

Поворотная гомотетия

Поворотной гомотетией с центром O , коэффициентом $k > 0$ и углом φ называется композиция гомотетии с коэффициентом k и поворота на угол φ , имеющих общий центр O .

Замечание 1. Композицию можно делать в любом порядке: $R_O^\varphi \circ H_O^k = H_O^k \circ R_O^\varphi$.

Замечание 2. Коэффициент k можно считать положительным, так как в ином случае можно заменить φ на $\varphi + 180^\circ$, и коэффициент k умножится на -1 .

Теорема 1. Окружности S и S' пересекаются в точках A и B . Тогда существует единственная поворотная гомотетия с центром в точке A , которая переводит S в S' .

Более того, образом точки $X \in S$ будет точка X' , в которой прямая XB вторично пересекает S' (если $X = B$, то прямая XB вырождается в касательную к S в точке B ; если XB пересекает S' только в точке B , то X переходит в B).

Теорема 2. Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке P . Тогда существует единственная поворотная гомотетия, которая переводит A в A_1 и B в B_1 , причем ее центром является точка пересечения описанных окружностей треугольников AA_1P и BB_1P .

Следствие. Центр поворотной гомотетии, переводящей \overline{AB} в $\overline{A_1B_1}$, совпадает с центром поворотной гомотетии, переводящей $\overline{AA_1}$ в $\overline{BB_1}$.

Теорема 3. Преобразование подобия является поворотной гомотетией с коэффициентом $k \neq 1$ и углом φ тогда и только тогда, когда любой вектор \vec{a} переходит в вектор $k \cdot \vec{a}_\varphi$ (где \vec{a}_φ — это вектор, полученный из вектора \vec{a} поворотом на угол φ).

Упражнение. Что есть композиция двух поворотных гомотетий?

Ура, кажется, теория по поворотной гомотетии закончилась!

Поворотная гомотетия. Задачи

1. На катетах прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C вовне построили квадраты $ACKL$ и $BCMN$. Пусть CE — высота, опущенная на гипотенузу AB . Докажите, что угол LEM прямой.
2. Прямые, содержащие стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$, пересекаются в точке E . Пусть точка M — середина AB , а N — середина CD . Докажите, что центры описанных окружностей треугольников BCE , ADE и MNE лежат на одной прямой.
3. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D . Описанная окружность треугольника BCD вторично пересекает окружность, проходящую через точки A и D и касающуюся прямой CD , в точке K . Пусть точка M — середина BC , а N — середина AD . Докажите, что точки B , M , N и K лежат на одной окружности.
4. Окружности $\omega_1, \dots, \omega_n$ пересекаются в точке O . Восьмиклассник прыгает из точки X_i окружности ω_i в такую точку X_{i+1} окружности ω_{i+1} (считаем, что $n + 1 = 1$), что прямая X_iX_{i+1} проходит через точку пересечения окружностей ω_i и ω_{i+1} , отличную от O . Докажите, что через n прыжков он вернется в начальную точку.
5. Две окружности пересекаются в точках A и B , а хорды AM и AN касаются этих окружностей. Треугольник MAN достроен до параллелограмма $MANC$, точка P — середина отрезка BN , а точка Q — середина отрезка MC . Докажите, что углы ANC и APQ равны.