

Метод Штурма

Фамилию Штурм носили по крайней мере два математика: француз Жак Шарль Франсуа Штурм (1803–1855) и немец Фридрих Отто Рудольф Штурм (1841–1919). Нам не удалось установить, кому из них принадлежит этот метод.

Сближение

Упр. Пусть даны два положительных числа a и b . Возьмём два таких числа a' и b' , что $a' + b' = a + b$ и $a', b' \in (a, b)$ (то есть *сблизим* a и b). Тогда $a'b' > ab$.

Упр. Среди прямоугольников с равным периметром площадь больше у того, который ближе к квадрату.

- В тех же условиях ($a' + b' = a + b$ и $a', b' \in (a, b)$) сравните выражения: (а) $a^2 + b^2$ и $a'^2 + b'^2$; (б) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ и $\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'}$; (с) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ и $\sqrt{a'} + \sqrt{b'}$.
- Теперь наоборот: пусть два положительных числа a и b сблизил так, что их произведение не изменилось. Увеличатся или уменьшатся следующие выражения: (а) $a + b$; (б) $a^2 + b^2$; (с) $a^3 + b^3$; (д) $a^4 + b^4$?
- У двух мониторов совпадает диагональ, но один из них более вытянутый, а второй «более квадратный». У какого монитора больше площадь? А периметр?

Метод Штурма

Пусть переменных больше двух. На каждом шаге возьмём две «крайних» переменных и сблизим их так, чтобы одна из характеристик (например, сумма) не менялась. Важно, чтобы процесс сближения был конечным (в конце процесса все переменные становятся равными).

Упр. Даны числа 1, 5, 9, 14, 21; их среднее арифметическое равно 10. На каждом шаге берём наибольшее и наименьшее из чисел a и b и заменяем их на 10 и $a + b - 10$. Следим за тем, как изменяется их произведение.

Упр. Для n неотрицательных чисел с данной суммой произведение максимально, когда все они равны.

Липа №1. Пусть есть неравные числа. Будем по очереди брать произвольные два числа a и b и заменять их на $\frac{a+b}{2}$. В результате сумма не меняется, а произведение увеличивается. В конце концов придём к ситуации, когда числа равны, а произведение увеличилось. Значит, для равных чисел оно больше, чем для неравных.

Липа № 2. Пусть максимальное произведение достигается для неких значений переменных a_1, \dots, a_n . Если какие-то два из них не равны, то можно сблизить их между собой, и произведение увеличится — противоречие.

Метод Штурма. Задачи

4. В графе 77 вершин. Какое максимальное число рёбер в нём может быть, если он (a) двудольный; (b) «трёхдольный»; (c) «семидольный»?
5. Докажите неравенство $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ при $n > 1$.
6. Докажите методом Штурма, что *среднее квадратическое* неотрицательных чисел не меньше их среднего арифметического:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

7. Пусть $x_1 + \dots + x_n = 1$. Докажите, что $\frac{(1-x_1)\dots(1-x_n)}{x_1\dots x_n} \geq (n-1)^n$.
8. Докажите, что если все $x_i \geq 1$, то

$$\frac{1}{1+x_1} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}.$$

9. Пусть сумма положительных чисел x , y и z равна 1. Докажите, что

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

10. Сумма пяти двузначных чисел равна 333. При каких значениях чисел сумма их квадратов максимальна?
11. Рассмотрим всевозможные n -угольники, вписанные в данную окружность.
- (a) Докажите, что если среди них есть многоугольник наибольшей площади, то он правильный.
- (b) Докажите, что правильный n -угольник действительно имеет наибольшую площадь среди всех вписанных в окружность.
- (c) Докажите, что чем больше n , тем больше площадь правильного n -угольника, вписанного в окружность.

Метод Штурма

Фамилию Штурм носили по крайней мере два математика: француз Жак Шарль Франсуа Штурм (1803–1855) и немец Фридрих Отто Рудольф Штурм (1841–1919). Нам не удалось установить, кому из них принадлежит этот метод.

Сближение

Упр. Пусть даны два положительных числа a и b . Возьмём два таких числа a' и b' , что $a' + b' = a + b$ и $a', b' \in (a, b)$ (то есть *сблизим* a и b). Тогда $a'b' > ab$.

Упр. Среди прямоугольников с равным периметром площадь больше у того, который ближе к квадрату.

- В тех же условиях ($a' + b' = a + b$ и $a', b' \in (a, b)$) сравните выражения: (а) $a^2 + b^2$ и $a'^2 + b'^2$; (б) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ и $\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'}$; (с) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ и $\sqrt{a'} + \sqrt{b'}$.
- Теперь наоборот: пусть два положительных числа a и b сблизили так, что их произведение не изменилось. Увеличатся или уменьшатся следующие выражения: (а) $a + b$; (б) $a^2 + b^2$; (с) $a^3 + b^3$; (д) $a^4 + b^4$?
- У двух мониторов совпадает диагональ, но один из них более вытянутый, а второй «более квадратный». У какого монитора больше площадь? А периметр?

Метод Штурма

Пусть переменных больше двух. На каждом шаге возьмём две «крайних» переменных и сблизим их так, чтобы одна из характеристик (например, сумма) не менялась. Важно, чтобы процесс сближения был конечным (в конце процесса все переменные становятся равными).

Упр. Даны числа 1, 5, 9, 14, 21; их среднее арифметическое равно 10. На каждом шаге берём наибольшее и наименьшее из чисел a и b и заменяем их на 10 и $a + b - 10$. Следим за тем, как изменяется их произведение.

Упр. Для n неотрицательных чисел с данной суммой произведение максимально, когда все они равны.

Липа №1. Пусть есть неравные числа. Будем по очереди брать произвольные два числа a и b и заменять их на $\frac{a+b}{2}$. В результате сумма не меняется, а произведение увеличивается. В конце концов придём к ситуации, когда числа равны, а произведение увеличилось. Значит, для равных чисел оно больше, чем для неравных.

Липа № 2. Пусть максимальное произведение достигается для неких значений переменных a_1, \dots, a_n . Если какие-то два из них не равны, то можно сблизить их между собой, и произведение увеличится — противоречие.

Метод Штурма. Задачи

4. В графе 77 вершин. Какое максимальное число рёбер в нём может быть, если он (a) двудольный; (b) «трёхдольный»; (c) «семидольный»?
5. Докажите неравенство $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ при $n > 1$.
6. Докажите методом Штурма, что *среднее квадратическое* неотрицательных чисел не меньше их среднего арифметического:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

7. Пусть $x_1 + \dots + x_n = 1$. Докажите, что $\frac{(1-x_1)\dots(1-x_n)}{x_1\dots x_n} \geq (n-1)^n$.
8. Докажите, что если все $x_i \geq 1$, то

$$\frac{1}{1+x_1} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}.$$

9. Пусть сумма положительных чисел x , y и z равна 1. Докажите, что

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

10. Сумма пяти двузначных чисел равна 333. При каких значениях чисел сумма их квадратов максимальна?
11. Рассмотрим всевозможные n -угольники, вписанные в данную окружность.
- (a) Докажите, что если среди них есть многоугольник наибольшей площади, то он правильный.
- (b) Докажите, что правильный n -угольник действительно имеет наибольшую площадь среди всех вписанных в окружность.
- (c) Докажите, что чем больше n , тем больше площадь правильного n -угольника, вписанного в окружность.