема *(бином Ньютона)*:

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^ka^{n-k}b^k + \dots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^nb^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k$$

5. Выведите формулу бинома Ньютона по индукции.

6. Запишите в виде суммы:

(a) $(x+1)^n$; **(b)** $(a-b)^6$; **(c)** $(a-b)^n$.

7. Докажите следующие свойства *биномиальных коэффициентов*, используя бином Ньютона:

(a) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$;

(b) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^nC_n^n = 0$.

8. **(a)** Пусть p — простое число. Докажите, что если $1 \leqslant k \leqslant p-1$, то $C_p^k \,\vdots\, p$.

(b) Докажите, что если p — простое число, то $(n+1)^p \underset{p}{\equiv} n^p + 1^p$.

(c) Докажите малую теорему Ферма: если p — простое число, то $n^p \underset{p}{\equiv} n$.

9. Определить степень бинома $(3a-2)^n$, если известно, что коэффициент при a^2 в разложении этого бинома равен 216.

10. На сколько нулей оканчивается число $11^{100} - 1$?

Для самостоятельного решения

11. Почему равенства $11^2 = 121$ и $11^3 = 1331$ похожи на строчки треугольника Паскаля? Чему равно 11^4?

12. В разложении $(x+y)^n$ по формуле бинома Ньютона второй член оказался равен 240, третий — 720, четвёртый — 1080. Найдите x, y и n.

ГМТ-1. 19 июля

1. Дан отрезок AB. Найдите как можно больше треугольников ABC таких, что: **(a)** угол BAC треугольника равен $30°$; **(b)** высота CH треугольника равна h; **(c)** медиана CM равна m; **(d)** угол ACB равен $90°$; **(e)** треугольник ABC - равнобедренный.

Определение. Геометрическим местом точек (ГМТ) плоскости, удовлетворяющих условию f, называется фигура F, состоящая из всех точек плоскости M, для которых это условие выполняется.

$\star$ ГМТ, равноудаленных от концов отрезка, — серединный перпендикуляр к этому отрезку.

$\star$ ГМТ, из которых данный отрезок виден под прямым углом, — окружность без двух точек.

$\star$ ГМТ, равноудаленных от данной точки, — окружность.

2. Даны точки A и B. Найдите ГМТ таких, что: **(a)** $AM < BM$; **(b)** $AM + BM = AB$.

3. Даны точки A и B. Найдите все такие точки M плоскости, что: **(a)** расстояние от M до каждой из двух точек A, B меньше длины отрезка AB; **(b)** расстояние от M до какой-нибудь из двух точек A, B меньше длины отрезка AB.

4. Даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек C, что треугольник ABC **(a)** прямоугольный; **(b)** остроугольный; **(c)** тупоугольный.

5. Найдите ГМТ, равноудаленных **(a)** от двух данных прямых; **(b)** от трех данных прямых. Не забудьте рассмотреть все случаи.

6. Дан квадрат $ABCD$. Найдите ГМТ, которые расположены ближе к центру квадрата, чем к любой его вершине.

7. Дан квадрат $ABCD$. Найдите геометрическое место точек таких, что сумма расстояний от каждой из них до прямых AB и CD равна сумме расстояний до прямых BC и AD.

8. Найдите ГМ внутренних точек прямоугольника $ABCD$ таких, что $S_{ABM} + S_{CDM} = S_{AMD} + S_{BCM}$.

Для самостоятельного решения

9. Найдите ГМ внутренних точек трапеции $ABCD$ (BC и AD — основания) таких, что $S_{ABM} = S_{CDM}$.

10. Дан треугольник ABC. Найдите ГМТ таких, что $S_{ABM} = S_{BCM}$.

11. Дан отрезок AB. Найдите фигуру, образованную всеми точками C плоскости, для которых B — второй по величине угол треугольника ABC (если два меньших угла или все три угла треугольника равны, то вторым по величине считается каждый из них).

Теорема Чевы. 20 июля

1. В треугольнике ABC точка M принадлежит стороне AB, точка K — отрезку CM, причём $AM : MB = n : m$. Найдите отношение площадей: **(a)** $S_{ACM} : S_{BCM}$; **(b)** $S_{AKM} : S_{BKM}$; **(c)** $S_{ACK} : S_{BCK}$.

2. Найдите ГМ внутренних точек K в треугольнике ABC таких, что отношение площадей треугольников ACK и BCK равно $n : m$.

3. В треугольнике ABC точка M принадлежит стороне AB, точка K — стороне AC. Отрезки CM и BK пересекаются в точке P, $BM : MA = 5 : 3$, $AK : KC = 7 : 10$. Найдите, в каком отношении луч AP делит сторону BC.

Пусть на сторонах AB, BC *и* CA *треугольника* ABC *взяты соответственно точки* C_1, A_1, B_1.

Утверждение 1. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Утверждение 2. Выполнено равенство $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$.

Теорема Чевы. Утверждения 1 и 2 эквивалентны.

4. Выведите из утверждения 1 утверждение 2.

5. Выведите из утверждения 2 утверждение 1.

6. Используя теорему Чевы, докажите, что в произвольном треугольнике пересекаются в одной точке:

(a) медианы;

(b) отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанной окружности;

(c) прямые, проходящие через вершины треугольника и делящие периметр треугольника пополам.

Для самостоятельного решения

7. Пусть AK биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $\frac{BA}{AC} = \frac{BK}{KC}$.

8. Выведите из теоремы Чевы, что биссектрисы пересекаются в одной точке.

9. Теорема Ван-Обеля. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1, B_1. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке K. Докажите, что $\frac{AK}{KA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B}$.

Диофантовы уравнения. 20 июля

1. Докажите следующие утверждения:

(a) Если c не делится на (a, b), то уравнение $ax+by = c$ не имеет решений.

(b) Если $(a, b) = 1$, то уравнение $ax + by = c$ имеет решения в целых числах.

