

Вопросы к зачёту

Множества и отображения

1. Способы задания множеств. Принадлежность, объединение, пересечение, разность, дополнение. $(B \subset A) \Leftrightarrow (B \cap A = B)$. Отображение. Инъективное, сюръективное, биективное отображение. Композиция. Обратное отображение. Критерий обратимости отображения. Достаточное условие биективности композиции. Необходимые условия инъективности и сюръективности композиции.
2. Равномощность множеств. Счётность. Любое подмножество счётного множества либо конечно, либо счётно. Супер-гостиница. Подселить конечное число постояльцев. Подселить всех из другой супер-гостиницы. Счётность \mathbb{Z} . Заселить счётное число супер-гостиниц в одну. Счётность \mathbb{Q} . На любом числовом интервале найдется счетное множество рациональных чисел.

Алгебра

3. Неравенство о среднем арифметическом и геометрическом: доказательство по индукции. Пример применения: задача на минимизацию выражения с расщеплением одного из слагаемых. Неравенство о среднем гармоническом.
4. Метод Штурма. Поведение выражений при сближении переменных с фиксированной суммой; с фиксированным произведением. Примеры применения метода: неравенство о среднем геометрическом, арифметическом и квадратическом; максимизация числа рёбер в « n -дольном» графе; максимизация суммы квадратов двузначных чисел; максимизация площади вписанного n -угольника.
5. Транснеравенство. Примеры применения. Неравенство Чебышёва.

Теория чисел

6. Функция Эйлера. Чётность для $n > 2$. Тождество Гаусса. Значение $\varphi(m^k)$. Мультипликативность. Общая формула $\varphi(n)$. Соотношение $\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n) \cdot \frac{\text{НОД}(m, n)}{\varphi(\text{НОД}(m, n))}$.
7. Полная и приведённая системы вычетов. Теорема Эйлера.
8. Показатель числа по модулю. Определение и свойства.
9. Доказать, что любая степень может начинаться с любой комбинации цифр.

Геометрия

10. Определение вектора как класса направленных отрезков, коллинеарность. Действия с векторами.
11. Определение материальной точки, центра масс. Основная теорема и ее следствие. Правило рычага. Правило группировки. Пример задачи на идею группировки по-разному.
12. Определение движения, его свойства, элементарные движения. Теорема о задании движения. Теорема Шаля. Классификация движений с точки зрения количества неподвижных точек и рода. Композиция элементарных движений.
13. Определение гомотетии, её свойства. Упражнения 1-3.
14. Определение поворотной гомотетии. Теоремы 1-3. Композиция поворотных гомотетий.

Комбинаторика

15. Идея усреднения. Задача про подграф на 6 вершинах. Обе задачи про лампочки.
16. Выбор экстремальных объектов в графах. Вершина максимальной степени, максимальное паросочетание, самый длинный путь. Подвешивание графа. Примеры применения.
17. Ориентированный граф. Свойство степеней вершин. Сильная и слабая связность. Компоненты сильной связности. Турнир. Транзитивные турниры и их количество. Теорема о пути в турнире. Лемма о царях.
18. Идея последовательной стабилизации. Примеры применения.
19. Лемма Холла и её доказательство полной индукцией. Альтернативные версии леммы Холла.
20. Числа Рамсея и их свойства. Теорема Рамсея. Теорема Рамсея для нескольких цветов. Два подхода к доказательству. Лемма Шура. Бесконечная теорема Рамсея.

Комбинаторная геометрия

21. Диаметр множества. Примеры. Задача о покрытии треугольника квадратами.
22. Задача о разбиении на прямоугольники. Три решения.
23. Определение выпуклого множества. Выпуклость пересечения. Выпуклое множество с тремя точками содержит треугольник.
24. Теорема Хелли для конечного числа фигур.
25. Теорема Юнга о накрытии кругом для конечного множества.

Теория вероятностей

26. Определения: элементарный исход, функция вероятности, вероятностное пространство, событие, вероятность события. Свойства вероятности, формула вероятности события в случае равновероятных элементарных исходов.

27. Независимость событий. Задача 4 (независимость результатов бросков кубика друг от друга).

28. Условная вероятность. Задача про русскую рулетку. Формула полной вероятности.

29. Определение случайной величины и математического ожидания. Три способа подсчета мат. ожидания. Свойства мат. ожидания. Неравенство Маркова.

30. Идея усреднения и мат. ожидание. Задачи 4 и 5.