

## Неравенство о средних

**Средним арифметическим**  $n$  чисел называется их сумма, делённая на  $n$ :

$$A(a_1, \dots, a_n) = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

**Средним геометрическим**  $n$  неотрицательных чисел называется корень  $n$ -й степени из их произведения:  $G(a_1, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$ .

1. Среднее арифметическое чисел  $a, b, c, d, e$  равно  $f$ . А чему равно среднее арифметическое чисел  $a, b, c, d, e, f$ ?

2. (а) Александр Михайлович написал на доске  $d + t$  чисел и попросил Машу и Диму найти их среднее арифметическое. Маша и Дима решили поделить работу между собой: Маша нашла среднее первых  $t$  чисел, Дима — последних  $d$  чисел, а потом они нашли среднее арифметическое двух полученных чисел. При каких  $d$  и  $t$  можно быть уверенным, что Маша и Дима получили верный результат? (б) Аналогичный вопрос о средних геометрических.

Для любых  $n$  положительных чисел  $a_1, \dots, a_n$  выполняется **неравенство**

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n},$$

причём равенство достигается только при  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

3. Докажите это неравенство: (а) при  $n = 2$ ; (б) при  $n = 4$ ; (с) при  $n = 3$ .

4. Докажите его для всех натуральных  $n > 1$ .

5. Сумма длин всех рёбер прямоугольного параллелепипеда равна 24 см. Каков его максимальный объём?

6. Докажите, что при положительных  $x$  выполняются неравенства:

(а)  $x + \frac{1}{x} \geq 2$  (сумма двух взаимно обратных чисел); (б)  $x^2 + \frac{2}{x} \geq 3$ .

7. Для положительных  $a, b, c$  докажите неравенства:

(а)  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$ ; (б)  $(a + b + c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$ .

8. Произведение пяти положительных чисел  $a, b, c, d, e$  равно 1. Докажите, что  $(1 + a)(1 + b)(1 + c)(1 + d)(1 + e) \geq 32$ .

9. Найдите минимальное значение следующих выражений при  $x > 0$ :

(а)  $x^n + \frac{n}{x}$ ; (б)  $x^2 + \frac{8}{x}$ ; (с)  $\frac{x^4}{9} + x^2 + \frac{54}{x} + \frac{729}{x^4}$ .

10. **Средним гармоническим** нескольких чисел  $a_1, \dots, a_n$  называется такое число  $H$ , что  $\frac{1}{H} = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$ , то есть обратное к среднему арифметическому обратных. Докажите, что среднее гармоническое нескольких положительных чисел не больше их среднего геометрического.

С учётом последней задачи неравенство о средних можно записать так:

$$H(a_1, \dots, a_n) \leq G(a_1, \dots, a_n) \leq A(a_1, \dots, a_n).$$