(c) Если $(a, b) = 1$ и (x_0, y_0) — решение уравнения, то пары $(x_0 + b, y_0 - a)$, $(x_0 + 2b, y_0 - 2a)$, $(x_0 + 3b, y_0 - 3a), \ldots$, а также пары $(x_0 - b, y_0 + a)$, $(x_0 - 2b, y_0 + 2a)$, $(x_0 - 3b, y_0 + 3a), \ldots$ являются решениями нашего уравнения.

(d) Если $(a, b) = 1$ и (x_0, y_0) — решение уравнения $ax + by = c$, то любое его решение имеет вид $(x_0 + kb, y_0 - ka)$ при каком-то целом k.

(e) Если уравнение $ax + by = c$ имеет решение в целых числах, то для ровно одного из значений $x_0 = 0, 1, 2, \ldots, b - 2, b - 1$ существует y_0, в паре с которым x_0 образует решение.

2. Решите в целых числах уравнения:

(a) $9x + 15y = 4$;

(b) $-21x + 9y = 3$.

3. При каких целых x число $8x + 3$ делится на 13?

4. Сколько можно купить на 100 монет петухов, кур и цыплят, если всего надо купить 100 птиц, причём петух стоит 5 монет, курица — 4, а 4 цыплёнка – одну монету?

5. Школьники ходили купаться на реку через большой песчаный пляж. Шедший последним Степа аккуратно провел на песке две черты, перпендикулярных направлению движения ребят, на расстоянии 10 метров друг от друга, и насчитал между ними ровно 559 следов. Сколько семиклассников ходило на реку, если известно, что длина шага каждого из них составляет 55 см?

6. Из гаража выехал Толя, который через каждые 59 метров оставляет красное масляное пятно. Следом за ним едет Ваня, который оставляет зеленые пятна каждые 97 метров. Если начальное расстояние между машинами составляло 10 метров, могут ли пятна оказаться на расстоянии 1 метр так, что:

(a) красное пятно будет впереди;

(b) зеленое пятно будет впереди.

Для самостоятельного решения

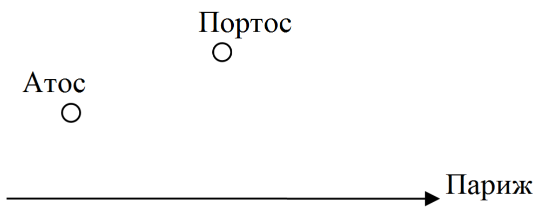
7. **(a)** Найдите все целые решения уравнения: $2003x - 2014y = 3$.

(b) Найдите все целые решения уравнения: $2007x + 2015y = 2003$.

8. Существуют ли решения в натуральных числах у уравнения $3^{100}x - 2^{100}y = 2014$?

ГМТ-2. Построения. 21 июля

0. Вышедшие в отставку Атос и Портос обосновались в собственных поместьях недалеко от Парижа. Их друг д'Артаньян, по-прежнему находящийся на службе королю, хотел бы построить дом у дороги, ведущей в Париж. Но так, чтобы расстояния до поместий его друзей были одинаковы. Как выбрать место для постройки дома? Всегда ли это возможно?



1. На чертеже изображена окружность, но центр её не обозначен. Постройте центр.

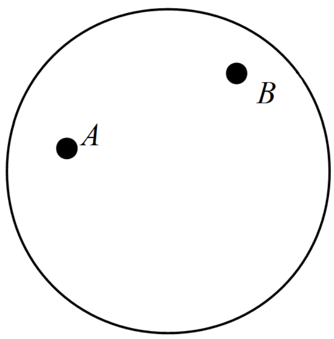
2. На чертеже изображена окружность и точка вне этой окружности. Постройте касательную к окружности, проходящую через данную точку.

3. Дан треугольник ABC. Постройте равнобедренный треугольник ABM $(AB = BM)$, равновеликий данному треугольнику.

4. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и радиусу вписанной окружности.

5. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, проведённой к гипотенузе.

6. Во время экспедиции археологи обнаружили развалины средневековой крепости. Сохранились очертания глубокого рва, которым была обнесена крепость, и минимальные элементы каменной кладки на двух смежных сторонах каменной стены. Помогите археологам восстановить очертания крепостной стены, если она представляла собой прямоугольник, вписанный в окружность-ров.



Для самостоятельного решения

7. Дан угол и точка M. Постройте прямую, проходящую через точку M и отсекающую от угла треугольник данного периметра.

8. Через вершину данного выпуклого четырёхугольника проведите прямую, делящую его на две равновеликие части.

Основная теорема арифметики. 21 июля

0. При помощи теоремы о линейном представлении НОД докажите, что если a, b, c - целые, $ab \vdots c$ и $(b, c) = 1$, то $a \vdots c$.

1. *(Основная теорема арифметики)* Докажите следующие утверждения:

(a) если p — простое число, a и b — целые, и ab делится на p, то либо a, либо b делится на p.

(b) Для каждого целого $n > 1$ найдутся такие простые $p_1, \ldots, p_k$, что $n = p_1 \ldots p_k$.

(c) *(каноническое разложение)* Для каждого целого $n > 1$ найдутся такие различные простые $p_1, \ldots, p_k$ и натуральные $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, что $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$

(d) разложения из пунктов **(b)** и **(c)** единственны с точностью до порядка сомножителей.

2. Найдите количество различных делителей числа $p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$.

3. Найдите количество различных делителей чисел:

(a) 100500;

(b) C_{20}^{10}.

4. Сколько существует различных натуральных чисел, в записи которых нет единиц, с произведением цифр, равным 1980? А 2000?

5. Можно ли в произведении $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 50!$ вычеркнуть один из множителей-факториалов так, чтобы оставшееся произведение оказалось квадратом целого числа?

6. Пусть $a \cdot b = c^n$ и $(a, b) = 1$. Обязательно ли $a = x^n$ и $b = y^n$ для некоторых целых x и y?

7. Собственным делителем натурального числа называется любой его делитель, отличный от 1 и самого этого числа. Натуральное число называется *удивительным*, если самый большой его собственный делитель на 1 больше, чем квадрат самого маленького собственного делителя. Найдите все удивительные числа и докажите, что других нет.

