

Ориентированные графы

Определение. Граф называется ориентированным (орграфом), если у каждого ребра определено направление (т.е. если вершины графа A и B соединены ребром, то ребро направлено либо от A к B , либо от B к A). Иначе говоря, у каждого ребра определено начало и определен конец.

1. Могут ли входящие степени вершин орграфа равняться $1, 3, 5, \dots, 43$ (каждая по одному разу), а исходящие — $0, 2, 4, \dots, 42$?
2. В стране n городов, каждые два из которых соединены дорогой. Президент хочет ввести на дорогах одностороннее движение так, чтобы, выехав из любого города, в него больше нельзя было вернуться. (a) Докажите, что он сможет это сделать. (b) Найдите количество способов таким образом ввести одностороннее движение.
3. Две команды набрали в однокруговом волейбольном турнире одинаковое количество очков. Докажите, что найдутся команды A , B , и C такие, что A выиграла у B , B выиграла у C , а C выиграла у A .
4. В классе каждый бросил бумажку в трех других ребят. Докажите, что можно рассадить ребят в семь аудиторий так, что в одной аудитории никто ни в кого бумажку не бросал.

Определение. Полный ориентированный граф называется турниром.

Теорема. В турнире есть путь, проходящий по всем вершинам ровно один раз.

5. Докажите, что в турнирном графе (количество вершин не меньше 4) всегда можно изменить ориентацию одного ребра так, что он станет сильно связным.
6. Есть турнир на 200 вершинах. Докажите, что можно найти простой путь из 199 ребер, в котором первые 100 ребер ориентированы в одну сторону, а следующие 99 – в другую.
7. Назовем царем вершину в орграфе, расстояние от которой до любой другой вершины не превосходит двух. (a) Докажите, что в любом турнире найдется царь. (b) Докажите, что если в турнире ровно один царь, то он победил всех других участников. (c) Докажите, что в турнире не может быть ровно двух царей.

Определение. Орграф называется сильно связным, если для любой пары вершин A , B можно добраться по ребрам графа от A к B и наоборот. Орграф называется слабо связным если для любой пары вершин A , B можно добраться по ребрам графа от одной из них до другой.

8. Из сильно связного графа удалили все ребра, выходящие из одной вершины. Обязательно ли он останется слабо связным?
9. В сильно связном графе на n вершинах при удалении любого ребра сильная связность сохраняется. Какое минимальное число ребер может быть в таком графе?

Вопрос. Граф не является сильно связным. Как определить аналог компонент связности в этом случае? А как будет устроен граф компонент связности?

10. Пусть G – сильно связный турнир. Докажите, что любая его вершина принадлежит какому-то ориентированному треугольнику (циклу длины 3).

Ориентированные графы

Определение. Граф называется ориентированным (орграфом), если у каждого ребра определено направление (т.е. если вершины графа A и B соединены ребром, то ребро направлено либо от A к B , либо от B к A). Иначе говоря, у каждого ребра определено начало и определен конец.

1. Могут ли входящие степени вершин орграфа равняться $1, 3, 5, \dots, 43$ (каждая по одному разу), а исходящие — $0, 2, 4, \dots, 42$?
2. В стране n городов, каждые два из которых соединены дорогой. Президент хочет ввести на дорогах одностороннее движение так, чтобы, выехав из любого города, в него больше нельзя было вернуться. (a) Докажите, что он сможет это сделать. (b) Найдите количество способов таким образом ввести одностороннее движение.
3. Две команды набрали в однокруговом волейбольном турнире одинаковое количество очков. Докажите, что найдутся команды A , B , и C такие, что A выиграла у B , B выиграла у C , а C выиграла у A .
4. В классе каждый бросил бумажку в трех других ребят. Докажите, что можно рассадить ребят в семь аудиторий так, что в одной аудитории никто ни в кого бумажку не бросал.

Определение. Полный ориентированный граф называется турниром.

Теорема. В турнире есть путь, проходящий по всем вершинам ровно один раз.

5. Докажите, что в турнирном графе (количество вершин не меньше 4) всегда можно изменить ориентацию одного ребра так, что он станет сильно связным.
6. Есть турнир на 200 вершинах. Докажите, что можно найти простой путь из 199 ребер, в котором первые 100 ребер ориентированы в одну сторону, а следующие 99 – в другую.
7. Назовем царем вершину в орграфе, расстояние от которой до любой другой вершины не превосходит двух. (a) Докажите, что в любом турнире найдется царь. (b) Докажите, что если в турнире ровно один царь, то он победил всех других участников. (c) Докажите, что в турнире не может быть ровно двух царей.

Определение. Орграф называется сильно связным, если для любой пары вершин A , B можно добраться по ребрам графа от A к B и наоборот. Орграф называется слабо связным если для любой пары вершин A , B можно добраться по ребрам графа от одной из них до другой.

8. Из сильно связного графа удалили все ребра, выходящие из одной вершины. Обязательно ли он останется слабо связным?
9. В сильно связном графе на n вершинах при удалении любого ребра сильная связность сохраняется. Какое минимальное число ребер может быть в таком графе?

Вопрос. Граф не является сильно связным. Как определить аналог компонент связности в этом случае? А как будет устроен граф компонент связности?

10. Пусть G – сильно связный турнир. Докажите, что любая его вершина принадлежит какому-то ориентированному треугольнику (циклу длины 3).