

## Принцип крайнего в графах

1. В группе из 80 человек некоторые знакомы друг с другом (знакомства взаимны). Известно, что в группе есть человек, который знает ровно 1 из оставшихся, человек, который знает ровно 2 из оставшихся, ..., человек, который знает ровно 54 из оставшихся. Докажите, что в группе есть три человека, каждые два из которых знакомы.
2. На дискотеке юноши танцевали с девушками. Не было юноши, танцевавшего со всеми девушками, и не было девушки, которая не танцевала ни с кем. Докажите, что на дискотеке найдутся 2 юноши и 2 девушки, образующие идеальную четвёрку: они образуют паросочетание, и других рёбер в этой четвёрке нет.
3. Вершины графа покрашены в 3 цвета. Вершин каждого цвета ровно  $n$ . Каждая вершина соединена с  $n + 1$  вершиной других цветов. Докажите, что существует треугольник с вершинами трех разных цветов.
4. 200 теннисистов сыграли 140 партий так, что каждый участвовал хотя бы в одной. Докажите, что найдутся 60 партий, в которых участвовали 120 различных теннисистов.
5. В стране из каждого города выходит не более 4 дорог. Также известно, что между любыми двумя городами существует путь, проходящий не более чем по двум другим городам. Докажите, что в этой стране не более 53 городов.
6. В графе  $n$  вершин, все вершины имеют одинаковую степень. Докажите, что в этом графе есть паросочетание, содержащее не менее, чем  $\frac{n}{3}$  рёбер.
7. В компании из миллиона человек среди любых десяти есть трое попарно знакомых. Докажите, что можно выбрать восьмерых из них так, чтобы любой из оставшихся был знаком с кем-то из этих восьмерых.
8. Есть граф на 2025 вершинах. В нём нет циклов длины не более 6. Докажите, что степень какой-то вершины не более 12.
9. В графе  $G$  степень каждой вершины хотя бы  $t$  ( $t \geq 2$ ). Докажите, что в  $G$  существует: (а) простой путь длины хотя бы  $t$ ; (б) простой цикл длины хотя бы  $t + 1$ .
10. В стране есть 100 городов и несколько дорог. Путешественник заметил, что каким бы способом ни разделить города страны на две части, между этими двумя частями будет не более 400 дорог. Докажите, что существует 7 городов, никакие два из которых не соединены напрямую дорогой.
11. В графе  $n$  вершин,  $kn$  рёбер и нет циклов длины менее пяти. Докажите, что в этом графе есть  $k$  не пересекающихся по вершинам циклов.