

Классификация движений

Преобразованием плоскости называется взаимно однозначное отображение плоскости на себя.

Движением называется преобразование плоскости, сохраняющее расстояние между точками.

Свойства движений. Движение переводит:

- прямую в прямую, отрезок в равный ему отрезок, луч в луч;
- угол в равный ему угол;
- треугольник в равный ему треугольник;
- окружность в равную ей окружность;
- параллельные прямые в параллельные прямые.

Теорема о задании движения. Движение задается образами трех неколлинеарных точек.

Элементарные движения:

- тождественное отображение (id): $A \rightarrow A$;
- параллельный перенос на вектор \vec{u} ($T_{\vec{u}}$):

$A \rightarrow A'$, при этом $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$;

- осевая симметрия относительно прямой l (S_l):

$A \rightarrow A'$, при этом l является серединным перпендикуляром к отрезку AA' ;

- поворот на угол α вокруг точки O (R_O^α):

$A \rightarrow A'$, при этом $\angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \alpha$.

Движением первого рода называется движение, которое не меняет ориентацию. **Движением второго рода** называется движение, которое меняет ориентацию.

Композицией движений F и G называется отображение $G \circ F$, т.е. результат последовательного применения движений F и G .

1. Покажите, что любое движение плоскости представимо в виде композиции параллельного переноса, поворота и, возможно, осевой симметрии, причем именно в таком порядке.

Скользщей симметрией называется композиция осевой симметрии и параллельного переноса на вектор, параллельный оси симметрии.

Замечание. В данном случае композицию можно выполнять в любом порядке.

Теорема Шаля. Любое движение первого рода является параллельным переносом или поворотом, а любое движение второго рода — скользящей симметрией.

2. Доказательство теоремы Шаля.

(а) Покажите, что композиция переноса и поворота есть поворот, и докажите теорему для движений первого рода.

(б) Представьте поворот в виде композиции двух симметрий.

(с) Представьте движение второго рода в виде композиции переноса и симметрии или наоборот.

(д) Покажите, что композиция переноса и симметрии в любом порядке есть скользящая симметрия, и докажите теорему для движений второго рода.

3. Классифицируйте движения с точки зрения множества неподвижных точек.

4. Известно, что $R_{O_1}^\alpha \circ R_{O_2}^\beta = R_{O_3}^\gamma$, и точки O_1, O_2, O_3 образуют треугольник. Найдите углы этого треугольника.

5. Определите, что получится в результате композиции любых двух элементарных движений. Исследуйте все девять случаев и составьте таблицу. Если возможно, выразите характеристики композиции через характеристики движений.

Композиция движений

6. Найдите композицию осевых симметрий относительно серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

7. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники A_1BC , AB_1C и ABC_1 . Докажите, что их центры являются вершинами правильного треугольника.

8. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне его построены правильные треугольники ACP и BCQ . Точка M — середина AB , точка O — центр треугольника BCQ . Докажите, что $OP = 2 \cdot OM$.

9. Даны треугольник ABC и точка X . Точка X_1 симметрична точке X относительно середины AB , точка X_2 симметрична точке X_1 относительно середины BC , точка X_3 симметрична точке X_2 относительно середины CA . Докажите, что точка X симметрична точке X_3 относительно вершины A .

10. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC последовательно сделали осевые симметрии относительно биссектрис углов A, B и C . Куда перешли вершины A, B и C ?

11. Постройте нечётноугольник по серединам его сторон с помощью циркуля и линейки.