

Лемма Холла

Легенда. Пусть есть n пустынных и m верблюдов. Верблюды, как известно, очень привередливы и не готовы пускать к себе на спину кого попало. Назовем верблюда A *подходящим* для данного наездника B , если A готов пустить B к себе на спину.

Опр. Скажем, что выполнено *везучее* условие, если для любого подмножества из k пустынных есть хотя бы k верблюдов, подходящих кому-то из них.

Лемма Холла. Для того, чтобы можно было выдать каждому пустынный по своему подходящему верблюду, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено везучее условие.

Замечание. Лемма Холла является примером того, как почти очевидное необходимое условие оказывается еще и достаточным.

1. Докажите необходимость.

2. Достаточность докажем при помощи полной индукции по n .

(a) Докажите базу и сформулируйте переход.

(b) Для доказательства перехода нам надо как-то уменьшить количество пустынных, сохраняя везучее условие. Возьмем любого пустынного, дадим ему верблюда (почему можем?), и забудем про этих двоих добряков. В какой ситуации везучее условие больше не выполняется? Какое множество пустынных должно присутствовать в этом случае?

(c) Вернем забытых двоих и применим предположение к найденному множеству. Докажите, что если мы удалим этих пустынных и их верблюдов, то везучее условие сохранится.

(d) Завершите доказательство.

Опр. *Паросочетанием* в графе называется набор рёбер, никакие два из которых не имеют общей вершины.

Упр. Переформулируйте лемму на языке графов. Пока это не сделаете, дальше сдавать нельзя хе-хе:)

3. В таблице $n \times m$ некоторые клетки отмечены. Для любого k все отмеченные клетки, лежащие в k любых строках, принадлежат хотя бы k различным столбцам. Докажите, что тогда можно выбрать n клеток, никакие две из которых не лежат в одной строке или одном столбце.

4. Прямоугольный лист бумаги разбит на n многоугольников одинаковой площади с одной стороны и на n других той же площади с обратной стороны. Докажите, что этот лист можно проткнуть n иглами так, что каждый из $2n$ многоугольников будет проткнут хотя бы один раз.

5. Дед Мороз принес n детям не меньше n подарков. Известно, что i -му ребенку нравятся x_i подарков, получив любой из которых, он станет счастливым. Также известно, что выполнено неравенство:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \leq 1.$$

Докажите, что Дед Мороз может осчастливить всех детей.

6. С помощью леммы Холла докажите её альтернативные версии:

(a) Пусть $n < m$, все верблюды пускают к себе на спину одинаковое количество пустынных, а каждому пустыннику подходит одинаковое количество верблюдов. Докажите, что всем пустынным можно выдать по верблюду.

(b) Пусть для любого подмножества из k пустынных есть хотя бы $k - d$ верблюдов, подходящих кому-то из них. Докажите, что всем пустынным, кроме может быть каких-то d , можно выдать по верблюду.

(c) Пусть для любого подмножества из k пустынных есть хотя бы kd верблюдов, подходящих кому-то из них. Докажите, что всем пустынным можно выдать по d верблюдов.

7. Пусть A — n -элементное множество. Докажите, что для всякого $k \leq \frac{n-1}{2}$ можно расширить каждое k -элементное подмножество до $(k+1)$ -элементного (добавив один элемент) так, чтобы все полученные $(k+1)$ -элементные подмножества будут различны.

8. Перед тем, как начать выдавать сок на обеде, Александр Михайлович решил дать детям последний шанс. Он позвал 10 из них и принес 19 разноцветных кепок. Далее дети закрыли глаза, и на их головах оказались 10 кепок, остальные были спрятаны. По команде дети должны открыть глаза и сказать цвет своей кепки (ребенок видит только чужие кепки!). Смогут ли дети договориться так, чтобы хотя бы один из них гарантированно был прав?