

## Разные неравенства

**Идея 1. Раскрыть скобки (или разложить на множители).**

1. Положительные числа  $a, b, c$  таковы, что  $a \geq b \geq c$  и  $a+b+c \leq 1$ . Докажите, что  $a^2 + 3b^2 + 5c^2 \leq 1$ .
2. Докажите, что если  $a + b + c + d = 0$ , то  $ab + bc + cd + da + ac + bd \leq 0$ .
3. Известно, что  $ab - 1 < a - b, ac - 1 < a - c$ . Докажите, что  $bc + 1 > b + c$ .

**Идея 2. Замена переменных.**

4. Числа  $x, y, z$  больше 1. Докажите, что  $xy + yz + xz < 2xyz + 1$ .

**Идея 3. Нарушение симметрии.** Иногда задача выглядит симметричной (то есть переменные входят в условие равноправно), но для решения полезно выбрать, например, наибольшую из них.

5. Положительные числа  $a, b, x, y$  таковы, что  $ab \geq ax + by$ . Докажите, что  $x + y$  не превосходит наибольшего из чисел  $a$  и  $b$ .

**Идея 4. Между нулём и единицей.** Что происходит с числом  $x \in (0; 1)$  при возведении в квадрат?

6. Пусть  $x, y \in [0, 1]$ . Докажите, что  $x + y \geq 2xy$ .
7. Докажите, что если  $x, y \in (0, 1)$ , то  $\frac{x}{x+y^2} + \frac{y}{y+x^2} > 1$ .
8. Положительные числа  $a, b$  и  $c$  таковы, что  $a^2 < b, b^2 < c, c^2 < a$ . Какое максимальное количество из них может быть больше 1?
9. Пусть  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$ . Найдите все такие значения  $a$ , для которых верно равенство  $f(f(f(f(a)))) = a$ .
10. Положительные числа  $a, b, c, d$  таковы, что  $(a+b+2c)^2 > d, (b+c+2d)^2 > a, (c+d+2a)^2 > b, (d+a+2b)^2 > c$ . Докажите, что  $a + b + c + d > \frac{1}{4}$ .
11. Существуют ли такие 2025 различных натуральных чисел, что сумма каждых 2024 из них не меньше квадрата оставшегося?
12. Положительные числа  $x, y$  и  $z$  таковы, что  $x + y + z = 1$ . Докажите неравенство

$$\frac{xy}{\sqrt{z+xy}} + \frac{yz}{\sqrt{x+yz}} + \frac{zx}{\sqrt{y+zx}} \leq \frac{1}{2}.$$

## Разные неравенства

**Идея 1. Раскрыть скобки (или разложить на множители).**

1. Положительные числа  $a, b, c$  таковы, что  $a \geq b \geq c$  и  $a+b+c \leq 1$ . Докажите, что  $a^2 + 3b^2 + 5c^2 \leq 1$ .
2. Докажите, что если  $a + b + c + d = 0$ , то  $ab + bc + cd + da + ac + bd \leq 0$ .
3. Известно, что  $ab - 1 < a - b, ac - 1 < a - c$ . Докажите, что  $bc + 1 > b + c$ .

**Идея 2. Замена переменных.**

4. Числа  $x, y, z$  больше 1. Докажите, что  $xy + yz + xz < 2xyz + 1$ .

**Идея 3. Нарушение симметрии.** Иногда задача выглядит симметричной (то есть переменные входят в условие равноправно), но для решения полезно выбрать, например, наибольшую из них.

5. Положительные числа  $a, b, x, y$  таковы, что  $ab \geq ax + by$ . Докажите, что  $x + y$  не превосходит наибольшего из чисел  $a$  и  $b$ .

**Идея 4. Между нулём и единицей.** Что происходит с числом  $x \in (0; 1)$  при возведении в квадрат?

6. Пусть  $x, y \in [0, 1]$ . Докажите, что  $x + y \geq 2xy$ .
7. Докажите, что если  $x, y \in (0, 1)$ , то  $\frac{x}{x+y^2} + \frac{y}{y+x^2} > 1$ .
8. Положительные числа  $a, b$  и  $c$  таковы, что  $a^2 < b, b^2 < c, c^2 < a$ . Какое максимальное количество из них может быть больше 1?
9. Пусть  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$ . Найдите все такие значения  $a$ , для которых верно равенство  $f(f(f(f(a)))) = a$ .
10. Положительные числа  $a, b, c, d$  таковы, что  $(a+b+2c)^2 > d, (b+c+2d)^2 > a, (c+d+2a)^2 > b, (d+a+2b)^2 > c$ . Докажите, что  $a + b + c + d > \frac{1}{4}$ .
11. Существуют ли такие 2025 различных натуральных чисел, что сумма каждых 2024 из них не меньше квадрата оставшегося?
12. Положительные числа  $x, y$  и  $z$  таковы, что  $x + y + z = 1$ . Докажите неравенство

$$\frac{xy}{\sqrt{z+xy}} + \frac{yz}{\sqrt{x+yz}} + \frac{zx}{\sqrt{y+zx}} \leq \frac{1}{2}.$$