Двадцать третья Летняя Многопредметная Школа Кировской области

Вишкиль. 3-28 июля 2007 г.

8 КЛАСС, ГРУППА ПРОФИ

Преподаватели:
А. В. Пастор, А. Л. Глазман, Д. М. Столяров

Вступительная олимпиада. 04.07.2007

1. В однокруговом чемпионате школы по шахматам участвовали 46 учеников. По окончании чемпионата выяснилось, что каждый из них выиграл ровно у двух и проиграл ровно двум своим одноклассникам. Докажите, что хотя бы одна партия закончилась вничью.

2. Миша и Боря записали в тетрадях одно и тоже натуральное число. Учитель предложил Мише, вычеркнув несколько цифр, получить наименьшее девятизначное число, а Боре предложил получить таким же способом наибольшее девятизначное число. У Миши получилось число 123456789, а у Бори — 987654321. Докажите, что, по крайней мере, один из них решил предложенную учителем задачу не правильно.

3. Заданы числа a^2, b^2, c^2 (a, b и c — положительные числа). Разрешается выполнять операции сложения, вычитания и умножения, а также запоминать любое количество промежуточных результатов и сравнивать их между собой. Можно ли, используя только эти операции, проверить справедливость равенства $a + b = c$?

4. Пусть ℓ — биссектриса внешнего угла C треугольника ABC. Прямая, параллельная ℓ и проходящая через середину K стороны AB, пересекает сторону AC в точке E. Найти CE, если $AC = b$ и $CB = a$.

5. Можно ли разбить числа от 1 до 100 на три группы таким образом, чтобы в первой группе сумма чисел делилась на 102, во второй группе — на 203, а в третьей группе — на 304?

Преобразования плоскости. 05.07.2007

1. Докажите, что а) движение б) преобразование подобия переводит отрезки в отрезки.

2. Равные окружности S_1 и S_2 касаются окружности S внутренним образом в точках A_1 и A_2. Произвольная точка C окружности S соединена отрезками с точками A_1 и A_2. Эти отрезки пересекают окружности S_1 и S_2 в точках B_1 и B_2. Докажите, что $A_1A_2 \parallel B_1B_2$.

3. На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE (точка C, разумеется, лежит на отрезке AE). Точки M и P — середины отрезков AD и BE. Докажите, что треугольник CPM — равносторонний.

4. (Лемма Архимеда.) Пусть A и B — фиксированные точки окружности S. Выберем одну из дуг окружности S с концами A и B и рассмотрим произвольную окружность, касающуюся отрезка AB и выбранной дуги. Обозначим точки касания через P и Q соответственно. Докажите, что все прямые PQ пересекаются в одной точке.

5. (Точка Торричелли.) Пусть T — такая точка плоскости, что сумма расстояний от нее до вершин данного остроугольного треугольника минимальна. Докажите, что все стороны треугольника видны из нее под углом $120°$.

6. В квадрате со стороной 1 расположена фигура, расстояние между любыми двумя точками которой не равно 0,001. Докажите, что площадь этой фигуры не превосходит: а) 0,34; б) 0,287.

Разнобой. 05.07.2007

1. В клетках таблицы 8×8 расставлены целые числа. Разрешается прибавлять по 1 ко всем числам любого квадрата 3×3 или 4×4. Верно ли, что при любой начальной расстановке чисел с помощью таких операций можно сделать все числа четными?

2. Пятнадцать простых чисел образуют арифметическую прогрессию с разностью d. Докажите, что $d > 30000$.

3. Решите в натуральных числах уравнение $3 \cdot 2^x + 1 = y^2$.

4. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — такой набор различных натуральных чисел, что ни одно из них не является началом другого (скажем, 12 является началом числа 12034, но не является началом числа 1120). Докажите,

что
$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k} < 3.$$

5. В круг радиуса 3 поместили несколько кругов с суммой радиусов 25. Докажите, что найдется прямая, пересекающая не менее 9 из них.

6. На столе лежат две кучки спичек: в одной — 100 спичек, в другой — 252. Денис и Рома играют в следующую игру. Каждый из них своим ходом берет несколько спичек из одной кучки так, чтобы их количество являлось делителем числа спичек в другой кучке. Выигрывает игрок, взявший последнюю спичку. Первым ходит Рома. Кто выигрывает при правильной игре?

Преобразования плоскости: связь с векторами. 06.07.2007

1. Пусть F — произвольное преобразование подобия (возможно, являющееся движением, т. е. коэффициент подобия может быть равен 1).

а) Докажите, что если $\overline{AB} = \overline{CD}$, то $\overline{F(A)F(B)} = \overline{F(C)F(D)}$.

Исходя из утверждения пункта **а)** мы можем однозначно определить образ произвольного вектора $\overline{v}$ и обозначить его $F(\overline{v})$.

б) Докажите, что для любых векторов $\overline{u}$ и $\overline{v}$ и числа $k \in \mathbb{R}$ верны равенства $F(\overline{u} + \overline{v}) = F(\overline{u}) + F(\overline{v})$ и $F(k\overline{u}) = kF(\overline{u})$.