Для самостоятельного решения

8. Назовем четное число n чётнопростым, если n не раскладывается в произведение двух четных чисел. (Например, 6 — чётнопростое, а 12 — нет.) Какие пункты задачи 1 будут верны, если заменить в условии целые числа на четные, а простые — на четнопростые?

9. **(a)** Произведение пяти последовательных делится на 120.

(b) Произведение n последовательных делится на $n!$

10. Может ли оказаться целым число $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$?

Графы по индукции. 22 июля

0. Докажите по индукции, что в дереве с n вершинами ровно $n-1$ ребро.

1. В некоторой стране каждый город соединен с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдется город, из которого можно добраться в любой другой.

2. В графе степень любой вершины не более 100. Докажите, что вершины графа можно раскрасить в 101 цвет так, чтобы никакие две вершины одного цвета не были бы соединены ребром.

3. В группе из n человек, говорящих на разных языках, любые трое могут общаться (возможно, один переводит двум другим). Доказать, что их можно разбить на пары, в каждой из которых имеется общий язык для **(a)** $n = 4$; **(b)** $n = 100$.

4. В одном государстве 100 городов и каждый соединен с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно поменять направление движения на одной дороге так, чтобы от любого города можно было доехать до любого другого.

5. В стране N городов. Между любыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнет путешествие, и маршрут так, что ему придется поменять вид транспорта не более одного раза.

6. N человек не знакомы между собой. Нужно так познакомить друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трёх людей не оказалось одного и того же числа знакомых. Докажите, что это можно сделать при любом N.

Для самостоятельного решения

7. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым из остальных одну партию. Докажите, что участников можно занумеровать так, что окажется, что ни один участник под номером n не проиграл участнику под номером $n+1$.

8. В стране некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что нет трех городов, попарно соединенных дорогами. Кроме того, для любых n дорог найдется город, из которого выходят хотя бы две из них. Докажите, что города можно так разбить на n округов, чтобы любая дорога соединяла города из различных округов.

Ошибки в доказательствах. 22 июля

Найдите ошибку в каждом доказательстве.

1. Утверждение: Число 1делится на 3.

Доказательство: Докажем, что $1 \equiv 0$ по модулю 3:
$1 \equiv 4 \Rightarrow 2^1 \equiv 2^4 \Rightarrow 2 \equiv 16 \Rightarrow 2 \equiv 1 \Rightarrow 2-1 \equiv 1-1 \Rightarrow 1 \equiv 0$.

2. Утверждение: Через любые n точек на плоскости можно провести прямую.

Доказательство: При $n = 1$ и $n = 2$ теорема справедлива (в силу известной аксиомы геометрии). Остаётся доказать теорему для n, больших, чем 2. Допустим, что теорема справедлива при некотором $n = k$, и покажем, что в этом случае она будет сохранять силу и при $n = k+1$. Итак, пусть произвольно заданы $(k+1)$ точек $M_1, M_2, \ldots, M_k, M_{k+1}$. В силу предположения индукции через k точек $M_1, M_2, \ldots, M_k$ проходит некоторая прямая l. В силу того же предположения через k точек $M_2, \ldots, M_k, M_{k+1}$ также проходит некоторая прямая l'. Эти две прямые имеют по крайней мере две общие точки M_2 и M_k. Но две точки определяют единственную прямую. Поэтому прямые l и l' должны совпадать. Следовательно, прямая l, проходящая через точки $M_1, M_2, \ldots, M_k$, проходит и через точку M_{k+1}. Утверждение доказано.

3. Утверждение: $2 = 1$.

Доказательство: $2 = -2 \to 4-6 = 1-3 \to 4-6+9/4 = 1-3+9/4 \to (2-3/2)^2 = (1-3/2)^2 \to 2-3/2 = 1-3/2 \to 2 = 1$.

4. Утверждение: Треугольники равны по двум сторонам и углу не между ними.

Доказательство: Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых равны две стороны: $AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$, а также $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. Построим треугольник AEC, равный $A_1B_1C_1$, так, чтобы точки B и E были по разные стороны от прямой AC. Треугольник ABE – равнобедренный, поэтому $\angle AEB = \angle ABE$. Поэтому и $\angle BEC = \angle CBE$. Значит, треугольник BCE равнобедренный и $BC = CE$. Треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle AEC$ равны по трем сторонам. Следовательно, и $ABC = A_1B_1C_1$.

5. Утверждение: Любое натуральное число больше 2014.

Доказательство: Предположим, что есть натуральное число, не превышающее 2014. Тогда пусть m – наименьшее такое число. Тогда все числа меньшие m не подходят под это условие. Из этого следует что, например, $m-1 > 2014$.

Значит, $m > 2015 > 2014$. Противоречие с предположением. Значит, любое натуральное число больше 2014.

6. Утверждение: 1 – корень уравнения $x^2 + x + 1 = 0$

Доказательство: Равенство 1: $x \cdot (x+1) = -1$. Равенство 2: $x + 1 = -x^2$. Подставляем второе равенство в первое: $x \cdot (-x^2) = -1$, тогда $x^3 = 1$, и $x = 1$

7. Утверждение: Все треугольники – равнобедренные.

Доказательство: Докажем, что для любого треугольника $\triangle ABC$ верно $AB = AC$ (см. рис. 1):

(a) Проведём биссектрису угла $\angle A$. Отметим точку D – середину BC.

(b) От точки D к BC проведём перпендикуляр. Пусть он пересечёт биссектрису в точке O.

(c) Проведём перпендикуляр OR к AB, и OQ – перпендикуляр к AC.

(d) Проведём отрезки OB и OC.

(e) Прямоугольные треугольники $\triangle RAO$ и $\triangle QAO$ равны, так как $AO = AO$; $\angle OAQ = \angle OAR$ так как AO делит угол $\angle A$ пополам; углы $\angle ARO$ и $\angle AQO$ – прямые.

(f) Прямоугольные треугольники $\triangle ODB$ и $\triangle ODC$ тоже равны ($\angle ODB, \angle ODC$ – прямые; $OD = OD; BD = CD$ так как OD делит BC пополам)

(g) Поэтому треугольники $\triangle ROB$ и $\triangle QOC$ тоже равны ($RO = QO$ так как $\triangle RAO \cong \triangle QAO$; $BO = CO$ так как $\triangle ODB \cong \triangle ODC$; $\angle ORB$ и $\angle OQC$ – прямые).

