Когда -1 является квадратом?

Марьванна: «Пусть p — простое число.
Тогда теорема Вильсона утверждает,
что $(p-1)!+1$ делится на p.»
Вовочка: «Я уже доказал! Надо всего лишь
раскрыть скобки: $(p-1)!+1 = p!-1!+1 = p!$.
Очевидно, $p!$ делится на p.»

Фольклор.

1. Докажите, что число x^2+1 не имеет простых делителей вида $4k+3$.

2. *(Теорема Жирара).* Число x^2+y^2 делится на простое число $p = 4k+3$. Докажите, что x и y делятся на p.

3. Докажите, что число x^2+1 не имеет делителей вида $4k+3$.

4. Докажите, что не существует таких натуральных m и n, что $n^2+1 \,\vdots\, m^2-1$.

5. Решите в целых числах уравнение $x^2y^2 = x^2+y^2+z^2$.

6. Докажите, что простых чисел **(a)** вида $4k+3$; **(b)** вида $4k+1$ бесконечно много.

7. *(Теорема Вильсона).* Число $p > 1$ является простым $\Leftrightarrow$ $(p-1)!+1 \,\vdots\, p$.

8. Докажите, что для любого простого p вида $4k+1$ найдётся такое натуральное x, что $x^2+1 \,\vdots\, p$.

Для самостоятельного решения

9. Вася написал в строчку на доске все вычеты по модулю p, каждый ровно по одному разу, в произвольном порядке. Петя сделал то же самое, но строчкой ниже (и, естественно, написал вычеты в другом порядке). Гриша не смог отличиться своей фантазией, и проделал ту же процедуру на третьей строчке. Могло ли оказаться так, что каждое число в третьей строчке является произведением соответствующих двух чисел в первых двух строчках?

10. Число a^2+ab+b^2 делится на простое число $p = 3k+2$. Докажите, что a и b делятся на p.

11. Докажите, что уравнение $4xy-x-y = z^2$ **(a)** не имеет решений в натуральных числах, **(b)** но имеет бесконечно много решений в целых числах.