

Отображения

Опр. *Отображением* множества A в множество B называется такое правило, которое **каждому** элементу $a \in A$ ставит в соответствие **единственный** элемент $f(a) = b \in B$. Элемент b – *образ*, a – *прообраз*.

Множество A – *область определения*, B – *область значений*.

Обозначения. $f : A \rightarrow B$. $A \xrightarrow{f} B$. $f : a \mapsto b$. $a \xmapsto{f} b$.

Упр. Являются ли отображениями следующие соответствия? Если да, то назовите область определения и область значений. Если нет, то предложите, как изменить область определения или область значений, чтобы получилось отображение. (a) многоугольник \mapsto количество сторон; (b) окружность \mapsto радиус; (c) цветок \mapsto цвет лепестка; (d) дата \mapsto температура около медпункта ЛМШ в 12-00; (e) человек \mapsto дата рождения; (f) человек \mapsto рост; (g) работник \mapsto начальник; (h) человек \mapsto мать; (i) человек \mapsto бабушка; (j) человек \mapsto брат; (k) натуральное число \mapsto сумма цифр; (l) целое число \mapsto остаток от деления на 10; (m) целое число \mapsto последняя цифра; (n) число \mapsto квадрат числа; (o) $x \mapsto x^3$; (p) пара целых чисел \mapsto дробь; (q) пара натуральных чисел \mapsto дробь; (r) точка на декартовой плоскости \mapsto ордината; (s) число \mapsto то же число.

Опр. Отображение $id_A : A \rightarrow A : x \mapsto x$ называется *тождественным*.

Опр. Два отображения $f : A \rightarrow B$ и $g : A \rightarrow B$ называются *равными*, если для всех $a \in A$ верно $f(a) = g(a)$. Пишут: $f = g$.

Упр. Найдутся ли такие множества X и Y и такое отображение $f : X \rightarrow Y$, что:

- во множестве X найдется элемент, не имеющий образа;
- во множестве X найдется элемент, имеющий несколько образов;
- во множестве Y найдется элемент, не имеющий прообраза;
- во множестве Y найдется элемент, имеющий несколько прообразов?

Замечание. Отображение числовых множеств обычно называют *функцией*.

Упр. Приведите пример функции $\mathbb{N} \rightarrow \square$. Как мы называем такие функции?

Замечание. Функцию $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ обычно изображают в виде *графика*.

Упр. (a) Изобразите графики функций: $f(x) = 3$; $g(x) = 2x - 3$.

(b) Является ли график $x^2 + y^2 = 1$ графиком какой-нибудь функции $x \mapsto y$?

Опр. Отображение $f : A \rightarrow B$ называется

- *инъективным*, если разные переходят в разные: $x \neq y \in A \Rightarrow f(x) \neq f(y)$;
- *сюръективным*, если у всех есть прообраз: $\forall b \in B \exists a \in A : b = f(a)$;
- *биективным* (или *взаимно однозначным соответствием*), если оно одновременно и инъекция, и сюръекция.

Упр. (a) Какие отображения из первого упражнения являются инъективными? сюръективными? биективным?

(b) Приведите пример инъективного, но не биективного отображения.

Опр. Пусть заданы два отображения $A \xrightarrow{f} B$ и $B \xrightarrow{g} C$. Их *композицией* называется отображение $A \xrightarrow{h} C$, определённое соотношением: $h(x) = g(f(x))$ для любого $x \in A$. Пишут: $h = g \circ f$ (отображения применяются справа налево).

- Упр. Что такое: (a) «год рождения» \circ «мать»; (b) «мать» \circ «мать»;
 (c) «мать» \circ «отец»; (d) «имя» \circ «отец» \circ «начальник» \circ «мать»;
 (e) « $z = y^3$ » \circ « $y = 3x + 5$ »; (f) « $z = 3y + 5$ » \circ « $y = x^3$ »; (g) « x^3 » \circ « x^2 » ?
- Опр. Отображение $g : B \rightarrow A$ называется *обратным* к отображению $f : A \rightarrow B$, если $f \circ g = id_B$ и $g \circ f = id_A$. Пишут: $g = f^{-1}$.
- Упр. Какие отображения из первого упражнения имеют обратные?
- Упр. Как выглядят графики отображений $y = 2x - 3$, $y = x^3$ и обратных к ним?

Отображения. Задачи.