2. Докажите, что движение F является

а) параллельным переносом тогда и только тогда, когда переводит каждый вектор в себя;

б) центральной симметрией тогда и только тогда, когда переводит каждый вектор в противоположный;

в) поворотом на угол α тогда и только тогда, когда для любого вектора $\overline{u}$ $\angle(\overline{u}, F(\overline{u})) = \alpha$.

г) Докажите, что преобразование подобия является гомотетией с коэффициентом $k \neq 1$ тогда только тогда, когда для любого вектора $\overline{u}$ $F(\overline{u}) = k\overline{u}$.

3. Даны две пересекающиеся прямые. Докажите, что композиция осевых симметрий относительно этих прямых есть поворот с центром в точке пересечения прямых и найдите угол этого поворота.

4. а) Докажите, что композиция двух поворотов (их центры не обязательно совпадают!), сумма углов которых не кратна 360°, есть поворот.

Найдите его угол и центр. б) А что будет, если сумма углов кратна $360°$?

5. Докажите, что композиция двух гомотетий (опять же, их центры не обязательно совпадают) с коэффициентами k_1 и k_2, где $k_1 k_2 \neq 1$, является гомотетией. Найдите ее центр и коэффициент. Что будет, если $k_1 k_2 = 1$?

6. В треугольнике ABC проведены медиана CM и высота CH. На плоскости выбрана произвольная точка P, через которую проведены прямые, перпендикулярные CA, CM и CB. Обозначим точки пересечения этих прямых с прямой CH через A_1, M_1 и B_1 соответственно. Докажите, что $A_1M_1 = B_1M_1$.

Неравенства. 06.07.2007

1. Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$.

2. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Докажите, что $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)$.

3. Даны положительные числа a и b такие, что $a + b \leq 2$. Докажите неравенство $\frac{a}{b+ab} + \frac{b}{a+ab} \geq 1$.

4. Сумма положительных чисел $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq 1/2$. Докажите, что $(1 - a_1)(1 - a_2) \ldots (1 - a_n) \geq 1/2$.

5. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $a \geq b \geq c \geq d$ и $a + b + c + d \leq 1$. Докажите, что $a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 7d^2 \leq 1$.

6. Положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что $a_1+a_2+\ldots+a_n = n$. Докажите, что $(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \leq 2^n$.

7. Докажите, что $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$.

Вектроы и их свойства. 07.07.2007

1. Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — два неколлинеарных вектора. Докажите, что любой вектор $\overline{c}$ можно единственным образом представить в виде $\overline{c} = u\overline{a} + v\overline{b}$, где u и v — вещественные числа.

2. Дано n попарно неколлинеарных векторов $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}$ $(n \geq 3)$ такие, что $\overline{a_1}+\ldots+\overline{a_n} = \overline{0}$. а) Докажите, что существует выпуклый n-угольник $A_1 \ldots A_n$ такой, что набор векторов $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots, \overline{A_nA_1}$ совпадает с набором $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}$. б) Сколько существует различных многоугольников, удовлетворяющих условию а)?

3. На прямой лежит одиннадцать точек $M_1, \ldots, M_{11}$. Вне прямой дана точка F. Можно ли на отрезках $FM_1, \ldots, FM_{11}$ расставить стрелки так, чтобы сумма всех полученных векторов была равна $\overline{0}$?

4. В пятиугольнике $ABCDE$ точки M, N, K, L — середины сторон AB, BC, CD и DE соответственно, P и Q — середины отрезков MK и NL соответственно. Докажите, что $PQ \| AE$ и найдите отношение $\frac{PQ}{AE}$.

5. На окружности радиуса 1 с центром O дано $2n+1$ точек $P_1, \ldots, P_{2n+1}$, лежащих по одну сторону от некоторого диаметра. Докажите, что $\left|\overline{OP_1} + \ldots + \overline{OP_{2n+1}}\right| \geq 1$.

6. Дан многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$. Пусть $B_1, \ldots, B_n$ — середины его сторон $A_1A_2, \ldots, A_nA_1$ соответственно. От каждой точки B_i отложим во внешнюю сторону отрезок B_iC_i, перпендикулярный соответствующей стороне многоугольника и имеющий длину, равную длине этой стороны. Докажите, что $\overline{B_1C_1} + \ldots + \overline{B_nC_n} = \overline{0}$.

Разнобой. 07.07.2007

1. Решите в натуральных числах уравнение $x^3 + 13 = 2^y$.

2. В графе с n вершинами степень каждой вершины не превосходит 5. Докажите, что вершины можно раскрасить в 3 цвета так, что ребер с одноцветными концами будет не более $\frac{n}{2}$.

3. В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Даша вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет ее в то же место колоды. Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх, как бы ни действовала Даша.

4. На продолжении стороны BC треугольника ABC за точку B отмечена точка D таким образом, что $BD = BA$. Точка M — середина стороны AC. Биссектриса $\angle ABC$ пересекает прямую DM в точке P. Докажите, что $\angle BAP = \angle ACB$.