(h) Поэтому $AR = AQ, RB = QC$, и $AB = AR - RB = AQ - QC = AC$.

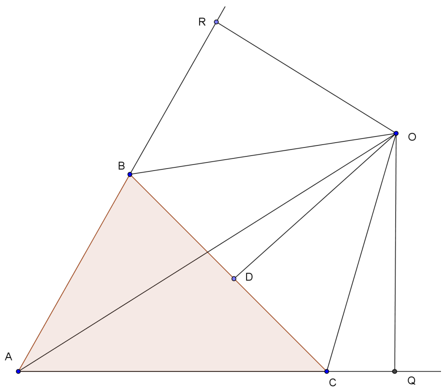


Рисунок 1

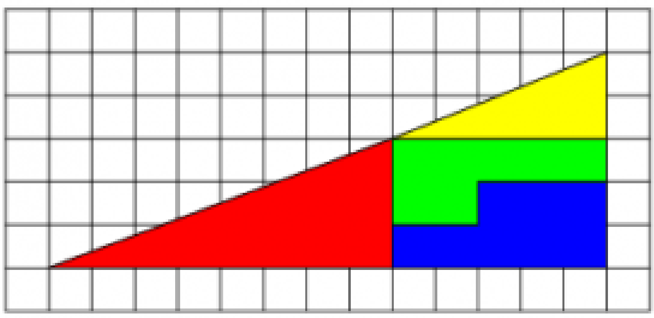


Рисунок 2

8. Утверждение: Площадь фигуры, составленной из меньших, не всегда равна сумме площадей частей.

Доказательство: Контрпример – на картинке (см. рис. 2). Площадь большой фигуры – это $\frac{13 \cdot 5}{2} = 32,5$ клеточек. Площадь большего из треугольников $\frac{8 \cdot 3}{2} = 12$ клеточек, меньшего $\frac{5 \cdot 2}{2} = 5$ клеточек, верхнего шестиугольника – 7 клеточек, нижнего – 8 клеточек. Но $12 + 5 + 7 + 8 = 32$ клеточки, что не равно $32,5$.

Регата. 22 июля

1 **тур: время** - 10 **минут (каждая задача стоит** 6 **баллов).**

1. Найдите все простые числа p меньше 100 такие, что любая перестановка цифр p снова будет простым числом.

2. В треугольнике ABC медианы CM и BN пересекаются в точке K. Площадь четырёхугольника $AMKN$ меньше площади четырёхугольника $BMNC$ на 43. Найти площадь треугольника ABC.

3. Двое по очереди выписывают на доску цифры семизначного числа. Первый своим ходом может написать 2 или 8, а второй - 1, 4 или 9. Первый хочет, чтобы полученное число делилось на 6. Может ли второй ему помешать?

2 **тур: время** - 15 **минут (каждая задача стоит** 7 **баллов).**

4. Существует ли четное трехзначное число, которое в семнадцать раз больше суммы своих цифр?

5. В треугольнике отметили точку на одной из сторон. Затем соединили ее с противоположной вершиной. Оказалось, что среди пяти полученных отрезков четыре равны 1. Найдите углы треугольника.

6. Двое по очереди ломают шоколадку 3×4 по линиям бороздок. Если после очередного хода образовались дольки 1×1, то игрок, который делал ход, их съедает. Каждый стремится съесть как можно больше шоколада. Может ли первый игрок съесть вдвое больше второго?

3 **тур: время** - 20 **минут (каждая задача стоит** 8 **баллов).**

7. Про целые числа a,b,c известно, что $a + bc = b + ac = c + ab$. Найдите их.

8. В треугольнике ABC H - точка пересечения высот AA_1 и BB_2. $AH = BC$. Найдите $\angle BAC$.

9. На доске написаны числа $1, 2, \dots, 4n+1$. Двое по очереди выбирают два записанных числа и заменяют на модуль их разности. Первый игрок хочет, чтобы последнее число, оказавшееся на доске, было равно 0. Может ли второй ему помешать?

4 **тур: время** - 25 **минут (каждая задача стоит** 9 **баллов).**

10. Решите в целых числах: $n^2 - 12 = m(m+1)$.

11. В треугольнике ABC $\angle B = 20^\circ$ $\angle C = 40^\circ$ Длина биссектрисы AM равна 2. Найдите разницу длин AB и BC.

12. У Феди и Лёши есть доска 11×9 (9 столбцов, 11 строк). Сначала Федя произвольным образом разбивает эту доску на 33 полоски 1×3. Затем Лёша вписывает в каждую клетку одно из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы сумма чисел в каждой полоске 1×3 была равна 5. Если сумма чисел в каждом из 9 столбцов - простое число, то Лёша выигрывает. В противном случае выигрывает Федя. Кто из игроков может обеспечить себе победу?

Критерии:

1. Потеря каждого ответа - минус 1 балл.

2. Ответ без обоснования - 3 балла.

3. Явная стратегия без обоснования - 4 балла.

4. Нет критериев.

5. Потеря невозможного случая - минус 3 балла.

6. Нет критериев.

7. Потеря симметричности ответа (с обоснованием) - минус 1 балл. Потеря одного из существенных ответов (с обоснованием) - 4 балла. Правильный ответ без обоснования - 2 балла. Ответ с ошибкой и только - 1 балл. Логическая ошибка в решении с правильным ответом - 5 баллов.

8. Потеря случая - минус 4 балла.

9. Нет критериев.

10. Только правильный ответ - 2 балла. Частично правильный ответ - 1 балл. Решение с потерей двойственных решений по обоим аргументам - 3 балла. Решение с потерей двойственных решений по первому аргументу - 6 баллов. Решение с потерей двойственных решений по второму аргументу - 5 баллов.

11. Нет критериев.

12. Нет критериев.

Ответы:

13. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97.

14. 103.2.

15. Да.

16. Нет.

17. 30, 60, 90.

18. Да.

