Заключительная олимпиада. Решения

24 июля

Довывод

1. Айдар Илдарович проводил разбор для трех школьников. Первый школьник услышал решение 15 задач и заснул до конца разбора. Второй школьник услышал 12 задач и заснул до конца разбора, а третий — всего 7 и также уснул. Оказалось, что один из школьников проспал в три раза больше задач, чем другой. А сколько задач проспал оставшийся школьник?

Ответ. 7. **Решение.** Пусть всего Айдар Илдарович рассказал $15+x$ задач. Тогда первый школьник проспал x задач, второй — $x+3$, а третий — $x+8$. По условию, одно из этих чисел в три раза больше, чем другое. Получаем одно из трех равенств $3x = x + 8$, $3x = x + 3$ или $3(x + 3) = x + 8$. Из них решение в целых числах имеет только первое, откуда $x = 4$, значит, оставшийся школьник проспал $4 + 3 = 7$ задач.

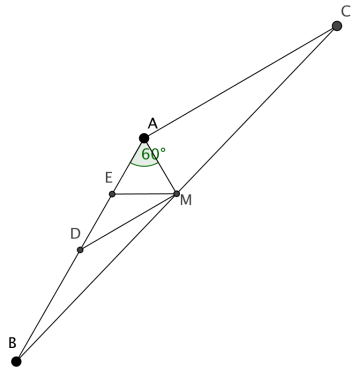
2. Дан клетчатый квадрат 2017×2017. Можно ли заполнить все клетки крестиками и ноликами так, чтобы каждый крестик граничил по стороне ровно с одним ноликом, а каждый нолик — ровно с одним крестиком?

Ответ. Нет, нельзя. **Решение.** Если заполнение существует, то все клетки разбиваются на пары соседних, в одной из которых стоит крестик, а в другой — нолик. Но всего клеток в квадрате нечетное количество, значит, такое невозможно.

3. В треугольнике ABC медиана, проведённая из вершины A, в четыре раза меньше стороны AB и образует с этой стороной угол $60°$. Найдите угол $\angle BAC$.

Ответ. $150°$. **Решение.** Обозначим медиану из вершины A через AM, середину AB — через D, а середину AD — через E. Тогда из условия следует, что $AE = \frac{1}{4}AB = AM$, кроме того, $\angle EAM = 60°$, поэтому треугольник EAM — равносторонний.

Значит, $\angle DEM = 120°$, как смежный с углом в $60°$. Далее, $EM = AE = DE$, поэтому треугольник DEM — равнобедренный, и $\angle EDM = 30°$. Смежный с ним $\angle BDM = 150°$. С другой стороны, этот же угол равен $\angle BAC$, так как DM — средняя линия треугольника ABC, и она параллельна AC.



4. На доске написаны в ряд десять натуральных чисел. Известно, что каждое число больше предыдущего и делится на одно из предыдущих, первое число больше 1, а сумма всех чисел равна 275. Какие числа написаны на доске?

Ответ. 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55. **Решение.** Из условия «каждое число делится на одно из предыдущих» сразу следует, что все числа делятся на первое число n. Тогда и сумма всех чисел делится на n. Наименьший делитель числа 275, не равный 1, равен 5. Поэтому наименьшее значение n равно 5.

Далее заметим, что каждое последующее число хотя бы на n больше предыдущего, а значит минимальная сумма всех чисел равна $n + 2n + \ldots + 10n = 55n$. При $n = 5$ эта сумма равна 275, в противном случае — больше. Более того, чтобы достигалось равенство, каждое из чисел в точности равно n, $2n$, $3n$, $\ldots$, $10n$ соответственно, откуда и ответ.

5. Каждый из 38 попугаев завязал на удаве по одному узлу. Если сложить удава вдвое или втрое, то каждый узел попадет ровно на один другой. Докажите, что если удава сложить вшестеро, то какой-то узел попадет на сгиб.

