

# Векторы-1

**Направленным отрезком** называется упорядоченная пара точек на плоскости.

Обозначение. Направленный отрезок с началом в точке  $A$  и концом в точке  $B$  обозначается  $\overrightarrow{AB}$ .

**Теорема.** Направленные отрезки  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  назовем *эквивалентными*, если  $ABDC$  — параллелограмм (возможно, вырожденный). Тогда все направленные отрезки разбиваются на классы, внутри которых любые два отрезка эквивалентны.

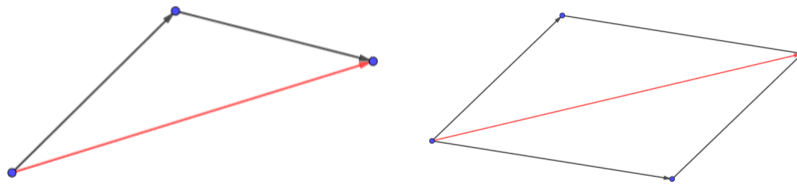
Классы направленных отрезков называются **векторами**.

Векторы называются **коллинеарными**, если соответствующие им направленные отрезки, отложенные от одной точки, лежат на одной прямой.

Если при этом они лежат на одном луче, исходящем из этой точки, то векторы называются **сонаправленными**. Если на разных — **противоположно направленными**.

## Действия с векторами

1. Сложение (правила треугольника и параллелограмма), вычитание.



2. Умножение вектора на число.



## Письменное упражнение

1. Выполните операции с векторами: (a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ; (b)  $\overrightarrow{KL} - \overrightarrow{ML}$ ; (c)  $\overrightarrow{XZ} - 2 \cdot \overrightarrow{YZ}$ , где  $Y$  — середина отрезка  $XZ$ .
2. Нарисуйте три вектора так, чтобы модуль суммы любых двух из них был равен 1, а сумма всех трех была равна нулевому вектору.
3. Пусть  $M$  — середина стороны  $BC$  треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$ .

1. Докажите, что для любых четырех точек  $A, B, C, D$  верно равенство  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ .
2. Выразите вектор  $\overrightarrow{AB}$  через векторы  $\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{BD}$ , где  $ABCD$  – параллелограмм.

Идея 1. Векторы, последовательно отложенные друг за другом и образующие «цикл», в сумме дают  $\vec{0}$ .

Идея 2. Правило треугольника обобщается для нескольких подряд идущих векторов. Иногда полезно представлять вектор как такую сумму.

Идея 3. Иногда помогает двумя способами представить один и тот же вектор как сумму нескольких, сложить все и поделить на два; особенно удобно, если в разных суммах получатся противоположно направленные векторы одинаковой длины (потому что они уничтожатся).

3. В четырехугольнике  $ABCD$  точка  $M$  – середина стороны  $AB$ , а точка  $N$  – середина стороны  $CD$ . Выразите  $\overrightarrow{MN}$  через  $\overrightarrow{BC}$  и  $\overrightarrow{AD}$ .
4. Пусть  $K, L, M$  – середины сторон  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$  соответственно,  $O$  – произвольная точка плоскости. Докажите, что  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OM}$ .
5. В ориентированном графе в каждой вершине начинается столько же ребер, сколько и заканчивается. Если рассмотреть ориентированные ребра как векторы, то чему равна сумма всех векторов?
6. Дана шахматная доска  $2025 \times 2025$ . Из центра каждой черной клетки провели вектор в центр каждой белой клетки. Чему равна сумма всех векторов?
7. Пусть  $M$  и  $N$  – середины отрезков  $AB$  и  $AC$ , точка  $P$  – середина отрезка  $MN$ , точка  $O$  – произвольная точка. Докажите, что  $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OP}$ .
8. Пусть  $E$  и  $F$  – середины сторон  $AB$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$ ,  $K, L, M$  и  $N$  – середины отрезков  $AF, CE, BF$  и  $DE$ . Докажите, что  $KLMN$  – параллелограмм.
9. Точки  $M, K, N, L$  – середины сторон  $AB, BC, CD, DE$  пятиугольника  $ABCDE$ , точки  $P$  и  $Q$  – середины отрезков  $MN$  и  $KL$ . Докажите, что  $PQ \parallel AE$ . Во сколько раз  $AE$  длиннее  $PQ$ ?
10. На плоскости даны векторы, среди которых есть неколлинеарные. Сумма векторов без любого из них коллинеарна оставшемуся. Чему равна сумма всех?