19. (n, n, n), $(n,1,1)$, $(1, n, 1)$, $(1, 1, n)$.

20. 45 или 135.

21. Да.

22. (12, 11), (-12, 11), (12, -12), (-12, -12).

23. 2.

24. Лёша.

Заключительная олимпиада. 23 июля

1. *Найдите все такие пары простых чисел* $p > q$, *что* $p+q+1$ *делится на* $p-q$.

Решение: Заметим, что если оба числа p и q нечётны, то $p+q+1$ — нечётно, а значит не может делиться на чётное число $p-q$. Следовательно, p и q имеют разную чётность, поэтому одно из них равно 2. Не умаляя общности можно считать, что $p+3$ делится на $p-2$, откуда 5 делится на $p-2$. Получаем, что $p=2$ или $p=7$ (случай с q аналогичен).

Ответ: $(2,3); (2,7); (3,2); (7,2)$.

2. *Десятиметровое бревно распилили на* 4 *части длиной* 1, 2, 3, 4 *метра (считая слева направо). Затем сделали ещё несколько дополнительных распилов. После этого оказалось, что теперь каждый кусочек стал длиннее, чем его правый сосед. Какое наименьшее количество брёвнышек могло получиться?*

Решение: Оценка: каждое брёвнышко, получившееся из куска длины 2 метра, меньше метра. Тогда их не менее трёх. Значит, длина самого правого из них меньше $\frac{2}{3}$ метра. Бревно длины 3 метра распиливали на брёвнышки длины менее $\frac{2}{3}$ метра. Поэтому их не менее, чем $3 : \frac{2}{3} = 4.5$. То есть, хотя бы 5. Аналогично бревно длины 4 метра распиливали на брёвнышки длины менее $\frac{3}{5}$ метра. То есть их хотя бы 7. Итого брёвнышек не менее, чем $1+3+5+7=16$.

Пример: делаем распилы точно по границам из оценки. Затем будем уменьшать левые брёвнышки за счёт правых с выполнением требуемых условий (сначала во втором бревне, затем в третьем чуть больше и в четвертом ещё чуть больше).

Ответ: 16.

3. *В треугольнике* ABC *отрезок* AM — *медиана. Пусть* P — *середина* AM, *а точка* E — *точка пересечения прямой* CP *со стороной* AB. *Известно, что* $BM = BP$. *Докажите, что* $AE = PE$.

Решение: Заметим, что $\angle APB = 180^\circ - \angle MPB = 180^\circ - \angle BMP = \angle CMP$ в силу свойств смежных углов и равнобедренного треугольника. Тогда треугольники APB и PMC равны по первому признаку. Отсюда $\angle EAB = \angle PCM = \angle APE$ (по свойству вертикальных углов). Тогда получаем, что в треугольнике APE углы, прилежащие к стороне AP равны, поэтому $AP = AE$.

4. *В ряд выписали несколько натуральных чисел (не обязательно различных). Затем под каждым числом подписали, сколько раз оно встречается в этом ряду. Получился второй ряд чисел. По нему таким же образом построили третий ряд, и т. д. Докажите, что на некотором шаге получатся два идущих подряд одинаковых ряда.*

Решение: Предположим, что чисел сначала было N. Заметим, что после первого шага на доске появятся несколько групп одинаковых чисел от 1 до N (порядок чисел мы не принимаем во внимание), т.е. не более N групп чисел. Каждая группа одинаковых чисел на следующем шаге опять же заменяется на группу одинаковых чисел, равных их количеству.

Предположим, что на каком-то шаге все новые числа в группах получились различные. Это означает, что ни одно число после этого не изменится и условие задачи будет выполнено. Если же в двух или более группах получились одинаковые числа, то количество групп просто уменьшится на 1 или более. Так как групп после первого шага не более N, то не более чем через N шагов мы придём к ситуации с группами попарно различных размеров.

5. *Клетки таблицы $n \times n$ раскрашены в белый и чёрный цвета так, что из четырёх угловых клеток таблицы три — белые и одна — чёрная. Докажите, что в таблице есть квадрат 2×2, в котором нечётное число белых клеток.*

Решение: Просуммируем количества белых клеток во всех квадратах 2×2. Каждая неугловая клеточка посчитана 2 или 4 раза, а угловая — 1 раз. Поэтому общая сумма получится нечетной. С другой стороны, если предположить, что в каждом квадрате 2×2 белых клеток четное число, то сумма окажется четной — противоречие.

Решение: Предположим, что в каждом квадратике 2×2 четное количество белых клеточек. Тогда индукцией несложно показать, что в четырех углах любого прямоугольника будет четное количество белых клеточек. Это противоречит условию.

6. *На плоскости отмечены 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что существует не более 90 равнобедренных треугольников с вершинами в отмеченных точках.*

Решение: Заметим, что равнобедренных треугольников с фиксированным основанием не более 2. Действительно, все вершины этих треугольников лежат на одной прямой — серединному перпендикуляру к основанию. Так как любой равнобедренный треугольник имеет хотя бы одно основание, получаем, что их не более $2 \cdot C_{10}^2 = 90$.

7. *В треугольнике ABC на стороне AB выбраны точки K и L так, что $AK = BL$ (и K лежит между A и L), а на стороне BC — точки M и N так, что $CN = BM$ (и N лежит между C и M). Докажите, что $KN + LM \geqslant AC$.*

Решение: Пусть точка X такова, что $BNXL$ — параллелограмм. Тогда NX перелельно и равно BL, а значит, и AK; аналогично LX параллельно и равно CM. Отсюда $CMLX$ и $AKNX$ — параллелограммы, поэтому $LM + KN = CX + AX \geqslant AC$.