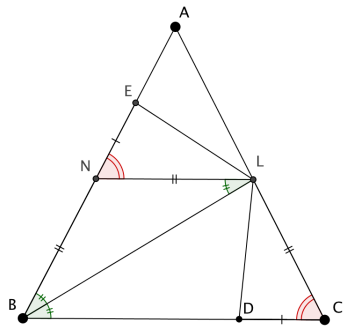
Решение. Пусть узлы A и B накладываются друг на друга при сложении удава втрое. Пусть симметричные им относительно середины узлы — это A' и B'. Очевидно, что при сложении втрое A' и B' совпадают. Заметим, что все узлы не могут разбиться на такие четверки, так как их количество не делится на 4. Поэтому какие то два из данных узлов совпали. Без ограничения общности пусть A совпал с другим узлом. Он не мог совпасть с A' так как тогда был бы ровно посередине. Пусть A совпал с B'. Разделим удава на три равные части. Заметим, что A не может находиться во второй трети, так как иначе B находится там же и они не наложились бы при сложении втрое. Если A находится в первой трети, то B отстоит от A на расстоянии $2/3$ удава, чтобы они совпали при

сложении втрое. А так как A и B симметричны относительно середины, то, значит, A отстоит на расстоянии $1/6$ от края удава.

Вывод

6. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведена биссектриса BL. На BC выбрана точка D, а на боковой стороне AB — точка E так, что $AE = \frac{1}{2}AL = CD$. Докажите, что $LE = LD$.

Решение. Отметим точку N на стороне AB так, чтобы прямая LN была параллельна BC. Тогда из равенства накрест лежащих углов и углов при биссектрисе имеем $\angle NLB = \angle LBC = \angle NBL$, то есть треугольник BNL — равнобедренный. В силу симметричности картинки $NB = LC$ и $AN = AL$, то есть E — середина AN.



Далее, из параллельности LN и BC и равнобедренности треугольника ABC следует равенство $\angle ANL = \angle ABC = \angle LCB$. Из условия равенства трех отрезков имеем $NE = \frac{1}{2}AN = \frac{1}{2}AL = CD$. Поэтому треугольники LDC и LEN равны по двум сторонам и углу между ними, значит, $LE = LD$, что и требовалось.

7. Какое наибольшее число клеток можно отметить на клетчатой доске 300×300 таким образом, чтобы для любого $m > 1$ в любом квадрате $m \times m$ было отмечено не более половины клеток?

Ответ. 40000. **Решение.** *Оценка.* Докажем, что можно отметить не более 40000 клеток. Разобьём квадрат на 10000 квадратов 3×3. Поскольку по условию в каждом квадрате 3×3 можно отметить не более 4 клеток, общее число отмеченных клеток не может превышать 40000.

Пример. Пронумеруем строки и столбцы квадрата числами $0, 1, 2 \ldots, 299$ снизу-вверх и слева-направо. В каждой строке, номер которой кратен 3, отметим клетки, номера столбцов которых не кратны 3. В каждой строке, номер которой не кратен 3, отметим клетки, номера столбцов которых кратны 3. Заметим, что в каждом квадрате 3×3 отмечено ровно 4 клетки, а в каждом прямоугольнике 2×3 или квадрате 2×2 отмечено не более половины клеток. Осталось заметить, что любой квадрат можно разбить на квадраты 3×3, квадраты 2×2 и прямоугольники 2×3, поэтому в них всех тоже не более половины клеток отмечено.

8. Сумма 2017 положительных вещественных чисел, каждое из которых меньше 1, равна 100. При каком наибольшем k эти числа можно гарантированно разбить на k групп так, чтобы сумма чисел в каждой группе была больше 1?

Ответ. 50. *Оценка.* Докажем, что 51 группу гарантированно набрать не сможем. Пусть есть 101 число по $a = \frac{100}{101} - \frac{1}{101000}$. А остальные 1916 чисел равны $b = \frac{1}{1000 \cdot 1916}$. Если образовалась 51 группа, то в одной из них не более одного числа a, а значит сумма в ней не более $a + 1916b < 1$.

Пример. Представим каждое число в виде отрезка соответствующей длины и выложим их в виде отрезка длины 100. Отметим все точки с целыми четными координатами. Сдвинем каждую точку до ближайшего конца отрезка слева. Так как сдвигаем все точки в одну сторону и на расстояние меньше 1, то расстояние между соседними точками будет более 1.