

Лемма об изогоналях

Прямые, проходящие через вершину угла и симметричные относительно его биссектрисы, называются **изогоналями**.

Критерий изогоналей. Даны угол AOB и точки P и Q внутри него. Обозначим за a_p и b_p расстояния от точки P до прямых AO и BO соответственно, а за a_q и b_q — расстояния от точки Q до тех же прямых. Тогда OP и OQ являются изогоналями тогда и только тогда, когда $a_p : b_p = b_q : a_q$.

Лемма об изогоналях. Даны угол AOB и точки P и Q внутри него, такие что OP и OQ — изогонали. Пусть AP и BQ пересекаются в точке X , а AQ и BP — в точке Y . Тогда OX и OY тоже являются изогоналями.

Замечание 1. Точки P и Q можно взять и снаружи угла, важно только, что OP и OQ — изогонали.

Замечание 2. Если какая-то пара прямых оказывается параллельной (AP и BQ или AQ и BP), то изогональ определяется как прямая, проходящая через O и параллельная той самой паре прямых.

1. В треугольнике ABC чевианы AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Оказалось, что $\angle B_1A_1C = \angle C_1A_1B$. Докажите, что AA_1 — высота $\triangle ABC$.
2. Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E , а прямые AB и DC — в точке F . На луче FE отмечена точка P так, что углы BPE и CPE равны. Докажите, что углы APE и DPE тоже равны.
3. На диагонали AC ромба $ABCD$ отмечена произвольная точка E . На прямых AB и BC выбраны точки N и M соответственно, так что $NE = AE$ и $ME = CE$. Прямые AM и CN пересекаются в точке K . Докажите, что точки K , E и D лежат на одной прямой.
4. Из вершины A параллелограмма $ABCD$ опущены перпендикуляры AM на BC и AN на CD . Пусть точка P — точка пересечения BN и DM . Докажите, что прямые AP и MN перпендикулярны.
5. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P . Точка Q лежит между параллельными прямыми BC и AD так, что прямая CD разделяет точки P и Q , а углы AQD и CQB равны. Докажите, что углы BQP и DAQ равны.
6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки I и J — центры вписанных окружностей треугольников ABC и ACD соответственно, а точки K и L — центры их внеписанных окружностей, касающихся сторон BC и CD соответственно. Докажите, что прямые IL и KJ пересекаются на биссектрисе угла BCD .
7. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC , CA и AB в точках D , E и F соответственно. Точка K является проекцией точки D на прямую EF . Точка H — ортоцентр треугольника ABC , точка A_1 диаметрально противоположна A в описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что DK — биссектриса угла HKA_1 .

Подсказка. Найдите биссектрису угла BKC .