

Множества

В математике понятие множества не определяется.

Под *множеством* понимается набор каких-либо объектов (*элементов*).

Опр. Множество называется *пустым* (пишут: \emptyset), если в нем не содержится ни одного элемента.

Опр. Если объект x принадлежит множеству A , то пишут $x \in A$.

Опр. Если любой элемент множества A принадлежит множеству B (т.е. $x \in A \Rightarrow x \in B$), то A является *подмножеством* множества B (пишут: $A \subset B$).

Опр. Множества *совпадают* ($A = B$), если состоят из одних и тех же элементов.

Упр. Для произвольных множеств A, B, C выполнено: (a) $\emptyset \subset A$;

(b) $A \subset A$ (рефлексивность отношения \subset);

(c) $A \subset B, B \subset A \Rightarrow A = B$ (антисимметричность \subset);

(d) $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (транзитивность \subset).

Способы задания множеств.

(a) Перечислить все элементы множества.

(b) Указать, откуда брать элементы, и какому свойству они должны удовлетворять. Такое свойство называется *характеристическим*. «Исходное» множество, из которого мы берем элементы, называется *универсальным*¹.

Примеры. (a) Множество из четырех элементов: $A = \{1, 2, B, x\}$;

(b) Множество чётных натуральных чисел: $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x : 2\}$;

(c) Множество решений уравнения: $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 7 = 0\}$.

Упр. Задайте множество через характеристическое свойство: (a) множество $\{1, 3, 5, \dots\}$; (b) отрезок $[-12; 1,5]$; (c) луч $[-12; +\infty)$; (d) окружность с центром в точке O и радиусом 3; (e) серединный перпендикуляр к отрезку AB .

Опр. *Объединение* (сумма) множеств A и B ($A \cup B$) есть множество элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A или B , т.е.: $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in B$. Иначе: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Опр. *Пересечение* множеств A и B есть множество $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Опр. *Разность* множеств A и B есть множество $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Опр. Пусть U – универсальное множество. Тогда *дополнением* множества A называется множество $\bar{A} = U \setminus A$.

Упр. Докажите, что: (a) $A \cup B = B \cup A$; (b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

(c) $A \cup \bar{A} = U$; (d) $A \cap \bar{A} = \emptyset$; (e) $\bar{\bar{A}} = A$; (f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

(g) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Упр. Имеется множество A , состоящее из n элементов. Сколько в нем: (a) подмножеств из k элементов; (b) всего подмножеств?

¹Universum (лат.) – вселенная.

Множества. Задачи

1. Изобразите на декартовой плоскости множества точек (x, y) , удовлетворяющих соотношениям:

- $x^2 + y^2 \leq 25$;
- $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + 7y = 25; \end{cases}$
- $(x^2 + y^2 - 25)(x + 7y - 25) = 0$;
- $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25, \\ x + 7y \geq 25; \end{cases}$
- дополнение множества из предыдущего пункта.

2. Решите следующую задачу и запишите её условие на языке множеств:

«В некотором царстве живут маги, чародеи и волшебники. Про них известно следующее: во-первых, не все маги являются чародеями, во-вторых, если волшебник не является чародеем, то он не маг. Правда ли, что не все маги — волшебники?»

3. Решите уравнение: $\sqrt{x-3} + \sqrt{3-x} = 1$.

4. Как известно, для чисел верно следующее соотношение на сумму и разность: $a + (b - c) = (a + b) - c$.

Верно ли аналогичное соотношение для множеств: $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$?

5. Докажите, что:

- (a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
- (b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
- (c) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
- (d) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
- (e) $B \subset A \Leftrightarrow B \cup A = A$;
- (f) $B \subset A \Leftrightarrow B \cap A = B$.

6. Имеется множество C , состоящее из n элементов. Сколькими способами можно выбрать в C два подмножества A и B так, чтобы: (a) множества A и B не пересекались; (b) множество A содержалось бы в множестве B ?

7. В М-8 образовались компании школьников так, что для любых двух компаний A и B (не обязательно различных) $\overline{A \cup B}$ — тоже компания. Докажите, что для любых двух компаний A и B компанией также является и $A \cup B$.

8. В классе организуется турнир по перетягиванию каната. В турнире ровно по одному разу должны участвовать всевозможные команды, которые можно составить из учащихся этого класса (кроме команды всего класса). Докажите, что каждая команда учащихся будет соревноваться с командой всех остальных учащихся класса. *Попробуйте решить задачу как можно большим количеством способов.*