

## Комбинаторика бесконечного

1. При каком наименьшем  $N$  среди  $N$  бесконечных десятичных дробей найдутся две, совпадающие в бесконечном числе разрядов?
2. Есть несколько монет шести номиналов: 100, 50, 10, 5, 2, 1. Разрешается поменять монету на любое количество монет меньших номиналов. Могут ли обмены происходить бесконечно долго?
3. Дана бесконечная последовательность попарно различных натуральных чисел, больших 1. Конечны ли множество таких чисел, что они больше своего номера в этой последовательности?
4. Дима ставит точку с натуральными координатами, проводит из нее два луча вправо и вверх, и закрашивает внутренность угла и его стороны. Следующую точку с натуральными координатами он выбирает среди незакрашенных, и так же строит и закрашивает угол. Может ли процесс продолжаться бесконечно?
5. Есть натуральное число  $x > 1$ . Каждую секунду Сергей Вадимович пишет вместо него число  $y = \frac{x \cdot (p - 1)^k}{p}$ , где  $p$  — какой-нибудь простой делитель числа  $x$ , а число  $k$  произвольно (и меняется от хода к ходу). Докажите, что рано или поздно у Сергея Вадимовича получится 1.
6. Джинн решил построить бесконечную башню из бесконечного количества кирпичей. На каждом кирпиче он написал натуральное число так, что для любого натурального числа  $k$  ровно на  $k$  кирпичах написан какой-нибудь делитель  $k$ . Докажите, что любое натуральное число можно найти на хотя бы одном кирпиче.
7. **Лемма Ньюмана.** Дан ориентированный граф с (a) конечным; (b) бесконечным множеством вершин. Будем называть вершину  $v$  графа потомком вершины  $u$  графа, если существует путь из  $u$  в  $v$ . Если есть стрелка из  $u$  в  $v$ , то  $v$  назовем ребенком вершины  $u$ . Известно, что все пути в графе конечны (в частности, нет циклов) и что выполнено следующее условие: для любых двух детей любой вершины графа у этих детей существует общий потомок. Докажите, что у любой вершины графа существует единственный потомок исходящей степени 0.