

Транснеравенство¹

Упр. Есть три пачки банкнот номиналом 50, 100 и 500 рублей соответственно. Учитель сказал, что выдаст на карманные расходы каждому по 2 банкноты из одной пачки, 3 из другой и 5 из третьей. Хулиган Вася хочет, чтобы у него получилась максимальная сумма, а у отличницы Маши – минимальная. Как этого достичь?

Упр. Пусть $a_1 > a_2$ и $b_1 > b_2$. Что больше: $a_1b_1 + a_2b_2$ или $a_1b_2 + a_2b_1$?

Идея. Если поменять местами пару «бэ-шек» так, чтобы они шли «правильно», то сумма увеличится. А если так, чтобы они шли «наоборот», то сумма уменьшится.

Транснеравенство. Пусть $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$.

Пусть c_1, \dots, c_n – произвольная перестановка чисел b_1, \dots, b_n . Тогда:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \geq a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n \geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1.$$

Геометрическая интерпретация. Расположим массы m_1, m_2, \dots, m_n в точках координатной прямой с координатами x_1, x_2, \dots, x_n . Пусть x_z – центр масс полученной системы материальных точек: $x_z = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \dots + x_nm_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$. Для какой перестановки масс центр масс x_z расположен правее всего? левее всего?

1. Пусть $a \geq b \geq c$ – произвольные вещественные числа. Расставьте в каждом пункте числа по убыванию: $\bullet a^3, b^3, c^3$; $\bullet a + b, b + c, c + a$.

2. Пусть $a \geq b \geq c > 0$. Расставьте в каждом пункте числа по убыванию:

$$\bullet a^2, b^2, c^2; \quad \bullet \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}; \quad \bullet ab, bc, ca; \quad \bullet \frac{b}{\sqrt{ac}}, \frac{a}{\sqrt{bc}}, \frac{c}{\sqrt{ab}}.$$

3. Докажите, что для произвольных вещественных a, b, c, d верно:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq ab + bc + cd + da.$$

4. Докажите, что для положительных a, b, c, d верно:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq a^2b + b^2c + c^2d + d^2a.$$

5. Докажите, что для положительных a, b, c верно:

$$(a) \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{a+b+c}{abc}; \quad (b) \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c;$$

$$(c) \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}; \quad (d) \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3;$$

$$(e) ab + bc + ac \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab};$$

$$(f) a + b + c \geq \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1};$$

$$(g) a + b + c \leq \frac{a^2 + b^2}{2c} + \frac{b^2 + c^2}{2a} + \frac{c^2 + a^2}{2b} \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}.$$

6. Докажите, что для положительных a, b, c верно: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

¹Транс... (от лат. trans – сквозь, через, за), составная часть сложных слов, означающая: 1) движение через какое-либо пространство, пересечение его (*трансатлантический*); 2) следование за чем-либо, расположение по ту сторону чего-либо (*трансальпийский*); 3) обозначение или передача через посредство чего-либо (*транслитерация, трансмиссия*).

7. Для $a, b, c \geq 1$ докажите неравенство: $\frac{1+ab}{b+c} + \frac{1+bc}{c+a} + \frac{1+ca}{a+b} \geq 3$.
8. Для положительных a_1, a_2, \dots, a_n докажите: $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq n$.
9. Пусть m_1, \dots, m_n – различные натуральные числа. Докажите, что:

$$m_1 + \frac{m_2}{4} + \frac{m_3}{9} + \dots + \frac{m_n}{n^2} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

10. Неравенство Чебышёва. Докажите, что для чисел $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ выполнено неравенство:

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n).$$

Транснеравенство¹

Упр. Есть три пачки банкнот номиналом 50, 100 и 500 рублей соответственно. Учитель сказал, что выдаст на карманные расходы каждому по 2 банкноты из одной пачки, 3 из другой и 5 из третьей. Хулиган Вася хочет, чтобы у него получилась максимальная сумма, а у отличницы Маши – минимальная. Как этого достичь?

Упр. Пусть $a_1 > a_2$ и $b_1 > b_2$. Что больше: $a_1b_1 + a_2b_2$ или $a_1b_2 + a_2b_1$?

Идея. Если поменять местами пару «бэ-шек» так, чтобы они шли «правильно», то сумма увеличится. А если так, чтобы они шли «наоборот», то сумма уменьшится.

Транснеравенство. Пусть $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$.

Пусть c_1, \dots, c_n – произвольная перестановка чисел b_1, \dots, b_n . Тогда:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \geq a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n \geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1.$$

Геометрическая интерпретация. Расположим массы m_1, m_2, \dots, m_n в точках координатной прямой с координатами x_1, x_2, \dots, x_n . Пусть x_z – центр масс полученной системы материальных точек: $x_z = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + \dots + x_nm_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$. Для какой перестановки масс центр масс x_z расположен правее всего? левее всего?

1. Пусть $a \geq b \geq c$ – произвольные вещественные числа. Расставьте в каждом пункте числа по убыванию: $\bullet a^3, b^3, c^3$; $\bullet a + b, b + c, c + a$.

2. Пусть $a \geq b \geq c > 0$. Расставьте в каждом пункте числа по убыванию:

$$\bullet a^2, b^2, c^2; \quad \bullet \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}; \quad \bullet ab, bc, ca; \quad \bullet \frac{b}{\sqrt{ac}}, \frac{a}{\sqrt{bc}}, \frac{c}{\sqrt{ab}}.$$

3. Докажите, что для произвольных вещественных a, b, c, d верно:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq ab + bc + cd + da.$$

4. Докажите, что для положительных a, b, c, d верно:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq a^2b + b^2c + c^2d + d^2a.$$

5. Докажите, что для положительных a, b, c верно:

$$(a) \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{a+b+c}{abc}; \quad (b) \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c;$$

$$(c) \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}; \quad (d) \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3;$$

$$(e) ab + bc + ac \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab};$$

$$(f) a + b + c \geq \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1};$$

$$(g) a + b + c \leq \frac{a^2 + b^2}{2c} + \frac{b^2 + c^2}{2a} + \frac{c^2 + a^2}{2b} \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}.$$

6. Докажите, что для положительных a, b, c верно: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

¹Транс... (от лат. trans – сквозь, через, за), составная часть сложных слов, означающая: 1) движение через какое-либо пространство, пересечение его (*трансатлантический*); 2) следование за чем-либо, расположение по ту сторону чего-либо (*трансальпийский*); 3) обозначение или передача через посредство чего-либо (*транслитерация, трансмиссия*).

7. Для $a, b, c \geq 1$ докажите неравенство: $\frac{1+ab}{b+c} + \frac{1+bc}{c+a} + \frac{1+ca}{a+b} \geq 3$.

8. Для положительных a_1, a_2, \dots, a_n докажите: $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq n$.

9. Пусть m_1, \dots, m_n – различные натуральные числа. Докажите, что:

$$m_1 + \frac{m_2}{4} + \frac{m_3}{9} + \dots + \frac{m_n}{n^2} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

10. Неравенство Чебышёва. Докажите, что для чисел $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ выполнено неравенство:

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n).$$