8. *В сенате n сенаторов. Известно, что некоторые сенаторы между собой в ссоре. Проверено, однако, что как бы мы не посадили их всех или любую группу (3 или более) из них по кругу, найдётся пара соседей не в ссоре. Весь сенат усадили за круглый стол. Если два соседа не в ссоре, они могут поменяться местами. Докажите, что сенаторы могут расположиться в любом круговом порядке (порядки, полученные поворотом, не различаются).*

Решение: Докажем индукцией по числу сенаторов. База. Для трех сенаторов есть только два круговых порядка. Они получаются друг из друга пересадкой двух соседей, которые не в ссоре. Шаг индукции. Найдется сенатор А, который в ссоре не более чем с одним сенатором (иначе часть сенаторов можно будет рассадить по кругу так, что у каждого соседями будут враги). Пусть Б в ссоре с А (а если А дружит со всеми, то Б — любой другой). По предположению индукции, если А уйдет из-за стола, то есть способ рассадить оставшихся в нужном круговом порядке. Однако это можно сделать и при наличии А. Придвинем А к Б (это можно сделать) и попросим А и Б взяться за руки. Считая эту пару сенатором Б, рассадим всех в нужном порядке вышеуказанным способом. Теперь можно А посадить на нужное место, последовательно «отодвигая» его от Б.

Вопросы к зачёту. 27 июля

Геометрия

1. Площадь. Определение. Площадь треугольника. [1]

2. Площадь параллелограмма, трапеции. [1]

3. Задача о делении параллелограмма на три равновеликие части. Задача о сумме расстояний от внутренней точки до сторон правильного многоугольника. [2]

4. Задача о кляксах. Примеры применения. [2]

5. Движения площадей. Примеры. [2]

6. Параллелограмм Вариньона. Свойство его площади. [2]

7. Теорема Бойяи–Гервина: формулировка и схема доказательства. Задача о разрезании любого (в том числе, невыпуклого) многоугольника на треугольники, параллелограммы и трапеции. [3]

8. Задача о выпуклых ломаных, соединяющих отрезок, где одна находится внутри другой. Оценка суммы длин диагоналей выпуклого четырехугольника. [3]

9. Задача о главных диагоналях. [3]

10. Определение ГМТ. Примеры ГМТ. Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под прямым углом. Задача о прямоугольном, остроугольном, тупоугольном треугольнике. [2]

11. Свойство четырёхугольника, описанного около окружности. [1]

12. Построение касательной к данной окружности, проходящей через данную точку вне окружности. Задача о прямой, делящей данный выпуклый четырёхугольник на две равновеликие части. [1]

13. Теорема Чевы, задачи о пересечении различных отрезков в одной точке. [2]

14. Теорема Ван-Обеля. [2]

15. Свойство биссектрисы об отношении отрезков, на которые она делит противоположную сторону. Пересечение биссектрис в одной точке через теорему Чевы. [2]

Комбинаторика и теория графов

16. Графы. Циклы. Лемма о существовании цикла в графе. Понятие связности. Компоненты связности. [2]

17. Деревья. Два определения. Свойства. Остовное дерево. Существование остовного дерева. [2]

18. В графе степень любой вершины не более n. Докажите, что вершины графа можно раскрасить в $n+1$ цвет так, чтобы никакие две вершины одного цвета не были бы соединены ребром. [1]

19. Доказать тождество $C_n^k = C_n^{n-k}$ двумя способами – алгебраически и путём комбинаторных рассуждений. [1]

20. Доказать тождество $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ двумя способами – алгебраически и путём комбинаторных рассуждений. [1]

21. Доказать тождество $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$ двумя способами – алгебраически и путём комбинаторных рассуждений. [1]

22. Доказать тождество $C_n^0 \cdot C_n^k + C_n^1 \cdot C_n^{k-1} + \ldots + C_n^k \cdot C_n^0 = C_{2n}^k$. [2]

23. Придумать и записать задачу, моделирующую формулу:

$$C_n^k = C_{n-2}^k + 2 \cdot C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2}$$

Доказать формулу, решив придуманную задачу. [2]

24. Придумать и записать задачу, моделирующую формулу:

$$C_n^k = C_{n-3}^{k-3} + 3 \cdot C_{n-3}^{k-2} + 3 \cdot C_{n-3}^{k-1} + C_{n-3}^k$$

Доказать формулу, решив придуманную задачу. [2]

25. Придумать и записать задачу, моделирующую формулу:

$$C_m^r \cdot C_m^k = C_k^r \cdot C_{r-k}^{m-k}, 0 \leqslant k \leqslant m \leqslant r$$

Доказать формулу, решив придуманную задачу.[2]

26. Придумать задачу, моделирующую формулу:

$$C_n^0 \cdot C_m^k + C_n^1 \cdot C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k \cdot C_m^0 = C_{m+n}^k$$

Доказать формулу, решив придуманную задачу. [2]

27. Доказать равенство $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1}$. [2]

28. Доказать формулу $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$. [2]

29. Найти сумму чисел n-ой строки треугольника Паскаля. [1]

30. Доказать, что каждое внутреннее число в треугольнике Паскаля равно сумме двух чисел, стоящих над ним. [1]

31. Формулировка и комбинаторное доказательство формулы бинома Ньютона. [1]

32. Вывести формулу бинома Ньютона по индукции. [2]

33. Сколькими способами можно разложить n шаров по m различным ящикам, если **(a)** шары разные; **(b)** шары одинаковые? [1]

34. Сколько решений **(a)** в натуральных; **(b)** в неотрицательных целых числах имеет уравнение $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$? [2]

Теория чисел

35. Два определения сравнения по модулю и их равносильность. [2]

36. Свойства сравнений (с доказательствами). [2]

37. Определение НОД и НОК, нахождение через разложение на простые множители. Взаимно простые числа, взаимно простые в совокупности. [1]

38. Свойства НОД (с доказательствами без использования ОТА). Произведение (a, b) и $[a, b]$. [2]

39. Задача про шоколадку со сторонами a и b. Почему размер самого маленького кусочка равен (a, b)? [2]

40. Алгоритм Евклида, построчная запись и доказательство. [2]

41. Теорема о линейном представлении НОД. Нахождение линейного представления через обратный ход в алгоритме Евклида. [2]

42. Решение диофантовых уравнений с помощью теоремы о линейном представлении НОД. Множество решений диофантового уравнения. [2]

43. Задача об оставляющих пятна автомобилях. [1]

44. Если p – простое число, a и b – целые и $ab \vdots p$, то либо $a \vdots p$, либо $b \vdots p$. [1]

