

Комбинаторная геометрия

Мысль. Разбить на удобные части.

Пример. Внутри (не на границе) прямоугольника 7×12 выбрали 8 точек. Докажите, что расстояние между какими-то двумя меньше 5.

1. Можно ли квадрат со стороной 8 полностью покрыть двумя кругами диаметра 9?

2. Можно ли правильный треугольник со стороной 2 накрыть четырьмя квадратами со стороной 1? А тремя?

Определение. Диаметр множества называется расстояние между двумя самыми удаленными его точками.

Вопрос. Чему равен диаметр круга, квадрата, треугольника?

Мысль. Зажать чем-то удобным.

3. Всегда ли можно множество диаметра 1 покрыть кругом радиуса 0,5? Квадратом со стороной 1? А кругом радиуса 1?

4. Докажите, что (а) всякий выпуклый многоугольник площади 1 можно заключить в параллелограмм площади 2; (б) треугольник площади 1 нельзя заключить в параллелограмм площади меньше 2.

Еще мысль. Применить различные комбинаторные идеи.

5. На какое наименьшее число связных частей можно разрезать круг, чтобы все части оказались меньшего диаметра?

6. Докажите, что одна из проекций точки внутри выпуклого многоугольника на его стороны упадет на сторону, а не на продолжение.

7. В квадрате со стороной 1 лежат пять непересекающихся квадратов со сторонами, параллельными сторонам большого квадрата. Докажите, что сумма их периметров не превосходит 10.

8. Квадрат со стороной 1 разрезан на прямоугольники. В каждом прямоугольнике выбрали одну из двух меньших сторон (если прямоугольник – квадрат, то выбрали любую из четырёх сторон). Докажите, что сумма всех выбранных сторон не меньше 1. Придумайте как можно больше решений.