- Пусть A – множество из m элементов, B – множество из n элементов. Сколько существует (a) всевозможных; (b) инъективных отображений $A \rightarrow B$?
- Верны ли следующие равенства для любого отображения f :
 (a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$; (b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$?
- Докажите, что отображение $f : A \rightarrow B$ инъективно тогда и только тогда, когда $\forall X, Y \subset A \Rightarrow f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$.
- Приведите пример, когда $f \circ g$ – тождественное, а $g \circ f$ – нет.
- Приведите примеры, когда: (a) $f \circ g = g \circ f$; (b) $f \circ g \neq g \circ f$.
- Верно ли, что:
 (a) f и g биекции $\Rightarrow g \circ f$ биекция; (b) $g \circ f$ биекция $\Rightarrow f$ и g биекции;
 (c) $g \circ f$ инъекции $\Rightarrow f$ инъекция; (d) $g \circ f$ сюръекции $\Rightarrow g$ сюръекция?
- Существует ли такое $f : A \rightarrow A$, что $f \neq id_A$ и $f \circ f = id_A$?
- Докажите, что следующие условия равносильны:
 • f обратимо; • все прообразы f одноэлементны; • f биекция.
- Докажите, что если f и g обратимы, то $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.
- Установите биективные соответствия между следующими множествами:
 (a) все подмножества конечного множества A и все отображения $A \rightarrow \{0, 1\}$;
 (b) все подмножества множества $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$, состоящие из четного числа элементов, и все подмножества, состоящие из нечетного числа элементов;
 (c) точки отрезка $[-1, 1]$ и точки отрезка $[0, 2025]$;
 (d) векторы длины 1 и точки окружности.
 (e) точки интервала $(0, 1]$ и точки луча $[1, +\infty)$;
 (f) точки полуокружности $x^2 + y^2 = 1, y > 0$ и точки прямой $y = 1$.
- Пусть s – отображение, сопоставляющее натуральному числу его сумму цифр, а res_k – отображение, сопоставляющее натуральному числу остаток от деления его на k . Для каких k выполнено равенство $s \circ res_k = res_k \circ s$?
- Назовем натуральное число *маленьким*, если оно не превосходит 100. Каждому множеству, состоящему из 49 маленьких чисел, поставлено в соответствие некоторое маленькое число. Докажите, что можно так выбрать 50 маленьких чисел, что никакому множеству, состоящему из 49 из них, не сопоставлено оставшееся число.

Отображения

Опр. *Отображением* множества A в множество B называется такое правило, которое **каждому** элементу $a \in A$ ставит в соответствие **единственный** элемент $f(a) = b \in B$. Элемент b – *образ*, a – *прообраз*.

Множество A – *область определения*, B – *область значений*.

Обозначения. $f : A \rightarrow B$. $A \xrightarrow{f} B$. $f : a \mapsto b$. $a \xmapsto{f} b$.

Упр. Являются ли отображениями следующие соответствия? Если да, то назовите область определения и область значений. Если нет, то предложите, как изменить область определения или область значений, чтобы получилось отображение. (a) многоугольник \mapsto количество сторон; (b) окружность \mapsto радиус; (c) цветок \mapsto цвет лепестка; (d) дата \mapsto температура около медпункта ЛМШ в 12-00; (e) человек \mapsto дата рождения; (f) человек \mapsto рост; (g) работник \mapsto начальник; (h) человек \mapsto мать; (i) человек \mapsto бабушка; (j) человек \mapsto брат; (k) натуральное число \mapsto сумма цифр; (l) целое число \mapsto остаток от деления на 10; (m) целое число \mapsto последняя цифра; (n) число \mapsto квадрат числа; (o) $x \mapsto x^3$; (p) пара целых чисел \mapsto дробь; (q) пара натуральных чисел \mapsto дробь; (r) точка на декартовой плоскости \mapsto ордината; (s) число \mapsto то же число.

Опр. Отображение $id_A : A \rightarrow A : x \mapsto x$ называется *тождественным*.

Опр. Два отображения $f : A \rightarrow B$ и $g : A \rightarrow B$ называются *равными*, если для всех $a \in A$ верно $f(a) = g(a)$. Пишут: $f = g$.

Упр. Найдутся ли такие множества X и Y и такое отображение $f : X \rightarrow Y$, что:

- (a) во множестве X найдется элемент, не имеющий образа;
- (b) во множестве X найдется элемент, имеющий несколько образов;
- (c) во множестве Y найдется элемент, не имеющий прообраза;
- (d) во множестве Y найдется элемент, имеющий несколько прообразов?

Замечание. Отображение числовых множеств обычно называют *функцией*.

Упр. Приведите пример функции $\mathbb{N} \rightarrow \square$. Как мы называем такие функции?

