

Метрические соотношения в окружности

Определение. Пусть дана окружность ω и точка P . Прямая ℓ , проходящая через P , пересекает окружность ω в точках A и B . Тогда величина $PA \cdot PB$ не зависит от выбора прямой ℓ . Определим для каждой точки P ее степень относительно окружности ω следующим образом:

$S(P) = PA \cdot PB$, если точка P лежит вне окружности;

$S(P) = -PA \cdot PB$, если точка P лежит внутри окружности;

$S(P) = 0$, если точка P лежит на окружности.

Замечание. Степень точки P относительно окружности с центром O и радиусом R можно определить как $OP^2 - R^2$.

1. Радиусы двух концентрических окружностей равны 33 и 31. Хорда большей окружности делится меньшей окружностью на три равные части. Найдите ее длину.
2. В угол вписаны две окружности: одна из них касается сторон угла в точках K_1 и K_2 , а другая – в точках L_1 и L_2 . Докажите, что прямая K_1L_2 отсекает на этих двух окружностях равные хорды.
3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O , равны между собой углы BAC и CBD , а также углы BCA и CDB . Докажите, что касательные, проведённые из точек B и C к описанной окружности треугольника AOD , равны.
4. BD – биссектриса угла B треугольника ABC . Описанная окружность треугольника BDC пересекает отрезок AB в точке E , описанная окружность треугольника ABD пересекает отрезок BC в точке F . Докажите, что $AE = CF$.

Критерий вписанности четырёхугольника: если для O — точки пересечения лучей (отрезков) AB и DC (AC и BD) выполнено $OB \cdot OA = OC \cdot OD$ ($OA \cdot OC = OB \cdot OD$), то четырёхугольник $ABCD$ — вписанный.

5. Пусть AB и CD хорды окружности, пересекающиеся в точке O . Пусть M — середина AO , а точка K на продолжении AB такая что $OB = BK$. Докажите, что точки M , C , D и K лежат на одной окружности.
6. Через точку P , лежащую на общей хорде AB двух пересекающихся окружностей, проведены хорда KM первой окружности и хорда LN второй окружности. Докажите, что $KLMN$ вписанный.
7. В равнобедренном тупоугольном треугольнике ABC с основанием BC проведена биссектриса BL . На BC выбрана точка K так, что $CK = AL$. Докажите, что точки A , B , K и L лежат на одной окружности.
8. Окружности Ω и ω касаются друг друга внутренним образом в точке A . Проведем в большей окружности Ω хорду CD , касающуюся ω в точке B (хорда AB не является диаметром ω). Точка M середина отрезка AB . Докажите, что окружность, описанная около треугольника CMD , проходит через центр ω .
9. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Окружность проходит через точки A и D и пересекает отрезки AB и AC в точках P и Q соответственно. Обозначим через X и Y отражения точек P и Q относительно середин отрезков AB и AC соответственно. Докажите, что точки B , C , X и Y лежат на одной окружности.

10. Высоты AA_1 , BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Диаметр CD описанной окружности треугольника ABC пересекает A_1B_1 в точке Q . Докажите, что H , C_1 , D и Q лежат на одной окружности.

Факт. ГМТ, имеющих равные степени относительно двух данных окружностей является прямой*, перпендикулярная линии центров.

Факт. Радикальные оси трех окружностей пересекаются в одной точке или параллельны.

11. Дана неравнобокая трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Окружность, проходящая через точки A и B , пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q , а диагонали – в точках M и N . Докажите, что прямые PQ , MN и CD пересекаются в одной точке.

12. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке E . Внутри четырехугольника выбрана точка P так, что $\angle PAB = \angle PBC$, $\angle PDC = \angle PCB$. Докажите, что PE делит отрезок BC пополам.

Идея. Точка тоже может рассматриваться как окружность.

13. Пусть AB , AC – касательные к окружности ω . Точки M , N – середины отрезков AB , AC , P – произвольная точка на прямой MN . Докажите, что $PA = PD$, где PD – касательная к ω .

Вопрос. А как устроено ГМТ, для которых отношение степеней относительно двух данных окружностей равно $k \neq 1$?

14. Пусть две окружности пересекаются в точках A и B . Пусть $f(X)$ – отношение степеней точки X относительно этих окружностей. Докажите, что если $f(P) = f(Q)$, то A , B , P и Q лежат на одной окружности или прямой.

15. Две окружности пересекаются в точках A и B . Прямая, проходящая через точку A , вторично пересекает окружности в точках C и D . Докажите, что середины отрезков CD лежат на одной окружности.