

Счётность

Опр. Множества A и B называются *равномощными*, если существует биекция $f : A \rightarrow B$. Пишут: $A \cong B$.

Упр. Докажите: (a) $A \cong A$; (b) $A \cong B \Rightarrow B \cong A$;
(c) $A \cong B$ и $B \cong C \Rightarrow A \cong C$.

Упр. Конечные множества A и B равномощны $\Leftrightarrow A$ и B содержат одинаковое количество элементов.

Упр. Пусть A — множество чётных натуральных чисел. Докажите, что $A \cong \mathbb{N}$.

Опр. Множество A называется *счётным*, если $A \cong \mathbb{N}$.

Упр. Любое подмножество счётного множества либо конечно, либо счётно.

Упр. Пусть $M = \{A_1, A_2, \dots\}$ — счётное множество, где каждое A_i — конечное множество. Верно ли, что объединение всех множеств A_i всегда счётно?

Присказка. В тридесятом государстве бесконечно много граждан. В столице есть супер-гостиница с бесконечным количеством номеров. Все номера в супер-гостинице перенумерованы натуральными числами подряд начиная с 1.

Упр. Однажды, когда все номера в супер-гостинице были заняты, приехал еще один постоялец. Как найти ему отдельное место в этой гостинице, никого из нее не выселяя? А если приедут миллиард новых постояльцев?

1. Пусть есть две полностью заселённые супер-гостиницы. Первую закрыли на ремонт. Как найти всем постояльцам первой гостиницы отдельные места во второй гостинице, никого из второй не выселяя?
2. Любое ли счётное множество можно разбить на 2025 непересекающихся счётных множеств?

3. Ровно за минуту до Нового года Дед Мороз кладёт Васе под ёлку одну за другой по очереди 10 конфет, за полминуты до Нового года кладёт ещё 10 конфет (тоже по очереди), за четверть минуты — так же кладёт ещё 10, и так далее до бесконечности. Баба Яга за полминуты до Нового Года съедает конфету, которую Дед Мороз положил первой, за четверть минуты до Нового года съедает конфету, которую Дед Мороз положил второй, и т. д. Сколько конфет будет под ёлкой в Новый год?
4. Пусть A и B — счётные множества. Что можно сказать про мощности объединения, пересечения и разности A и B ?
5. Будем называть *словом* произвольную (не обязательно осмысленную) конечную последовательность букв русского языка. Докажите, что:
- (a) множество слов, состоящих из не более чем n символов, конечно;
 - (b) множество всех слов счётно.
6. (a) Может ли король обойти бесконечную шахматную доску, побывав на каждом поле ровно по одному разу?
- (b) Пусть есть счётное множество полностью заполненных супер-гостиниц. Все, кроме первой, закрыли на ремонт. Как найти всем постояльцам закрытых гостиниц отдельные места в первой гостинице, никого из нее не выселяя?
7. Докажите, что следующие множества счётны:
- (a) \mathbb{Z} ;
 - (b) \mathbb{Q} ;
 - (c) множество квадратных трёхчленов с целыми коэффициентами;
 - (d) множество чисел, являющихся корнями квадратных уравнений с целыми коэффициентами.
8. Докажите, что на любом числовом интервале найдётся:
- (a) хотя бы одно рациональное число;
 - (b) счётное множество рациональных чисел.