

## Массы

**Материальной точкой**  $(M, m)$  называется пара из точки плоскости  $M$  и ненулевого числа  $m$ , а само  $m$  называется **массой** материальной точки.

**Центром масс** системы материальных точек  $(M_1, m_1), \dots, (M_n, m_n)$  с ненулевой суммой масс называется такая точка  $Z$ , для которой имеет место равенство:

$$m_1 \overrightarrow{ZM_1} + \dots + m_n \overrightarrow{ZM_n} = \vec{0}.$$

**Основная теорема.** Если точка  $Z$  является центром масс системы материальных точек  $(M_1, m_1), \dots, (M_n, m_n)$  с ненулевой суммой масс, то для любой точки  $O$  справедливо равенство:

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{m_1 \overrightarrow{OM_1} + \dots + m_n \overrightarrow{OM_n}}{m_1 + \dots + m_n}$$

Обратно, если для некоторой точки  $O$  выполняется это равенство, то точка  $Z$  — центр масс данной системы материальных точек.

**Следствие.** Для конечной системы материальных точек центр масс определяется однозначно.

**Правило рычага.** Центр масс  $Z$  двух материальных точек  $(M_1, m_1)$  и  $(M_2, m_2)$  расположен на прямой  $M_1M_2$ .

**Правило группировки.** Пусть дана система материальных точек  $(M_1, m_1), \dots, (M_n, m_n)$ , точка  $O_k$  — центр масс системы, состоящей из первых  $k$  точек. Тогда центр масс всей системы совпадает с центром масс системы материальных точек  $(O_k, m_1 + \dots + m_k), (M_{k+1}, m_{k+1}), \dots, (M_n, m_n)$ .

**Идея.** Если разделить точки на две группы и рассмотреть центры масс обеих групп, то центр масс всей системы будет лежать на прямой, их содержащей. Если сделать это еще раз, но по-другому, то узнаем, что центр масс лежит на какой-то другой прямой. Тогда центр масс всей системы — это пересечение полученных прямых.

## Массы. Задачи

**Упражнение.** Найдите центр масс треугольника, в вершинах которого расположены одинаковые массы.

1. Пусть  $ABCD$  — выпуклый четырехугольник,  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$ . Докажите, что точка пересечения отрезков  $KM$  и  $LN$  является серединой этих отрезков, а также отрезка, соединяющего середины диагоналей четырехугольника.
2. Даны точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , никакие три из них не коллинеарны.  $M$ ,  $N$  — середины отрезков  $AB$  и  $CD$  соответственно,  $K$  — середина отрезка  $MN$ .  $P$  — точка пересечения медиан треугольника  $BCD$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $K$ ,  $P$  коллинеарны.
3. Через каждую вершину треугольника проведены две прямые, делящие противоположную сторону треугольника на три равные части. Докажите, что диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, образованного этими прямыми, пересекаются в одной точке.
4. На сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  взяты точки  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  соответственно, такие что  $AK : KB = DM : MC = a$  и  $BL : LC = AN : ND = b$ . Пусть  $P$  — точка пересечения отрезков  $KM$  и  $LN$ . Докажите, что  $NP : PL = a$  и  $KP : PM = b$ .
5. Во время ЛМШ-2023 Александр Михайлович зарыл клад среди 2023 деревьев в лагере. После этого он написал капсулу времени на следующую смену, в которой указал, как искать клад: надо встать к первому дереву, пройти половину расстояния до второго дерева, затем повернуть к третьему и пройти треть расстояния до него, и т.д. К сожалению, Александр Михайлович забыл указать, как занумерованы деревья : ( Какое минимальное количество попыток нужно, чтобы гарантированно найти клад Александра Михайловича?
6. На окружности выбрали  $k$  точек. Докажите, что все прямые, проходящие через центр масс  $k - 2$  точек и перпендикулярные хорде, проходящей через две оставшиеся точки, пересекаются в одной фиксированной точке.
7. Какие массы нужно поместить в вершины треугольника со сторонами  $a$ ,  $b$  и  $c$ , чтобы центр полученной системы материальных точек оказался в:
  - (а) точке пересечения биссектрис;
  - (б) точке Нагеля (точке пересечения отрезков, соединяющих вершину треугольника с точкой касания вневписанной окружности противоположной стороны — заодно докажите, что она существует);
  - (с) ортоцентре.