## Векторы-1

**Направленным отрезком** называется упорядоченная пара точек на плоскости.

Обозначение. Направленный отрезок с началом в точке  $A$  и концом в точке  $B$  обозначается  $\overrightarrow{AB}$ .

**Теорема.** Направленные отрезки  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  назовем *эквивалентными*, если  $ABDC$  — параллелограмм (возможно, вырожденный). Тогда все направленные отрезки разбиваются на классы, внутри которых любые два отрезка эквивалентны.

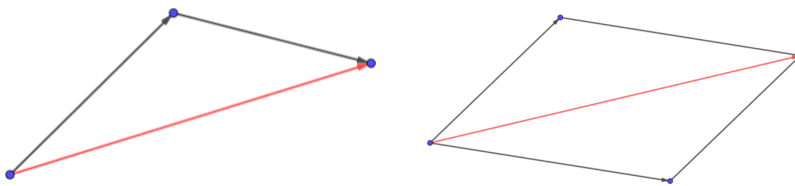
Классы направленных отрезков называются **векторами**.

Векторы называются **коллинеарными**, если соответствующие им направленные отрезки, отложенные от одной точки, лежат на одной прямой.

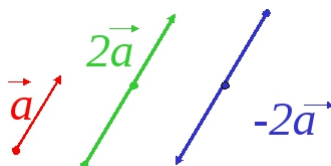
Если при этом они лежат на одном луче, исходящем из этой точки, то векторы называются **сонаправленными**. Если на разных — **противоположно направленными**.

### Действия с векторами

1. Сложение (правила треугольника и параллелограмма), вычитание.



2. Умножение вектора на число.



### Письменное упражнение

1. Выполните операции с векторами: (a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ; (b)  $\overrightarrow{KL} - \overrightarrow{ML}$ ; (c)  $\overrightarrow{XZ} - 2 \cdot \overrightarrow{YZ}$ , где  $Y$  — середина отрезка  $XZ$ .
2. Нарисуйте три вектора так, чтобы модуль суммы каждых двух из них был равен 1, а сумма всех трех была равна нулевому вектору.
3. Пусть  $M$  — середина стороны  $BC$  треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$ .

1. Докажите, что для любых четырех точек  $A, B, C, D$  верно равенство  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ .
2. Выразите вектор  $\overrightarrow{AB}$  через векторы  $\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{BD}$ , где  $ABCD$  – параллелограмм.

Идея 1. Векторы, последовательно отложенные друг за другом и образующие «цикл», в сумме дают  $\vec{0}$ .

Идея 2. Правило треугольника обобщается для нескольких подряд идущих векторов. Иногда полезно представлять вектор как такую сумму.

Идея 3. Иногда помогает двумя способами представить один и тот же вектор как сумму нескольких, сложить все и поделить на два; особенно удобно, если в разных суммах получатся противоположно направленные векторы одинаковой длины (потому что они уничтожатся).

3. В четырехугольнике  $ABCD$  точка  $M$  – середина стороны  $AB$ , а точка  $N$  – середина стороны  $CD$ . Выразите  $\overrightarrow{MN}$  через  $\overrightarrow{BC}$  и  $\overrightarrow{AD}$ .
4. Пусть  $K, L, M$  – середины сторон  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$  соответственно,  $O$  – произвольная точка плоскости. Докажите, что  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OM}$ .
5. В ориентированном графе в каждой вершине начинается столько же ребер, сколько и заканчивается. Если рассмотреть ориентированные ребра как векторы, то чему равна сумма всех векторов?
6. Дана шахматная доска  $2025 \times 2025$ . Из центра каждой черной клетки провели вектор в центр каждой белой клетки. Чему равна сумма всех векторов?
7. Пусть  $M$  и  $N$  – середины отрезков  $AB$  и  $AC$ , точка  $P$  – середина отрезка  $MN$ , точка  $O$  – произвольная точка. Докажите, что  $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OP}$ .
8. Пусть  $E$  и  $F$  – середины сторон  $AB$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$ ,  $K, L, M$  и  $N$  – середины отрезков  $AF, CE, BF$  и  $DE$ . Докажите, что  $KL MN$  – параллелограмм.
9. Точки  $M, K, N, L$  – середины сторон  $AB, BC, CD, DE$  пятиугольника  $ABCDE$ , точки  $P$  и  $Q$  – середины отрезков  $MN$  и  $KL$ . Докажите, что  $PQ \parallel AE$ . Во сколько раз  $AE$  длиннее  $PQ$ ?
10. На плоскости даны векторы, среди которых есть неколлинеарные. Сумма векторов без любого из них коллинеарна оставшемуся. Чему равна сумма всех?