

Введение в теорию вероятностей

Опр. Пусть проводится некоторый эксперимент, при том известны все возможные его результаты. Назовем их *множеством элементарных исходов* Ω .

Пример. Например, пусть мы ровно 10 раз подбросили монетку. Результатами можем считать последовательности выпадения орлов и решек. Сколько будет элементарных исходов?

Опр. Отображение $\mathbb{P} : \Omega \rightarrow [0, 1]$ называется *вероятностью* на Ω , если

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1.$$

Замечание. Заметим, что функция вероятности совсем не единственна для любой Ω . Но когда в задаче не сказано обратного, обычно предполагается, что элементарные исходы равновероятны.

Опр. Пара (Ω, \mathbb{P}) называется *вероятностным пространством*.

Опр. *Событием* называется любое подмножество Ω .

Опр. Пусть A — событие. Определим его вероятность так:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega).$$

Упражнение. Докажите свойства вероятности:

(a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1, \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

(b) $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1$

(c) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

1. Докажите, что если элементарные исходы равновероятны, то $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

2. В каждом из пунктов ниже опишите вероятностное пространство и найдите количество элементарных исходов для данных событий (считаем, что все элементарные исходы равновероятны). Какова вероятность этих событий?

(a) n раз бросают монету — выпало k решек.

(b) n раз бросают игральный шестигранный кубик — сумма выпавших очков чётна.

3. Колоду из 36 карт раздают четверем людям, по 9 карт каждому.

(a) Какова вероятность того, что у каждого человека все карты одной масти?

(b) Какова вероятность того, что каждый получит по одному королю?

(c) Какова вероятность того, что каждый получит по королю и по две из оставшихся бубновых карт?

(d) Всегда ли $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$?

Опр. События называются *независимыми*, если $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

4. Кубик подбросили n раз. Докажите независимость результатов разных бросков (то есть независимость событий «при i -м броске выпало число a » и «при j -м броске выпало число b »). А если мы n раз подбросим монету? Покрутим рулетку?

5. Пять человек независимо друг от друга выбирают случайно и равновероятно одно из чисел от 0 до 9. Какое из событий более вероятно: «все выбранные числа различны» или «все выбранные числа делятся на 2»?

Замечание. В задаче 5 можно уже не задумываться о том, как конкретно выглядит Ω и какие вероятности на каждом элементарном исходе. Здесь задача нам говорит, что какое-то вероятностное пространство дано, а мы смотрим уже за событиями.

6. Каждый из детей группы профи сдаёт зачёт со своей вероятностью (независимо от остальных). Пусть p_k — вероятность того, что зачёт сдали ровно k из них. Ценностью курса назовём величину $p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + \dots$. Докажите, что если взять в профи ещё несколько человек, ценность курса не увеличится.

Опр. Условной вероятностью события A при условии события B называется величина

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

В прикладном смысле это вероятность события A в новом пространстве, где $\Omega = B$ и все вероятности элементарных исходов изначального пространства разделены на $\mathbb{P}(B)$. Иногда в задаче дана только условная вероятность.

7. Двое играют в русскую рулетку. Первый зарядил две пули в соседние отверстия барабана (в барабане 6 отверстий), совершил выстрел и остался в живых. Как поступить второму, чтобы шансы на выживание были больше: прокрутить барабан перед выстрелом или оставить имеющееся расположение?

8. Докажите формулу полной вероятности. Пусть даны непересекающиеся события B_1, \dots, B_n , такие, что $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$. Тогда

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)$$

9. В очереди на самолёт находятся n пассажиров; все места проданы. Первой заходит сумасшедшая старушка и занимает произвольное кресло. Каждый следующий пассажир либо садится на своё место, либо, если оно занято — на чьё-нибудь другое. Какова вероятность, что...

(а) последний пассажир будет сидеть на своём месте?

(б) и последний, и предпоследний пассажиры будут сидеть на своем месте?