45. Основная теорема арифметики (с доказательством). [3]

46. Количество делителей произвольного натурального числа. [1]

47. Малая теорема Ферма. Доказательство через таблицу умножения остатков по модулю. [2]

48. Малая теорема Ферма. Доказательство через раскраску вершин правильного p-угольника. [3]

49. Малая теорема Ферма. Доказательство через C_p^k. [3]

Разное

50. Простой принцип зацикливания. Оценка периода в задаче о последовательности из последних четырёх цифр квадратов. [1]

51. Составной принцип зацикливания. Задача о президентах. Оценка периода. [2]

52. Инвариант. Задача о секторах. [1]

53. Метод математической индукции. Формулировка метода. Переход от всех предыдущих к следующему (пример). [2]

54. Задача о прямых и окружностях, делящих плоскость (доказательство по индукции). [1]

55. Задача о наборе из k гирек (доказательство по индукции). [2]

56. Неравенство Бернулли. [2]

57. Свойства числовых неравенств. [1]

Серии на зачёт. 27 июля

Серия А на 3+.

1. На дискотеке перед последним танцем каждая девочка танцевала ровно с двумя мальчиками (например, Алина танцевала с Федей и Лёшей). Каждый мальчик танцевал ровно с двумя девочками. Докажите, что можно разделить детей на пары для последнего медленного танца так, чтобы в каждой паре мальчик с девочкой уже танцевали до этого.

2. Докажите, что предпоследняя цифра степени тройки всегда чётна.

3. Докажите, что сумма двух медиан треугольника больше полусуммы двух сторон, к которым эти медианы проведены.

4. Какое число можно прибавить к числу $(n^2-1)^{1000}\cdot(n^2+1)^{1001}$, чтобы результат делился на n?

Серия B на 3+.

1. Докажите, что сумма длин диагоналей выпуклого пятиугольника больше периметра.

2. Доказать, что для любого натурального n верно равенство:

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots-(2n)^2=-n\cdot(2n+1).$$

3. Имеется 17 апельсинов, которые надо разложить в три вазы так, чтобы в первой был хотя бы 1 апельсин, во второй – хотя бы 2, в третьей – хотя бы 3. Сколькими способами это можно сделать?

4. Егор работает летом в кафе. За каждый час ему платят 10 р. и высчитывают 2 р. за каждую разбитую тарелку. На прошедшей неделе он заработал 180 р. Определите, сколько часов он мог работать и сколько тарелок при этом он мог разбить, если известно, что он работает не более 3 ч в день?

Серия C на 3+.

1. Доказать, что для любого натурального n верно равенство:

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2.$$

2. Докажите, что сумма длин диагоналей выпуклого пятиугольника меньше удвоенного периметра.

3. Докажите, что для каждого a, не делящегося на простое p, найдётся такое целое k, что $ak-1$ делится на p.

4. Существует ли граф на 10 вершинах, у которого найдётся два остовных дерева, не имеющих общих рёбер?

Серия D на 3+.

1. Доказать, что для любого натурального n верно равенство:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \ldots + n \cdot (3n-1) = n^2 \cdot (n+1).$$

2. В данный треугольник ABC впишите равнобедренный треугольник MNK с данной высотой h так, чтобы его основание MN было параллельно AC, а точка K лежала на AC.

3. Верно ли при любых натуральных a, b и c равенство: $(a,b,c) \cdot [a,b,c] = abc$?

4. Докажите, что в связном графе можно выбросить одну вершину вместе с выходящими из неё рёбрами так, чтобы связность не нарушилась.

Серия E на 3+.

1. Доказать, что при всех натуральных $n > 1$ верно неравенство: $2^n + 1 < 3^n$.

2. Даны две точки A и B. Найдите геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из точки A на всевозможные прямые, проходящие через точку B.

3. Некоторое число делится на 18, но не делится ни на 4, ни на 27. Докажите, что у этого числа делителей, не делящихся на 6, в два раза больше, чем делителей, делящихся на 6.

4. Из проволоки сделан каркас кубика. Двое играют в игру, делая ходы по очереди. За ход можно разрезать любое ребро каркаса. Проигрывает тот, после чьего хода кубик развалится. Кто выиграет при правильной игре?

Серия F на 3+.

1. Докажите, что в треугольнике со сторонами a, b, c медиана m, проведённая к стороне c, удовлетворяет неравенству $m > \frac{a+b-c}{2}$.

2. Сколькими способами можно для фотографирования поставить в ряд 10 человек в белых футболках и 5 человек в чёрных футболках, чтобы никакие два человека в чёрных футболках не стояли рядом?

3. Назовём число *забавным*, если оно представимо в виде $n \cdot (n+3)$ при каком-то натуральном n. Сколько существует *забавных* чисел, у которых ровно
4 делителя?

4. На доске написано число 1. Каждым ходом число n на доске стирается, и вместо него записывается или $5n$, или $n+4$. Может ли на доске оказаться 2014?

Серия A на 4.

1. Рассмотрим все обыкновенные дроби с числителем 1 и любым натуральным знаменателем $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$. Докажите, что для любого $n > 2$ единицу можно представить в виде суммы n различных дробей такого вида.

2. Найти ГМТ точек M на плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных прямых равна заданному h.

3. Докажите, что среди 51 целого числа найдутся два, квадраты которых дают одинаковые остатки при делении на 100.

4. Назовём ребро *нужным*, если при его удалении граф теряет связность. В графе G ровно два *нужных* ребра. Докажите, что можно добавить ещё одно ребро в граф G так, чтобы *нужных* рёбер не осталось.

Серия B на 4.

1. Биссектрисы углов A, B и C выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в одной точке. Лучи AB и DC пересекаются в точке E, а лучи BC и AD в точке F. Докажите, что у невыпуклого четырёхугольника $AECF$ суммы длин противоположных сторон равны.

