

## Гомотетия

**Опр.** Гомотетией с центром в точке  $O$  и коэффициентом  $k$  называется отображение  $H_O^k$  плоскости на себя, которое любую точку  $M$  переводит в такую точку  $M'$ , что  $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ .

**Упр.** Гомотетия — преобразование плоскости?

**Свойства гомотетии.**  $H_O^k$  переводит:

- прямую в параллельную ей прямую;
- отрезок длины  $a$  в отрезок длины  $|k| \cdot a$ ;
- угол в равный ему угол;
- треугольник в подобный ему треугольник с коэффициентом подобия  $|k|$ ;
- окружность радиуса  $r$  в окружность радиуса  $|k| \cdot r$ ;

**Упр.** Докажите, что гомотетия сохраняет отношение на отрезке, то есть если точка  $M$  лежит на прямой  $AB$  и  $\frac{MA}{MB} = k_1$ , то  $\frac{M'A'}{M'B'} = k_1$ , где  $M', A', B'$  — образы точек  $M, A, B$  при гомотетии  $H_O^k$ .

**Упр.** Сколько существует гомотетий, переводящих:

- Отрезок в параллельный ему отрезок?
- Окружность в окружность, если их центры не совпадают?
- Треугольник в подобный ему треугольник со сторонами, параллельными его сторонам.

**Невероятная идея 1.** Если точка  $A$  переходит в точку  $A'$  при гомотетии с центром в точке  $O$ , то точки  $A, O$  и  $A'$  лежат на одной прямой.

**Невероятная идея 2.** Если отрезок  $AB$  переходит в отрезок  $A'B'$  при гомотетии, то  $AB \parallel A'B'$ .

**Невероятная идея 3.** Если какие-то фигуры (окружности, прямые) пересекались в точке  $A$ , то образы этих фигур при гомотетии пересекаются в образе точки  $A$ .

- Докажите, что в трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения боковых сторон лежат на одной прямой.
- Две равные окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  касаются окружности  $\omega$  внутренним образом в точках  $A$  и  $B$ . На  $\omega$  выбрана произвольная точка  $M$ .  $C$  и  $D$  — точки пересечения  $MA$  и  $MB$  с  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно. Докажите, что  $CD \parallel AB$ .
- Докажите, что три прямые, проведённые через середины сторон треугольника параллельно биссектрисам противолежащих углов, пересекаются в одной точке.
- Две окружности касаются внутренним образом в точке  $A$ . Секущая пересекает окружности в точках  $M, N, P, Q$  (в таком порядке). Докажите, что  $\angle MAP = \angle NAQ$ .

### Содержательные задачи

- На основаниях трапеции во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что отрезок, соединяющий их центры, проходит через точку пересечения диагоналей.
- Две окружности касаются друг друга в точке  $P$  и сторон некоторого угла с вершиной  $Q$ . Некая прямая, проходящая через  $Q$ , пересекает окружности в точках  $A, B, C, D$  так, что порядок точек на прямой  $Q, A, B, C, D$ . Докажите, что  $\angle APC = 90^\circ$ .
- В  $\triangle ABC$  вписанная и невписанная окружности касаются стороны  $BC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно.

(a)  $MP$  — диаметр вписанной окружности. Докажите, что точки  $A, P, N$  лежат на одной прямой.

(b) Пусть  $I$  — центр вписанной окружности,  $E$  — середина высоты  $AN$  треугольника  $ABC$ . Докажите, что точки  $E, N, I$  лежат на одной прямой.

(c) Пусть  $I_A$  — центр внеписанной окружности, касающейся  $BC$ . Докажите, что точки  $E, M, I_A$  лежат на одной прямой.

8. (Лемма Архимеда) В окружности  $\Omega$  проведена хорда  $AB$ . Окружность  $\omega$  касается  $AB$  в точке  $K$  и окружности  $\Omega$  в точке  $T$  внутренним образом.  $L$  — середина дуги  $AB$ , не содержащей точки  $T$ . Докажите, что точки  $K, T, L$  лежат на одной прямой.

9. К двум непересекающимся окружностям  $\omega_A$  и  $\omega_B$  проведена общая касательная  $AB$ , причём  $A \in \omega_A, B \in \omega_B$ . Окружность, построенная на  $AB$ , как на диаметре, повторно пересекает  $\omega_A$  и  $\omega_B$  в точках  $A'$  и  $B'$ . Докажите, прямые  $AB'$  и  $A'B$  пересекаются на линии центров  $\omega_A$  и  $\omega_B$ .