

## Функция Эйлера

Упр. Выписали все правильные дроби со знаменателем 30. Сколько среди них несократимых?

Упр. Выписали все правильные дроби со знаменателем 30 и привели их все к несократимому виду. Сколько получилось дробей для каждого знаменателя?

Опр. Пусть  $n \in \mathbb{N}$ . Обозначим через  $\varphi(n)$  количество чисел, не больших  $n$  и взаимно простых с  $n$ . Отображение  $\varphi$  называется *функцией Эйлера*.

Упр. Заполните таблицу:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	30
$\varphi(n)$										

- Докажите, что  $\varphi(n)$  чётно для всех  $n > 2$ .
- Найдите сумму всех правильных несократимых дробей со знаменателем  $n$ .
- (Тождество Гаусса) Докажите, что любое натуральное число равно сумме значений функции Эйлера для всех его делителей:  $n = \sum_{n:d} \varphi(d)$ .
- (a) Пусть  $p$  – простое число. Найдите:  $\varphi(p)$ ,  $\varphi(p^2)$ ,  $\varphi(p^k)$ .  
(b) Пусть  $m$  – произвольное натуральное число. Найдите  $\varphi(m^k)$ .
- Пусть  $m$  и  $n$  взаимно просты. Все натуральные числа от 1 до  $mn$  подряд выписали в таблицу по строкам, так что получилось  $m$  строк по  $n$  столбцов (в первой строке числа от 1 до  $n$ , во второй – от  $n + 1$  до  $2n$ , и т.д.). Сколько в каждом столбце получилось чисел, взаимно простых с  $m$ ?
- Докажите, что для любых взаимно простых  $a$  и  $b$  верно:  $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ .
- Докажите, что если  $m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$ , то

$$\begin{aligned} \varphi(m) &= p_1^{k_1-1}(p_1 - 1)p_2^{k_2-1}(p_2 - 1) \dots p_n^{k_n-1}(p_n - 1) = \\ &= m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right). \end{aligned}$$

- Решите в натуральных числах:  
(a)  $\varphi(n) = \frac{n}{2}$ ; (b)  $\varphi(n) = \frac{n}{3}$ ; (c)  $\varphi(n) = \frac{n}{7}$ ; (d)  $\varphi(n) = \frac{n}{k}$ .
- Пусть  $p > 3$  – такое простое число, что  $3p - 2$  – тоже простое. Докажите, что  $\varphi(9p) = \varphi(12p - 8)$ .
- Решите в натуральных числах: (a)  $\varphi(17n) = 17\varphi(n)$ ; (b)  $\varphi(n) = 16$ .
- Докажите следующие свойства функции Эйлера:  
(a)  $\varphi(m)\varphi(n) = \varphi(\text{НОД}(m, n)) \cdot \varphi(\text{НОК}(m, n))$ ;  
(b)  $\varphi(mn) \cdot \varphi(\text{НОД}(m, n)) = \varphi(m) \cdot \varphi(n) \cdot \text{НОД}(m, n)$ ;  
(c) Если  $a : b$ , то  $\varphi(a) : \varphi(b)$ .