Серия 32, КТО это закончит?

21 июля

1. Китайская теорема об остатках. Пусть числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ попарно взаимно просты. Тогда для любых целых $a_1, a_2, \ldots, a_n$ найдется целое число x такое, что $x \equiv a_i \pmod{m_i}$ для всех i. Более того, x определен однозначно с точностью до прибавления кратного $M = m_1 m_2 \ldots m_n$.

2. Существует ли такое целое n кратное 4, что $n + 4$ кратно 9, а $n + 9$ кратно 25?

3. **(a)** Сколько четырёхзначных чисел подходит под условие $x^2 \equiv x \pmod{10000}$?

(b) Сколько чисел от 1 до n подходит под условие $x^2 \equiv x \pmod{n}$?

4. Докажите, что для каждого натурального n существуют натуральные a и b такие, что $4a^2 + 9b^2 - 1$ делится на n.

5. Докажите, что для каждого натурального n существуют n попарно взаимно простых чисел k_1, k_2, …, k_n, больших 1, таких, что число $k_1 k_2 \ldots k_n - 1$ представляется как произведение двух последовательных натуральных чисел.

6. *Полезное следствие.* Докажите, что для любых попарно взаимно простых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и остатков $r_1, r_2, \ldots, r_n$ по модулям $m_1, m_2, \ldots, m_n$ найдутся n последовательных чисел $a + 1, a + 2, \ldots, a + n$ таких, что $a + i \equiv r_i \pmod{m_i}$.

7. Назовем число *хорошим*, если оно делится на квадрат натурального числа >1. При каких N найдется N последовательных хороших чисел? (Пример для $N = 3$: 48, 49, 50).

8. Докажите, что найдутся 1000 последовательных чисел, каждое из которых не является

(a) простым числом или степенью простого числа;

(b) степенью (не ниже второй) натурального числа.

9. Докажите, что числа натурального ряда можно переставить местами так, чтобы для всех n сумма n первых чисел делилась на n.