

Числа и цвета

1. Все натуральные числа раскрасили в два цвета: желтый и зеленый. Известно, что сумма любых двух различных желтых чисел также является желтым числом. Кроме того, сумма любых двух зеленых чисел также является зеленым числом. Сколько различных раскрасок, удовлетворяющих этому условию, существует?
2. Можно ли раскрасить все натуральные числа в три цвета так, чтобы сумма любых четырех чисел одного цвета имела бы этот же цвет?
3. Докажите, что если все натуральные числа раскрасить в два цвета, то найдутся два числа одного цвета с разностью 20 или 25.
4. Школьник на уроке заскучал и начал красить каждое натуральное число в белый, синий или красный цвет так, чтобы все три цвета присутствовали и выполнялось свойство: цвет суммы любых двух разноцветных чисел не совпадает с цветами слагаемых. Удастся ли ему это сделать?
5. Все натуральные числа, большие единицы, раскрасили в два цвета, синий и красный, так, что сумма каждых двух синих (в том числе одинаковых) синяя, а произведение каждых двух красных (в том числе одинаковых) красное. Известно, что при раскрашивании были использованы оба цвета и что число 1024 покрасили в синий цвет. Какого цвета при этом могло оказаться число 2025?
6. Каждое натуральное число покрашено в оранжевый или фиолетовый цвет. Известно, что в любом наборе из нескольких последовательных чисел количества оранжевых и фиолетовых чисел отличаются не более, чем на 1000. Докажите, что существуют 2000 последовательных чисел, среди которых ровно 1000 фиолетовых и 1000 оранжевых.
7. Натуральные числа раскрашены в семь цветов. Докажите, что существует бесконечно много пар чисел одного цвета с одинаковой разностью.
8. Артем и Катя играют в следующую игру: каждым ходом Артем выбирает натуральное число, которое еще не красили, а Катя красит его в черный или белый цвет по своему усмотрению. Катя хочет, чтобы в некоторый момент между двумя одноцветными числами нашлись 2025 чисел другого цвета. Сможет ли Артем ей помешать?