Замечание. Функцию $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ обычно изображают в виде *графика*.

Упр. (a) Изобразите графики функций: $f(x) = 3$; $g(x) = 2x - 3$.

(b) Является ли график $x^2 + y^2 = 1$ графиком какой-нибудь функции $x \mapsto y$?

Опр. Отображение $f : A \rightarrow B$ называется

- *инъективным*, если разные переходят в разные: $x \neq y \in A \Rightarrow f(x) \neq f(y)$;
- *сюръективным*, если у всех есть прообраз: $\forall b \in B \exists a \in A : b = f(a)$;
- *биективным* (или *взаимно однозначным соответствием*), если оно одновременно и инъекция, и сюръекция.

Упр. (a) Какие отображения из первого упражнения являются инъективными? сюръективными? биективным?

(b) Приведите пример инъективного, но не биективного отображения.

Опр. Пусть заданы два отображения $A \xrightarrow{f} B$ и $B \xrightarrow{g} C$. Их *композицией* называется отображение $A \xrightarrow{h} C$, определённое соотношением: $h(x) = g(f(x))$ для любого $x \in A$. Пишут: $h = g \circ f$ (отображения применяются справа налево).

- Упр. Что такое: (a) «год рождения» \circ «мать»; (b) «мать» \circ «мать»;
 (c) «мать» \circ «отец»; (d) «имя» \circ «отец» \circ «начальник» \circ «мать»;
 (e) « $z = y^3$ » \circ « $y = 3x + 5$ »; (f) « $z = 3y + 5$ » \circ « $y = x^3$ »; (g) « x^3 » \circ « x^2 » ?
- Опр. Отображение $g : B \rightarrow A$ называется *обратным* к отображению $f : A \rightarrow B$, если $f \circ g = id_B$ и $g \circ f = id_A$. Пишут: $g = f^{-1}$.
- Упр. Какие отображения из первого упражнения имеют обратные?
- Упр. Как выглядят графики отображений $y = 2x - 3$, $y = x^3$ и обратных к ним?

Отображения. Задачи.

- Пусть A – множество из m элементов, B – множество из n элементов. Сколько существует (a) всевозможных; (b) инъективных отображений $A \rightarrow B$?
- Верны ли следующие равенства для любого отображения f :
 (a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$; (b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$?
- Докажите, что отображение $f : A \rightarrow B$ инъективно тогда и только тогда, когда $\forall X, Y \subset A \Rightarrow f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$.
- Приведите пример, когда $f \circ g$ – тождественное, а $g \circ f$ – нет.
- Приведите примеры, когда: (a) $f \circ g = g \circ f$; (b) $f \circ g \neq g \circ f$.
- Верно ли, что:
 (a) f и g биекции $\Rightarrow g \circ f$ биекция; (b) $g \circ f$ биекция $\Rightarrow f$ и g биекции;
 (c) $g \circ f$ инъекции $\Rightarrow f$ инъекция; (d) $g \circ f$ сюръекции $\Rightarrow g$ сюръекция?
- Существует ли такое $f : A \rightarrow A$, что $f \neq id_A$ и $f \circ f = id_A$?
- Докажите, что следующие условия равносильны:
 • f обратимо; • все прообразы f одноэлементны; • f биекция.
- Докажите, что если f и g обратимы, то $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.
- Установите биективные соответствия между следующими множествами:
 (a) все подмножества конечного множества A и все отображения $A \rightarrow \{0, 1\}$;
 (b) все подмножества множества $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$, состоящие из четного числа элементов, и все подмножества, состоящие из нечетного числа элементов;
 (c) точки отрезка $[-1, 1]$ и точки отрезка $[0, 2025]$;
 (d) векторы длины 1 и точки окружности.
 (e) точки интервала $(0, 1]$ и точки луча $[1, +\infty)$;
 (f) точки полуокружности $x^2 + y^2 = 1, y > 0$ и точки прямой $y = 1$.
- Пусть s – отображение, сопоставляющее натуральному числу его сумму цифр, а res_k – отображение, сопоставляющее натуральному числу остаток от деления его на k . Для каких k выполнено равенство $s \circ res_k = res_k \circ s$?
- Назовем натуральное число *маленьким*, если оно не превосходит 100. Каждому множеству, состоящему из 49 маленьких чисел, поставлено в соответствие некоторое маленькое число. Докажите, что можно так выбрать 50 маленьких чисел, что никакому множеству, состоящему из 49 из них, не сопоставлено оставшееся число.