5. a, b, c — стороны треугольника с периметром 1. Докажите неравенство:

$$\frac{1+a}{1-2a} + \frac{1+b}{1-2b} + \frac{1+c}{1-2c} \geq 12.$$

6. Докажите, что множество середин хорд данной окружности, проходящих через данную точку M внутри окружности, есть окружность.

7. Из угла прямоугольного биллиарда с целыми сторонами пущен шар по биссектрисе этого угла. Докажите, что после нескольких отражений от стенок биллиарда (по закону “угол падения равен углу отражения”) шар снова попадет в один из углов биллиарда.

Графы. Раскраски и прочее. 09.07.2007

1. Каждый из 450 депутатов Государственной думы ударил ровно одного из своих коллег. Докажите, что можно составить комиссию из 150 депутатов, среди которых никто никого не бил.

2. Степени всех вершин связного графа не превосходят d. Докажите, что его вершины можно правильным образом раскрасить в d цветов, если а) есть вершина, имеющая степень меньше, чем d; б) есть вершина, при удалении которой граф теряет связность; в) $d > 2$ и есть две вершины такие, что при удалении их обоих граф теряет связность; г) есть три вершины u, v и w такие, что u смежна с v и w, вершины v и w несмежны и при удалении вершин v и w связность не нарушается.

д) **(Теорема Брукса.)** Степени всех вершин связного графа, не являющегося нечетным циклом и полным графом из $d+1$ вершины, не превосходят d. Докажите, что его вершины можно раскрасить в d цветов правильным образом.

3. В стране провели анкету, в которой требовалось назвать любимого писателя, художника и композитора. Оказалось, что каждый упомянутый хоть раз деятель искусств является любимым ровно k людьми. Докажите, что всех проанкетированных можно разделить на $3k-2$ группы так, что в каждой группе любые два человека имеют совершенно разные вкусы.

4. Докажите, что вершины плоского графа можно раскрасить правильным образом а) в 6; б) в 5 цветов.

5. В городе нет ни мостов, ни тоннелей, ни тупиков. Все перекрестки имеют крестообразную форму и образованы пересечением ровно двух улиц. Совершая инспекционную поездку по городу, губернатор на каждом перекрестке поворачивал либо направо, либо налево. Через некоторое время шофер губернатора заметил, что они едут по дороге, по которой уже проезжали. Докажите, что они едут в том же направлении.

6. На окружности отметили $4n$ точек и раскрасили их через одну в красный и синий цвета. Точки каждого цвета разбили на пары и точки каждой пары соединили отрезком того же цвета, что и эти точки (никакие три отрезка при этом не пересеклись в одной точке). Докажите, что найдется по крайней мере n точек пересечения красных отрезков с синими.

Классификация движений. 10.07.2007

1. Докажите, что любое движение однозначно задается образами а) одной точки и двух неколлиниарных векторов; б) трех точек, не лежащих на одной прямой.

2. а) Докажите, что движение, имеющее три неподвижные точки, не лежащие на одной прямой является тождественным преобразованием, а движение имеющее две неподвижные точки — тождественным преобразованием или симметрией.

б) Докажите, что движение, имеющее ровно одну неподвижную точку, является поворотом.

3. (Теорема Шаля.) Докажите, что любое движение можно представить как композицию не более, чем трех осевых симметрий.

4. Докажите, что движение, которое можно представить в виде композиции четного числа осевых симметрий, нельзя представить в виде композиции нечетного числа осевых симметрий.

Определение. Движение, представимое в виде композиции четного числа осевых симметрий, называется *движением первого рода*, а движение, представимое в виде композиции нечетного числа осевых симметрий, называется *движением второго рода.*

Определение. *Скользящей симметрией* называется композиция симметрии относительно некоторой прямой ℓ и переноса на вектор, параллельный ℓ (этот вектор может быть нулевым).

5. а) Докажите, что любое движение первого рода является поворотом или параллельным переносом. б) Докажите, что любое движение второго рода является скользящей симметрией.

Разнобой. 10.07.2007

1. Докажите, что для любого положительного числа x справедливо неравенство $2x^9 + 9x^8 \leq 9x^{10} + 2$.

2. Натуральные числа n и m таковы, что $m^2+n^2+m \,\vdots\, mn$. Докажите, что m — квадрат натурального числа.

3. Шесть кругов имеют общую точку. Докажите, что один из них содержит центр какого-то другого из них.

4. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, B_1 — точка касания его вневписанной окужности со стороной AC, и M — середина стороны AC. Докажите, что $BB_1 \| IM$.

5. Имеется кучка из 1997 орехов. За одну операцию разрешается любую из имеющихся кучек разделить на две. При этом, если образовались две неравные кучки, то взимается штраф один рубль. Какова наименьшая возможная сумма штрафа, которую приходится заплатить, чтобы получить 1997 кучек, по одному ореху в каждой?

