

Оценки в теории чисел

В этих задачах что-то возможно или невозможно не из соображений делимости (хотя они тоже могут учитываться), а из соображений величины чисел (большие или маленькие, близко или далеко друг от друга и т. д.)

1. Может ли число $n^6 + 2n^3 + 1$ быть кубом натурального числа при каком-то натуральном n ?
2. Верно ли, что к любому двузначному числу можно справа приписать (а) ещё две цифры; (б) ещё три цифры, чтобы получился квадрат натурального числа?
3. Будем называть натуральное число красивым, если в его десятичной записи поровну цифр 0, 1, 2, а других цифр нет. Может ли произведение двух красивых чисел быть красивым?
4. Может ли произведение пяти последовательных натуральных чисел равняться произведению пяти последовательных чётных натуральных чисел?
5. Верно ли, что между каждыми двумя последовательными пятыми степенями натуральных чисел найдётся куб натурального числа?
6. Существует ли такое натуральное n , что запись числа n^{2025} начинается на 2025?
7. Докажите, что числа 2026^n и $2026^n + 2^n$ содержат одинаковое количество цифр.