

## Случайности не случайны

**Опр.** Пусть задано некоторое вероятностное пространство  $(\Omega, \mathbb{P})$ . *Случайной величиной*, заданной на этом пространстве, называется любое отображение  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . То есть каждому элементарному исходу сопоставляется какое-то число.

**Примеры.** Зачастую случайная величина берется вполне конкретная. Например, количество орлов, если мы 10 раз подбросили монетку, сумма очков на кубике при нескольких бросках подряд и т. п.

**Загадка.** Пусть  $X, Y$  — случайные величины, заданные на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathbb{P})$ . Подумайте, что за объект скрывается под записью  $\{X = 1\}$ ?  $X + Y$ ? Что в таком случае значит запись  $\mathbb{P}(X + Y = 1)$ ?

**Опр.** Математическим *ожиданием* случайной величины  $X$ , определенной на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathbb{P})$ , называется величина

$$\mathbb{E}X = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) \cdot X(\omega).$$

1. Влад уговорил маму сыграть с ним в такую игру. Влад называет целое число  $N$ , и если номер первого встреченного ими автомобиля оказывается больше или равен  $N$ , то Влад получает  $N$  рублей, в противном случае Влад платит маме 100 рублей. Номер автомобиля — число от 000 до 999, все варианты равновероятны.

(а) Выразите через  $N$  мат. ожидание выигрыша.

(б) Какое  $N$  надо назвать Владу, чтобы максимизировать средний выигрыш?

2. Пусть  $X, Y$  — случайные величины, заданные на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathbb{P})$ . Докажите свойства мат. ожидания:

(а) Если  $\forall \omega \in \Omega : X(\omega) \leq Y(\omega)$ , то  $\mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y$ .

(б) (*Линейность мат. ожидания*).

- $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$ ;

- $\mathbb{E}[\lambda X] = \lambda \mathbb{E}X$ , где  $\lambda \in \mathbb{R}$  — некоторое число.

(с) (*Другая формула для нахождения мат. ожидания*). Пусть область значений  $X$  — некоторое множество  $M$ . Тогда

$$\mathbb{E}X = \sum_{m \in M} \mathbb{P}(X = m) \cdot m.$$

(д) (*Мат. ожидание индикатора*). Пусть  $\mathbb{I} = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A \\ 0, & \text{если } \omega \notin A \end{cases}$  для некоторого события  $A$ . Такая случайная величина называется индикатором. Докажите, что  $\mathbb{E}\mathbb{I} = \mathbb{P}(A)$ .

(е) (Неравенство Маркова).  $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}X}{a}$ .

Подсказка: рассмотрите индикатор для события  $\{X \geq a\}$ , а потом внимательно изучите пункты выше:)

Прикольная идея. Линейность мат. ожидания открывает нам очень удобный способ его подсчета — через индикаторы.

3. В группе профи 31 человек. Во время ложного срабатывания пожарной сигнализации преподаватели вывели всех учеников из учебной аудитории. Когда звон прекратился, дети были пересчитаны, а пожарную уведомили о ложном срабатывании, дети вернулись и быстро сели на какие-то места, не обязательно свои. Случайная величина  $X$  равна количеству детей, севших на свое место.

(а) Представьте  $X$  как сумму индикаторных случайных величин.

(b) Найдите  $\mathbb{E}X$ .

4. Помните листочек на усреднение? Напомню условие пятой задачи:

*У инженера Саши есть  $d$  лампочек и  $n$  переключателей. Каждый из переключателей подсоединён к некоторому набору лампочек. При нажатии на переключатель все лампочки, к которым он присоединён, меняют своё состояние: выключенные загораются, включённые — гаснут. Каждая лампочка присоединена хотя бы к одному переключателю.*

Элементарные исходы вероятностного пространства —  $2^n$  комбинаций нажатий на переключатели. Случайная величина  $X$  равна количеству включенных лампочек.

(а) Представьте  $X$  как сумму индикаторных случайных величин.

(b) Найдите  $\mathbb{E}X$ .

(с) Знакомо? Какой вывод можно сделать?

Это был путь длиной в 3 листка. Идея усреднения работает для мат. ожидания!!!!

5. Пусть  $\mathbb{E}X = a$ . Докажите, что  $\exists \omega \in \Omega$ , такой что  $X(\omega) \geq a$ .

6. В неориентированном графе  $n$  вершин и  $nd/2$  рёбер,  $d \geq 1$ . Докажите, что существует такое упорядочение вершин графа  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ , в котором каждая вершина встречается ровно один раз и более  $d$  из  $n$  пар  $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_n, v_1)$  являются ребрами графа.

7. Докажите, что ребра полного графа на  $2^n$  вершинах ( $n > 1$ ) можно раскрасить в два цвета так, чтобы не нашлось полного одноцветного подграфа на  $2n$  вершинах.