6. Сережа записал в клетки шахматной доски 8×8 числа $1, 2, 3, \ldots,$ $63, 64$ в некотором порядке. Он сообщил Дане только сумму чисел в каждом прямоугольнике из двух клеток и добавил, что 1 и 64 лежат на одной диагонали. Докажите, что по этой информации Даня может точно определить, в какой клетке какое число записано.

Неравенство о средних. 11.07.2007

1. Даны положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Докажите, что $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n$. (Неравеснтвом о средних пользоваться не разрешается).

2. (**Неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом.**) Для произвольных положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ выполняется неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

а) Докажите, что если неравенство о средних выполняется для k чисел, то оно выполняется и для $2k$ чисел. б) Докажите, что если неравенство о средних выполняется для k чисел, то оно выполняется и для $k-1$ числа. в) Выведете неравенство о средних из задачи **1.** г) Докажите нравенство о средних методом Штурма без применения индукции.

3. (**Неравенство о среднем геометрическом и среднем гармоническом.**) Докажите, что для произвольных положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

4. (**Неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратичном.**) Докажите, что для произвольных вещественных чисел $a_1, \ldots, a_n$ выполняется неравенство

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

5. Для положительных чисел a и b докажите неравенство: $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}$.

6. Докажите неравенство $\sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a} \leq 12$.

Связность графов. 11.07.2007

Определение. Ребро связного графа называется *мостом*, если при его удалении граф теряет связность. Вершина связного графа называется *точкой сочленения*, если при ее удалении граф теряет связность.

1. а) В графе, имеющем хотя бы три вершины, нет точек сочленения. Докажите, что между любыми двумя вершинами данного графа существуют два пути, не имеющие общих вершин, кроме крайних. б) Несмежные вершины a и b таковы, что для любой вершины c существует путь из a в b, не проходящий через c. Докажите, что между этими вершинами существуют два пути, не имеющие общих вершин, кроме крайних.

Определение. Связный граф называется *двусвязным*, если он содержит как минимум три вершины и при удалении любой вершины сохраняет связность.

2. а) Докажите, что в графе без мостов между любыми двумя вершинами существует два пути, не имеющие общих ребер; б) Вершины a и b таковы, что для любого ребра C существует путь из a в b, не проходящий через C. Докажите, что существуют два пути из a в b, не имеющие общих ребер.

3. а) Ребра A, B и C таковы, что существует простой цикл, проходящий через A и B, и существует простой цикл, проходящий через B и C. Докажите, что существует простой цикл, проходящий через A и C. б) Докажите, что в двусвязном графе любые два ребра лежат на общем простом цикле.

4. В графе между любыми двумя вершинами существует простой путь четной длины. Докажите, что между любыми двумя вершинами существует простой путь нечетной длины.

5. Все вершины связного графа имеют степень 3. Его ребра раскрашены в 3 цвета так, что из каждой вершины выходит ровно по одному ребру каждого цвета. Докажите, что этот граф остается связным после удаления любого ребра.

6. В стране 100 городов, из каждого города выходит хотя бы одна дорога. Докажите, что можно закрыть несколько дорог так, чтобы по-прежнему из каждого города выходило не менее одной дороги и при этом по крайней мере из 67 городов выходило ровно по одной дороге.

Внутренний матбой. 12.07.2007

1. В остроугольном треугольнике ABC сторона $AC > BC$, а CD, AP и BQ — высоты. Пусть R — точка пересечения прямых PQ и AB. Докажите, что описанные окружности треугольников CPQ и RDQ касаются.

2. Петя, Вася и Толя решили сыграть в следующую игру. В кучке лежат 1999 спичек. Петя и Вася имеют право брать 1 или 2 спички, а Толя — 1, 2 или 3. При этом Петя и Вася объединяют свои усилия против Толи, а Толя имеет право выбрать очередь своего хода — первый, второй или третий. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Может ли Толя выбрать себе такую очередь, что при правильной игре выиграет именно он?

3. Решите в натуральных числах уравнение $x^3 + y^3 = x^2y^2$.

4. Ребра полного графа с n вершинами покрашены в несколько цветов таким образом, что каждый цвет встречается не более $n - 2$ раз. Докажите, что есть три вершины, все ребра между которыми покрашены в различные цвета.

5. На сторонах треугольника ABC как на основаниях построены вовне равнобедренные треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1 с углом 120 градусов при вершине. Докажите, что периметр треугольника $A_1B_1C_1$ не больше периметра треугольника ABC.

6. В клетках таблицы 4×4 вписаны нули и единицы. Известно, что сумма чисел в любом квартете не равна нулю. Докажите, что сумма всех чисел не меньше 7. (*Квартетом* называются четыре клетки, центры которых являются вершинами прямоугольника).

7. Даны положительные числа a, b, c и d такие, что $ac = bd$. Докажите неравенство

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}{\sqrt{abcd}} \geq 4(a+c)(b+d).$$

8. Все натуральные числа раскрашены в розовый и голубой цвета так, что чисел каждого цвета бесконечно много. Докажите, что существует число, являющееся и суммой двух розовых, и суммой двух голубых.

