

Выпуклые фигуры. Теорема Хелли

Упр. На плоскости отмечены 4 точки, не лежащие на одной прямой. Сколько может существовать четырёхугольников с вершинами в этих точках?

Опр. Множество M точек на плоскости называется **выпуклым**, если для любых точек $A, B \in M$ весь отрезок AB принадлежит M .

1. Выпукло ли пересечение двух выпуклых множеств? А объединение?
 2. Выпуклое множество содержит три точки A, B, C , не лежащие на одной прямой. Докажите, что оно содержит весь треугольник ABC .
- Факт.** Всякий выпуклый многоугольник — пересечение конечного количества полуплоскостей. (А верно ли обратное?)
3. Один выпуклый многоугольник лежит внутри другого. Докажите, что периметр внутреннего многоугольника меньше, чем внешнего.

Теорема Хелли. На плоскости даны $n \geq 3$ выпуклых множеств, каждые три из которых имеют общую точку. Докажите, что есть точка, общая для всех n множеств.

4. Докажите теорему Хелли: (а) для $n = 4$; (б) для произвольного конечного n . (с) Верна ли она, если количество множеств бесконечно?
5. Арсений отметил на плоскости несколько точек так, что каждые три из них можно накрыть пятаком. Докажите, что все точки можно накрыть одним пятаком.
6. На плоскости отмечены несколько точек, причём расстояние между любыми двумя точками не превосходит 1. Докажите, что все точки можно накрыть кругом радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Можно ли улучшить эту оценку?

На самом деле теорема Хелли верна для бесконечного количества множеств, если каждое из них ограничено (помещается внутри какого-то круга) и замкнуто (содержит свою границу). С учётом этого предыдущая задача превращается в такой факт: любое множество диаметра 1 можно накрыть кругом радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (теорема Юнга).

7. Дана выпуклая ограниченная двумерная фигура. Назовём точку внутри неё центральной, если любая хорда, проведённая через эту точку, делится в отношении не более $2 : 1$ (то есть больший отрезок хорды не превышает удвоенного меньшего). (а) Используя бесконечную версию теоремы Хелли, докажите, что в любой выпуклой фигуре существует центральная точка. (б) Возможно ли, что она всего одна?
8. На плоскости даны несколько параллельных отрезков. Для любых трёх отрезков существует прямая, пересекающая их. Докажите, что найдётся прямая, пересекающая все отрезки.