

## Заключительная олимпиада

### Довывод

1. На дискотеке присутствовало 20 человек. В каждом танце участвовало двое — мальчик и девочка. Оказалось, что десятеро из них танцевали с тремя партнёрами, двое (Саша и Женя) — с пятью и остальные восемь — с шестью. Докажите, что Саша и Женя разного пола.
2. Натуральные числа  $a, b, c, d$  попарно взаимно просты и удовлетворяют равенству  $ab + cd = ac - 40bd$ . Докажите, что среди них найдутся три числа, одно из которых равно сумме двух других.
3. Дима и Маша хотят показать детям фокус. Сначала дети вписывают в клетки шахматной доски числа  $1, 2, \dots, 64$  по своему усмотрению, а затем Маша смотрит на доску и закрывает доминошкой какие-то две соседние клетки. Дима, который не видел предыдущих действий, должен прийти и угадать, в какой клетке какое число закрыто. Удастся ли фокус Диме с Машей?
4. Разбейте все положительные рациональные числа на два непустых непересекающихся подмножества  $X$  и  $Y$  так, чтобы произведение любых двух чисел из разных подмножеств лежало в  $X$ , а произведение любых двух чисел (возможно, совпадающих) из одинаковых подмножеств лежало в  $Y$ .
5. Дан выпуклый шестиугольник, каждая большая диагональ которого делит его площадь пополам. Докажите, что эти диагонали пересекаются в одной точке.

### Вывод

6. Саша и Юра по очереди вписывают числа  $1, 2, \dots, n^2$  в клетки квадрата  $n \times n$  без повторений. Саша выигрывает, если в конце игры сумма чисел в некотором столбце делится на  $n$ . При каких  $n$  Юра сможет ему помешать?
7. Сколько существует натуральных  $N \leq 2025$  таких, что найдутся действительные  $x, y, z$ , для которых  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ , а  $\sqrt{x + N} + \sqrt{y + N} + \sqrt{z + N}$  — целое число?
8. На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  выбирается переменная точка  $D$ , а на сторонах  $AB, AC$  отмечаются точки  $E, F$  так, что  $BD = DE, CD = DF$ . Докажите, что описанная окружность треугольника  $AEF$  проходит через фиксированную точку, отличную от  $A$ .

### Послевывод

9. Дано натуральное число  $n$ . Последовательность  $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$  обладает следующими двумя свойствами:

- для любого  $0 \leq i \leq 2n$  выполнено  $a_i \in [0; n]$ ;
- для любого  $0 \leq k \leq n$  и любого целого неотрицательного  $m$  среди чисел  $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{2k}$  найдётся число, равное  $\left\lfloor \frac{k}{2^m} \right\rfloor$ .

Найдите количество таких последовательностей.

## Заключительная олимпиада

### Довывод

1. На дискотеке присутствовало 20 человек. В каждом танце участвовало двое — мальчик и девочка. Оказалось, что десятеро из них танцевали с тремя партнёрами, двое (Саша и Женя) — с пятью и остальные восемь — с шестью. Докажите, что Саша и Женя разного пола.
2. Натуральные числа  $a, b, c, d$  попарно взаимно просты и удовлетворяют равенству  $ab + cd = ac - 40bd$ . Докажите, что среди них найдутся три числа, одно из которых равно сумме двух других.
3. Дима и Маша хотят показать детям фокус. Сначала дети вписывают в клетки шахматной доски числа  $1, 2, \dots, 64$  по своему усмотрению, а затем Маша смотрит на доску и закрывает доминошкой какие-то две соседние клетки. Дима, который не видел предыдущих действий, должен прийти и угадать, в какой клетке какое число закрыто. Удастся ли фокус Диме с Машей?
4. Разбейте все положительные рациональные числа на два непустых непесекающихся подмножества  $X$  и  $Y$  так, чтобы произведение любых двух чисел из разных подмножеств лежало в  $X$ , а произведение любых двух чисел (возможно, совпадающих) из одинаковых подмножеств лежало в  $Y$ .
5. Дан выпуклый шестиугольник, каждая большая диагональ которого делит его площадь пополам. Докажите, что эти диагонали пересекаются в одной точке.

### Вывод

6. Саша и Юра по очереди вписывают числа  $1, 2, \dots, n^2$  в клетки квадрата  $n \times n$  без повторений. Саша выигрывает, если в конце игры сумма чисел в некотором столбце делится на  $n$ . При каких  $n$  Юра сможет ему помешать?
7. Сколько существует натуральных  $N \leq 2025$  таких, что найдутся действительные  $x, y, z$ , для которых  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ , а  $\sqrt{x + N} + \sqrt{y + N} + \sqrt{z + N}$  — целое число?
8. На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  выбирается переменная точка  $D$ , а на сторонах  $AB, AC$  отмечаются точки  $E, F$  так, что  $BD = DE, CD = DF$ . Докажите, что описанная окружность треугольника  $AEF$  проходит через фиксированную точку, отличную от  $A$ .

### Послевывод

9. Дано натуральное число  $n$ . Последовательность  $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$  обладает следующими двумя свойствами:

- для любого  $0 \leq i \leq 2n$  выполнено  $a_i \in [0; n]$ ;
- для любого  $0 \leq k \leq n$  и любого целого неотрицательного  $m$  среди чисел  $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{2k}$  найдётся число, равное  $\left\lfloor \frac{k}{2^m} \right\rfloor$ .

Найдите количество таких последовательностей.