9. Два кота украли 1975 сосисок, соединенных в 99 цепочек (цепочек из одной сосиски изначально нет). Каждый из них своим ходом может перекусить перемычку между двумя сосисками и съесть все образовавшиеся одиночные сосиски. Выигрывает съевший больше сосисок. Кто выигрывает при правильной игре?

10. Вещественные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что $x_1^2 + 2ax_1 + b^2 = x_2$, $x_2^2 + 2ax_2 + b^2 = x_3$, $\ldots$, $x_n^2 + 2ax_n + b^2 = x_1$, где $b \geq a \geq 0$. Докажите, что $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Геометрия масс. 14.07.2007

Определение. *Материальной точкой (м.т.)* называется упорядоченная пара mM, где M — некоторая точка плоскости и m — ненулевое число. Число m называется *массой* материальной точки mM, а сама точка M — *носителем* этой м.т. *Центром масс* материальных точек $m_1M_1, m_2M_2, \ldots, m_nM_n$ называется такая точка Z, для которой имеет место равенство $m_1\overline{ZM_1} + m_2\overline{ZM_2} + \ldots + m_n\overline{ZM_n} = \overline{0}$.

Теорема 1 (Основная теорема). Если точка Z служит центром масс системы м.т. $m_1M_1, m_2M_2, \ldots, m_nM_n$, причем $m_1+m_2+\ldots+m_n \neq 0$, то для любой точки O справедливо равенство

$$\overline{OZ} = \frac{m_1\overline{OM_1} + m_2\overline{OM_2} + \ldots + m_n\overline{OM_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

Обратно, если хотя бы для одной точки O выполняется это равенство, то точка Z — центр масс данной системы м.т.

Следствие. Для конечной системы м.т. с ненулевой суммой масс центр масс существует и определяется однозначно.

Далее везде, говоря о системе материальных точек, будем предполагать, что сумма масс ее точек отлична от нуля.

Теорема 2 (Правило рычага). Центр масс Z двух м.т. m_1A и m_2B с неотрицательными массами расположен на отрезке AB, причем $m_1\,|AZ| = m_2\,|BZ|$.

Теорема 3 (Правило группировки). Пусть в системе материальных точек $m_1M_1, m_2M_2, \ldots, m_nM_n$ отмечены k м.т. m_1M_1, m_2M_2, $\ldots$, m_kM_k и пусть C — центр масс отмеченных м.т. Тогда система m_1M_1, m_2M_2, $\ldots$, m_nM_n имеет тот же центр масс, что и система м.т. $(m_1+m_2+\ldots+m_k)C, m_{k+1}M_{k+1}, \ldots, m_nM_n$.

1. Пусть AA_1 — медиана треугольника ABC. На стороне AC выбрана точка E такая, что точка пересечения отрезков BE и AA_1 является серединой отрезка AA_1. Найдите отношение $\frac{AE}{EC}$.

2. В вершинах A, B, C, D параллелограмма $ABCD$ размещены положительные массы m_a, m_b, m_c и m_d соответственно. а) Докажите, что если $m_a = m_c$ и $m_b = m_d$, то центр масс находится в точке пересечения диагоналей параллелограмма. б) Докажите, что если центр масс находится в точке пересечения диагоналей параллелограмма, то $m_a = m_c$ и $m_b = m_d$.

3. Пусть M, N и P — точки, расположенные на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC и делящие эти стороны в одинаковых отношениях (т. е. $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA}$). Докажите, что точка пересечения медиан треугольника MNP совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC.

Определение. Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — два колиниарных вектора. Тогда отношением $\frac{\overline{a}}{\overline{b}}$ называется число, которое при умножении на $\overline{b}$ дает $\overline{a}$.

4. Докажите при помощи масс **теорему Чевы**.

На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC, или на их продолжениях отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 *конкурентны* (т. е. либо параллельны, либо пересекаются в одной точке) тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = 1.$$

5. Докажите при помощи масс **теорему Менелая**.

На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC, или на их продолжениях отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = -1.$$

6. Докажите при помощи масс **теорему Ван-Обеля**.

Чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке K. Докажите, что $\frac{AK}{KA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B}$.

7. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$; M — точка пересечения его диагоналей, Q — середина стороны CD. Вычислить, в каком отношении делит прямая MQ сторону AB, если известно, что $AD = a, BC = b$.

Еще несколько классических неравенств. 14.07.2007

1. (**Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.**) а) Докажите, что для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ справедливо неравенство $(a_1^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+\ldots+b_n^2) \geq (a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2$. б) При каких значениях переменных достигается равенство?

2. (Транснеравенство.) а) Пусть $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n; 0 < b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ и $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ — перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$. Докажите, что $a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1 \leq a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + \ldots + a_nb_{i_n} \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$.