2. Придумайте задачу, моделирующую равенство:

$$C_n^0 \cdot C_n^m + C_n^1 \cdot C_{n-1}^{m-1} + \ldots + C_n^m \cdot C_{n-m}^0 = 2^m \cdot C_n^m$$

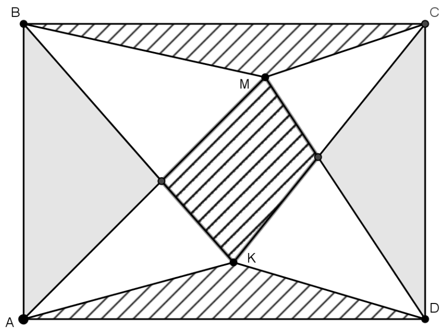
. и докажите его, решив задачу двумя способами.

3. На доске написано число 10^{2014}. Двое играют в такую игру: своим ходом можно либо разложить любое число на два больших единицы сомножителя и выписать их на доску, стерев с доски исходное, либо найти на доске два совпадающих числа и стереть с доски одно из них или оба. Кто не может сделать ход – проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

4. Докажите, что существует 100-значное натуральное число, записываемое только единицами и двойками и делящееся на 2^{100}.

Серия C на 4.

1. Внутри прямоугольника $ABCD$ выбраны точки K и M. Каждая из них соединена со всеми вершинами. Докажите, что площади закрашенной и заштрихованной частей равны.



2. Для целых m и n выполняется равенство: $(m, n) + [m, n] = m + n$. Докажите, что либо m делится на n, либо n делится на m.

3. Есть три программы.

Первая по файлу с числами X и Y создаёт файл с числами $X + 1$ и $Y + 1$.

Вторая по файлу с чётными числами X и Y создаёт файл с числами $\frac{X}{2}$ и $\frac{Y}{2}$.

Третья по двум файлам с числами X, Y и Y, Z создаёт файл с числами X, Z.

Все старые файлы сохраняются. Исходно есть файл с числами 5 и 19. Можно ли с помощью этих программ получить файл с числами 1 и 2014?

4. Докажите, что при некотором натуральном n выполняется неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{1000000}\right)^n > 1000000$$

.

Серия D на 4.

1. Сколькими способами можно для фотографирования поставить в ряд 5 школьников в белых футболках и 10 школьников в чёрных футболках так, чтобы никакие три школьника в чёрных футболках не стояли рядом?

2. Точка A лежит на окружности. Найдите геометрическое место точек M таких, что отрезок AM делится этой окружностью пополам.

3. В лагерь приехало n школьников, некоторые из которых дружат. В первый день Артур Александрович раздал каждому из школьников футболку одного из 10 цветов так, что любые два друга получили футболки разных цветов. В последний день Мария Александровна раздала каждому из школьников ручку одного из 10 цветов так, что любые два школьника, которые не дружат, получили ручки разных цветов. Известно, что за смену никто не подружился. Докажите, что $n \leqslant 100$.

4. Назовём натуральное число n *удобным*, если n^2+1 делится на 1000001. Докажите, что среди чисел $1, 2, \ldots, 1000000$ чётное число *удобных*.

Серия A на 5-.

1. Точка C – середина отрезка AB . На произвольном луче, проведённом из точки C и не лежащем на прямой AB , выбраны три точки P , M и Q так, что $PM = MQ$. Докажите, что $AP + BQ > 2CM$.

2. В клетки таблицы размером 9×9 расставили все натуральные числа от 1 до 81. Вычислили произведения чисел в каждой строке таблицы и получили набор из девяти чисел. Затем вычислили произведения чисел в каждом столбце таблицы и также получили набор из девяти чисел. Могли ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

3. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, 100$. Каждую минуту два числа a, b заменяют на одно число $ab + a + b$. Какое число будет написано на доске в самом конце?

4. На шахматной доске 8×8 расставлено наибольшее возможное число слонов так, что никакие два слона не угрожают друг другу. Доказать, что число всех таких расстановок есть точный квадрат.

Серия B на 5-.

1. Сколько решений в натуральных нечётных числах до 90 имеет уравнение $a + b + c + d = 100$

2. Найти все целые числа n и m такие, что $n^3 - 1001m = 2013$ и $m^3 - 1001n = 2015$.

3. В стране некоторые пары городов соединены дорогами, которые не пересекаются вне городов. В каждом городе установлена табличка, на которой указана минимальная длина маршрута, выходящего из этого города и проходящего по всем остальным городам страны (маршрут может проходить по некоторым городам больше одного раза и не обязан возвращаться в исходный город). Докажите, что любые два числа на табличках отличаются не более, чем в полтора раза.

4. В треугольнике ABC точка I_A - центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC. Докажите, что $BC < AI_A$.

Серия C на 5-.

1. Дан угол и точка внутри него. Проведите через эту точку прямую, отсекающую от него треугольник наименьшей площади.

2. Решить уравнение $3x + 5y + 3z = 61$ в целых числах.

3. $0 < a_1 < a_2 < ... < a_n < 1$. Докажите, что $1-(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n) > a_n$.

4. Сколько решений имеет уравнение $a + b + c + d + e = 100$ в чётных натуральных числах не меньше 10?

На 5. 27 июля

1. (5) Каждую сторону выпуклого четырёхугольника $ABCD$ продлили на её длину по часовой стрелке. Получился квадрат. Докажите, что $ABCD$ - тоже квадрат.

2. (5) Пусть O - центр описанной окружности треугольника ABC. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно, причём $2\angle MON = \angle AOC$. Докажите, что периметр треугольника MBN не меньше стороны AC.

3. (5+) На плоскости отмечены a точек и из каждой торчит по b хвостиков. Играют двое. За один ход игрок соединяет два хвостика линией, не пересекающей уже проведенных линий, ставит на ней точку и выпускает из этой точки два хвостика по разные стороны от линии. Докажите, что независимо от действий игроков, игра закончится через $a + b - 2$ ходов.

4. (5+) В выпуклом n-угольнике провели $2kn + 1$ диагональ. Докажите, что можно выбрать $2k + 1$ диагоналей, составляющих несамопересекающуюся ломаную.

5. (5) Для простых чисел p, q, r и натурального числа n выполнено равенство $p^n + q^n = r^n$. Докажите, что $pqr \,\vdots\, (p + q + r)n$.

Содержание