

Теория Рамсея

Вопрос 1 Среди любых 6 человек найдутся трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых людей?

Вопрос 2 Среди любых 9 человек найдутся трое попарно знакомых, либо четверо попарно незнакомых людей?

1. Назовем компанию людей $(m; n)$ -интересной, если в ней можно выбрать m попарно знакомых, либо n попарно незнакомых людей. Докажите, что: (a) Максим и 9 его знакомых; (b) Максим и 9 с ним незнакомых; (c) Максим и 17 других людей являются $(4; 4)$ -интересными компаниями. (d) Докажите, что 14 человек являются $(3; 5)$ -интересной компанией.

Определение. Рассмотрим полный граф, ребра которого раскрашены в два цвета. Определим $R(m, n)$ при $m, n \geq 2$ наименьшее число вершин в таком графе, при котором заведомо найдется полный подграф первого цвета на m вершинах, либо полный подграф второго цвета на n вершинах.

Теорема Рамсея. $R(m, n)$ существует для любых натуральных m и n .

2. (a) Докажите, что $R(m, n) = R(n, m)$. (b) Найдите $R(n, 2)$.

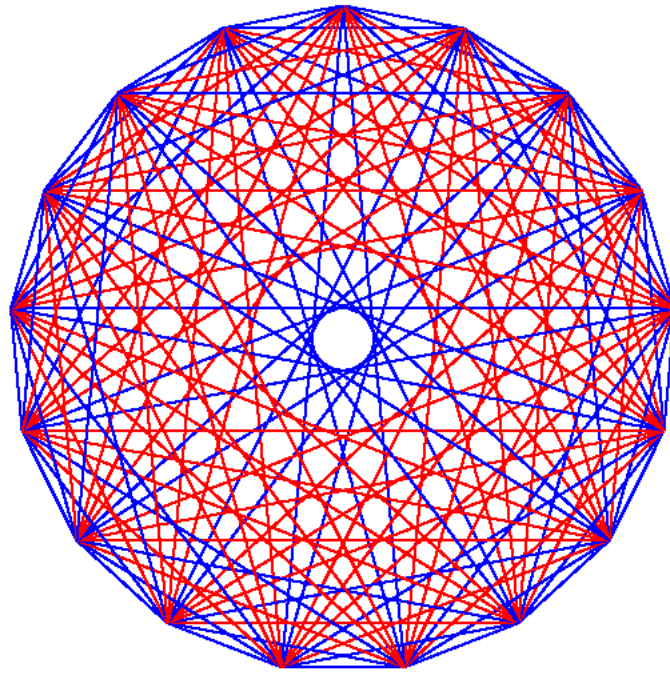
3. Докажите, что:

(a) $R(m, n) \leq R(m, n-1) + R(m-1, n)$ при $m, n \geq 3$;

(b) $R(m, n) \leq C_{m+n-2}^{m-1}$.

(c) Докажите теорему Рамсея.

4. Найдите $R(4, 4)$.



Замечание: $R(4, 5) = 25$, $R(4, 6)$ и $R(5, 5)$ – науке неизвестны.

5. Даны 6 произвольных иррациональных чисел. Докажите, что можно выбрать из них 3 числа x, y, z так, что числа $x + y, y + z, z + x$ иррациональны.

6. Обобщите теорему Рамсея на случай трех цветов.

Теперь ясно, что можно применять теорему Рамсея для нескольких цветов.

7. **Теорема Шура.** Все натуральные числа покрашены в несколько цветов. Тогда можно выбрать три одноцветных числа x, y, z , для которых $x + y = z$.

8. Докажите, что

$$R((r - 1)(s - 1) + 1, (r - 1)(s - 1) + 1) > (R(r, r) - 1)(R(s, s) - 1).$$

9. **Бесконечная теорема Рамсея.** Ребра полного графа на бесконечном числе вершин покрашены в два цвета. Докажите, что в нем найдется бесконечный одноцветный подграф.