б) Пусть $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n; 0 < b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n; \ldots; 0 < \ell_1 \leq \ell_2 \leq \ldots \leq \ell_n$ и $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, $\ldots$, $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ — перестановки чисел $1, 2, \ldots, n$. Докажите, что $a_1b_{i_1}\ldots\ell_{j_1} + a_2b_{i_2}\ldots\ell_{j_2} + \ldots + a_nb_{i_n}\ldots\ell_{j_n} \leq a_1b_1\ldots\ell_1 + a_2b_2\ldots\ell_2 + \ldots + a_nb_n\ldots\ell_n$.

3. Для произвольных положительных чисел покажите неравнество: $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ac)$

4. Пусть $a, b, c > 0$. Докажите, что $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$.

5. (неравенство Чебышева.) Докажите, что для чисел $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$, $0 < b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ выполнено неравенство $(a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_n) \leq n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)$.

6. Докажите, что при положительном x и произвольных y, z верно неравенство $2^{10}(x + y^2 + z^4)^7 \geq 7^7(xyz)^4$.

7. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство $\frac{a^2}{2a+b+c} + \frac{b^2}{a+2b+c} + \frac{c^2}{a+b+2c} \geq \frac{a+b+c}{4}$.

Массы возвращаются! 15.07.2007

1. Пусть O — произвольная точка внутри треугольника ABC. Докажите, что $S_{BOC} \cdot \overline{OA} + S_{AOC} \cdot \overline{OB} + S_{AOB} \cdot \overline{OC} = \overline{0}$.

2. Дан треугольник со сторонами a, b и c. Какие массы нужно поместить в его вершины, чтобы центром масс получившейся системы оказался центр а) вписанной; б) вневписанной окружности данного треугольника.

3. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA. Докажите, что точка пересечения отрезков KM и LN является серединой этих отрезков, а также и серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей AC и BD.

4. а) (**точка Жергонна.**) Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанной окружности с соответсвующими сторонами, пересекаются в одной точке. б) (**точка Нагеля.**) Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания вневписанных окружностей с соответсвующими сторонами, пересекаются в одной точке. в) Точки C_1, A_1, B_1 — середины сторон AB, BC, AC треугольника ABC. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ABC совпадает с точкой Нагеля треугольника $A_1B_1C_1$.

5. На окружности расположены n точек с единичными массами. Вася выбирает произвольные $n-2$ из них, рисует их центр масс и опускает из него перпендикуляр на прямую, проходящую через две оставшиеся точки. Докажите, что все Васины прямые пройдут через одну точку.

6. В четырехугольнике $ABCD$ точка E — середина стороны AB, а точка K — середина стороны CD. Докажите, что середины отрезков AK, CE, BK и DE являются вершинами параллелограмма.

7. На биссектрисе угла A неравнобедренного треугольника ABC выбрана точка K. Прямые BK и CK пересекают стороны AC и AB в точках L и M. Докажите, что прямая LM проходит через основание биссектрисы внешнего угла A треугольника.

Разнобойчик. 15.07.2007

1. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB и BC в точках P и Q соответственно. Докажите, что точка пересечения PQ с биссектрисой угла A лежит на окружности, построенной на AC как на диаметре, а также на средней линии, параллельной стороне AB.

2. (**Теорема о трех колпаках**) Общие внешние касательные к парам окружностей S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_1 пересекаются в точках A, B и C соответственно. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

3. Докажите, что если $a \equiv b \pmod p$ (где p — простое число), то $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$.

4. Найдите все такие пары натуральных чисел (a, b), что числа $a^3 + 6ab + 1$ и $b^3 + 6ab + 1$ — точные кубы.

5. На плоскости дано множество попарно непересекающихся кругов. Докажите, что это множество не более чем счетно.

6. Докажтие, что на плоскости нельзя расположить более чем счетное множество непересекающихся букв Т а) если буква Т состоит из двух перпендикулярных отрезков длины 1, конец одного из которых совпадает с серединой другого; б) если буква Т может состоять из любых двух перпендикулярных отрезков, конец одного из которых лежит внутри другого; в) если буква Т может состоять из любых двух отрезков, конец одного из которых лежит внутри другого.

7. Докажите, что число разбиений натурального N на натуральные слагаемые, не превосходящие k, равно числу разбиений N на не более чем k натуральных слагаемых. (Разбиения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми.)

Направленные углы. 16.07.2007

1. На стороне AB равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) выбрана точка D. Через точку D провели касательную к описанной окружности треугольника ADC. Она пересекла описанную окружность треугольника BDC в точке M. Докажите, что $BM \| AC$.

2. (**Прямая Симсона.**) Даны треугольник ABC и точка P. Пусть A_1, B_1 и C_1 — основания перпендикуляров, опущеных из точки P на прямые BC, AC и AB соответственно. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, тогда и только тогда, когда точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC.

3. (**Точка Микеля.**) На плоскости даны 4 прямые общего положения. Докажите, что описанные окружности четырех образованных ими треугольников имеют общую точку.

4. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Описанная окружность треугольника O_1BO_2 пересекает вторую окружность также в точке P. Докажите, что точки O_1, A и P лежат на одной прямой.

5. В треугольнике ABC провели биссектрису BK и высоту CD, а в треугольнике BKC — высоту KL. Прямые BK и CD пересекаются в точке M, а прямые KL и CD — в точке N. Описанная окружность треугольника BKN вторично пересекает прямую AB в точке P. Докажите, что треугольник KPM равнобедренный.

6. Окружности S_1, S_2 и S_3 пересекаются в точке A. Кроме того, первые две окружности пересекаются в точке B, первая и третья — в точке C, а вторая и третья — в точке D. Касательные к окружности S_2 в точке B и к окружности S_3 в точке C пересекаются на окружности S_1.

Докажите, что касательные к окружности S_2 в точке D и к окружности S_1 в точке C пересекаются на окружности S_3.

Числа и многочлены. 17.07.2007

1. Докажите, что для любых натуральных чисел n и k (где $n > k$) существует натуральное число, которое при делении на числа 1, 2, ..., n дает ровно k различных остатков.

2. Существует ли натуральное число n, у которого сумма цифр такая же, как у числа $n^2 - 1$?

3. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что в последовательности $\{P(n)\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечно много составных чисел.

4. Даны попарно взаимнопростые натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, каждое из которых больше 1, но меньше $(2n-1)^2$. Докажите, что среди этих чисел есть хотя бы одно простое.

5. Натуральные числа x, y, z и n таковы, что $x^n + y^n = z^n$. Докажите, что $z > n$.

6. Решите в целых числах уравнение $x^3 + 5y^3 + 25z^3 = 0$.

7. Пусть $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами, а $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь такая, что $f(\frac{p}{q}) = 0$. Докажите, что а) $p \mid a_0$; б) $q \mid a_n$.

Матбой Профи-8 — Профи-9. 17.07.2007

1. Вася написал на доске все возможные последовательности из шести цифр (от 000000 до 999999). Потом пришел Петя и стер в каждой последовательности по 4 цифры (не обязательно идущие подряд). Какое наименьшее количество различных последовательностей могло получиться?

2. Двое игроков по очереди ставят крестики и нолики в клетки бесконечного листа клетчатой бумаги. Первый стремится к тому, чтобы какие-то четыре крестика образовывали квадрат со сторонами, параллельными линиям сетки, а второй старается помешать ему. Может ли первый игрок выиграть?

3. Для произвольных попарно различных вещественных чисел докажите неравенство: $\frac{a^2}{(b-c)^2} + \frac{b^2}{(c-a)^2} + \frac{c^2}{(a-b)^2} \geq 2$.

4. Докажите, что натуральное число a является точным квадратом тогда и только тогда, когда для любого натурального b существует натуральное c такое, что $a + bc$ — точный квадрат.

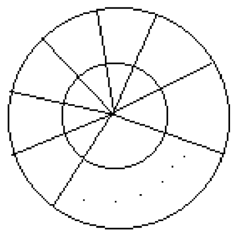
5. Есть n чеканщиков. Некоторые из них изготовляют только фальшивые монеты, а другие — только настоящие. Вес фальшивой монеты отличен от веса настоящей. Имеются весы со стрелкой (показывающие точный вес любого количества монет) и одна заведомо настоящая монета. У каждого чеканщика можно взять сколько угодно монет. Как с помощью трех взвешиваний определить всех фальшивомонетчиков?

6. Есть 8 одинаковых кубиков с ребром 1. Произвольные 24 грани из 48 покрашены в белый цвет, а остальные — в черный. Доказать, что из этих 8 кубиков можно составить куб $2 \times 2 \times 2$, так чтобы на его поверхности белых и черных квадратиков со стороной 1 было поровну.

7. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки K и L соответственно, так что $\angle KCB = \angle LAB = \alpha$. Из точки B опущены перпендикуляры BD и BE на прямые AL и CK соответственно. F — середина стороны AC. Найдите углы треугольника DEF.

8. При каких натуральных n можно числа от 1 до n разбить на две группы так, чтобы сумма чисел одной группы была равна произведению чисел другой группы? (Группа может состоять и из одного числа.)

9. Пруд разбит на $2n$ частей ($n \geq 5$) как показано на рисунке. Две части будем называть соседними, если они имеют общую сторону или дугу. Таким образом, для каждой части есть ровно три соседних. В пруду сидит $4n+1$ лягушек. Если три или больше лягушек сидят в одной части пруда, то три из них перепрыгивают в три соседние части.

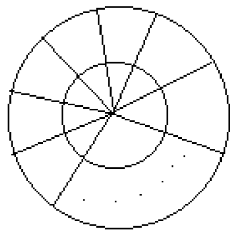


Докажите, что через некоторое время лягушки будут равномерно распределены по пруду. Это означает, что для каждой части либо есть сидящие в ней лягушки, либо есть лягушки во всех соседних с ней частях.

