Заключительная олимпиада 8 класса. 23.07.2007

Решения задач

1. Можно ли составить три несократимые дроби, произведение которых равно 1, использовав в качестве числителей и знаменателей этих дробей шесть чисел из набора $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$? (Каждое число можно использовать один раз или не использовать вовсе.)

Решение. Ответ: можно.
Например, $\frac{1}{6}$, $\frac{9}{2}$ и $\frac{4}{3}$.

2. Положительное число x таково, что $[x] \cdot \{x\} = 100$. Чему может быть равно число $[x^2] - [x]^2$? (Как обычно, $[y]$ — это целая часть числа y, а $\{y\}$ — дробная часть числа y.)

Решение. Отметим, что

$$[x^2] = [([x] + \{x\})^2] = [[x]^2 + 2[x]\{x\} + \{x^2\}] = [x]^2 + 200 + [\{x^2\}] = [x]^2 + 200,$$

поскольку $0 < \{x\}^2 < 1$.

3. На клетчатой доске 100×100 расставлены несколько шахматных коней. Каждую минуту какой-нибудь один из коней делает ход на свободное поле. Через некоторое время оказалось, что каждый конь побывал на всех полях ровно по одному разу и вернулся на исходное поле. Докажите, что был момент, когда все кони стояли не на своих полях.

Решение. Рассмотрим момент, когда последний из коней покинул свое исходное поле A. К этому моменту на поле A еще не успел побывать ни один из остальных коней, а следовательно, никакой конь еще не успел вернуться на свое исходное поле. Таким образом, все кони в рассматриваемый момент стояли не на своих местах.

4. Дан остроугольный треугольник ABC такой, что $\angle B = 60°$. Его высоты AD и CE пересекаются в точке H. Докажите, что центр описанной окружности этого треугольника лежит на биссектрисе угла $\angle CHD$.

Решение. Заметим, что треугольник ADB прямоугольный с углом $60°$, поэтому DB равен половине AB. Аналогично, EB равен половине CB. Отразим D, H, E относительно биссектрисы угла $\angle B$. Ясно, что D и E перейдут в середины AB и CB соответственно. Тогда H перейдет в точку пересечения серединных перпендикуляров к сторонам AB и CB, то есть в точку O (центр описанной окружности треугольника ABC). Пусть биссектриса угла $\angle CHD$ пересекает AB и BC в точках K и L. Ясно, что KBL — равносторонний, поэтому биссектриса угла B перпендикулярна биссектрисе угла $\angle CHD$. Тогда при симметрии относительно первой вторая переходит в себя. В частности, образ H лежит на биссектрисе угла $\angle CHD$. То есть O лежит на этой биссектрисе.

5. Натуральные числа a, b, c таковы, что число $a - b$ — простое и $3c^2 = c(a + b) + ab$. Докажите, что $8c + 1$ — точный квадрат.

Решение. Пусть $a - b = p$. По условию $p \in \mathbb{P}$. Добавим к обеим частям c^2. Получим, что

$$4c^2 = (a + c)(b + c).$$

Заметим, что разность двух скобок в правой части равна p, поэтому либо они взаимнопросты, либо их НОД равен p.

Первый случай: их НОД равен p. Тогда $a + c = (k + 1)p$ и $b + c = kp$. Значит, $k(k + 1)$ — это точный квадрат, что, очевидно, невозможно при натуральном k.

Второй случай: они взаимнопросты. Тогда каждая из скобок — точный квадрат (т.к. их произведение равно $(2c)^2$). Пусть $a + c = k^2$ и $b + c = l^2$. Тогда $k^2 - l^2 = p$, т.е. $(k - l)(k + l) = p$. Поэтому $(k - l) = 1$ и $(k + l) = p$. Но тогда $k = \frac{p+1}{2}$ и $l = \frac{p-1}{2}$. Мы знаем, что $4c^2 = k^2 l^2$, т.е. что $2c = kl$. Тогда $2c = \frac{p+1}{2}\frac{p-1}{2}$. Значит, $8c = p^2 - 1$. Поэтому $8c + 1 = p^2$.

6. Положительные вещественные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$ и $a^3 > 36$. Докажите неравенство $\frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 > ab + bc + ac$.

Решение. $\frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 = \frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 = \frac{a^2}{12} + (\frac{a}{2} - b - c)^2 + ab + ac - 2bc \geq \frac{3}{a} + ab + ac - 2bc = 3bc + ab + ac - 2bc = ab + bc + ac$.

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω с центром в точке O. Биссектриса угла $\angle ABD$ пересекает сторону AD в точке K, а окружность ω в точке M; биссектриса угла $\angle CBD$ пересекает сторону CD в точке L, а окружность ω в точке N. Известно, что $KL \| MN$. Докажите, что описанная окружность треугольника MON проходит через середину BD.

Решение. Заметим, что $\frac{BM}{BK} = \frac{BN}{BL}$ и точки M и N являются серединами дуг AD и CD соответственно. Очевидно, что тогда касательные к окружности ω в точках M и N параллельны сторонам AD и CD соответственно. Пусть P — точка пересечения этих касательных.

Сделаем гомотетию с центром в точке B и коэффициентом $\frac{BM}{BK}$. Тогда точки K и L перейдут в точки M и N соответственно. Следовательно, прямые AD и CD перейдут в касательные к окружности ω. Тогда точка D переходит в точку P. То есть точки B, D и P лежат на одной прямой.

Пусть Q — середина отрезка BD. Очевидно, что $OM \perp MP$, $ON \perp NP$ и $OQ \perp QP$. Следовательно, точки O, P, Q, M и N лежат на окружности с диаметром OP.

8. В лагерь приехали m мальчиков и d девочек. Каждая девочка знакома не более, чем с 10 мальчиками, а каждый мальчик — не менее, чем с одной девочкой. Оказалось, что у каждого мальчика больше знакомых девочек, чем у любой знакомой с ним девочки — знакомых мальчиков. Докажите, что $d \geq 1,1m$.

Решение. Давайте дадим каждой девочке по одинаковому яблоку (всего яблок, разумеется, d). Пусть девочка, имеющая k знакомых мальчиков, разрежет свое яблоко на k равных частей и раздаст эти части знакомым мальчикам. Рассмотрим любого мальчика M и знакомых с ним девочек. Пусть наибольшее количество знакомых мальчиков у этих девочек равно n. Тогда мальчик M имеет не менее $n+1$ знакомой девочки и получит не менее, чем по $\frac{1}{n}$ яблока от каждой из них, следовательно, у этого мальчика окажется не менее, чем $\frac{n+1}{n} \geq \frac{11}{10}$ яблока. Таким образом, у всех m мальчиков окажется не менее, чем $\frac{11m}{10}$ яблок. так как общее количество яблок равно d, получаем, что $d \geq 1,1 \cdot m$.