10. Сторону AC треугольника ABC отразили симметрично относительно прямых AB и BC. Пусть K — точка пересечения полученных прямых. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на BK.

Матбой Профи-7 — Профи-8. 17.07.2007

1. Пруд разбит на $2n$ частей ($n \geq 5$) как показано на рисунке. Две части будем называть соседними, если они имеют общую сторону или дугу. Таким образом, для каждой части есть ровно три соседних. В пруду сидит $4n+1$ лягушек. Если три или больше лягушек сидят в одной части пруда, то три из них перепрыгивают в три соседние части. Докажите, что через некоторое время лягушки будут равномерно распределены по пруду. Это означает, что для каждой части либо есть сидящие в ней лягушки, либо есть лягушки во всех соседних с ней частях.



2. На планете 10000 городов, среди которых есть столицы государств. Некоторые города связаны дорогами так, что любая дорога соединяет ровно два города, и от любого города до любого другого можно добраться по дорогам. При этом, чтобы попасть из одной столицы в другую, нужно проехать не менее 200 дорог. Докажите, что на планете меньше 100 столиц.

3. Натуральные числа a и b такие, что число $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$ является целым. Докажите, что $(a,b) \leq \sqrt{a+b}$.

4. Внутри треугольника ABC взята точка K такая, что $\angle ABK = \angle ACK$. E и F — основания перпендикуляров, опущенных из точки K на стороны AB и AC, M — середина стороны BC. Докажите, что $ME = MF$.

5. Про вещественные числа a, b и c известно, что сумма дробей $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, $\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ и $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ равна единице. Докажите, что из трех данных дробей две равны 1, а одна равна -1.

6. На кольцевой дороге ровно 2007 светофоров. Каждую минуту они меняют свои сигналы по следующему правилу: если в предыдущий момент у светофоров, соседних с данным, горят сигналы разных цветов, то на нем загорается сигнал третьего цвета, а если эти сигналы были одного цвета, то на нем загорается сигнал того же цвета. В некоторый момент времени у всех светофоров горели только красные или зеленые сигналы. Может ли получиться, что через некоторое время все сигналы будут желтыми?

7. Треугольник ABC — равносторонний. Найдите геометрическое место точек M таких, что $MA = MB + MC$.

8. Найдите все натуральные m, при которых $p^4 = 2^{3m} + 2^{2m} + 1$, если

p — простое число.

9. В ряд стоят 14 гномов, у каждого не менее 5 орехов. Каждую минуту один из гномов может передать орех гному, стоящему справа, если у того больше орехов. Через некоторое время все орехи собрались у одного гнома. Какое наименьшее число орехов могло быть у гномов?

10. На клетчатой доске 2007×2007 двое играют в следующую игру. Ход состоит в закрашивании 8 еще не закрашенных клеток, образующих связное множество. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выиграет при правильной игре? (Связным называется такое множество клеток, что из любой его клетки можно перейти по клеткам этого множества в любую другую, переходя каждый раз в соседнюю по стороне.)

Многочлены. Деление с остатком и алгоритм Евклида. 19.07.2007

Определение 1. Многочленом с вещественными коэффициентами называеся выражение вида $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, где $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ и $a_n \neq 0$. Число n называется степенью многочлена P, и обозначается $\deg P$. Множество всех многочленов с вещественными коэффициентами обозначается через $\mathbb{R}[x]$. Аналогично, множество всех многочленов с рациональными коэффициентами обозначается через $\mathbb{Q}[x]$, с целыми коэффициентами — через $\mathbb{Z}[x]$ и т. д.

Многочлены $P_1(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ и $P_2 = b_m x^m + \dots + b_0$ называются *равными* тогда и только тогда, когда $m = n$ и $a_k = b_k$ при $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Каждому многочлену $P \in \mathbb{R}(x)$ можно поставить в соответствие функцию $x \mapsto a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$. Через некоторое время мы докажем, что функции заданные многочленами $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[x]$ равны тогда и только тогда, когда многчлены P_1 и P_2 равны.

Определение 2. Многочлен P делится на многочлен $Q \neq 0$, если существует многочлен R такой, что $P = QR$.

Мгогочлен h является общим делителем многочленов f и g, если $f \,\vdots\, h$ и $g \,\vdots\, h$ и называется наибольшим общим делителем, если его степень не меньше степени любого другого общего делителя f и g.

1. (Деление с остатком.) Докажите, что для любых многочленов $f(x)$ и $g(x) \neq 0$ существуют единственные многочлены $q(x)$ и $r(x)$ такие, что $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ и $\deg(r) < \deg(g)$.

2. (Теорема Безу.) а) Докажите, что остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x-a$ равен $f(a)$. б) Докажите, что $f(x) \vdots x-a$ тогда и только тогда, когда $f(a)=0$.

3. а) **(Алгоритм Евклида.)** Пусть $f(x)$ и $g(x) \neq 0$ — многочлены. Рассмотрим последовательные деления с остатком $f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$, $g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x)$, $r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x), \ldots, r_{n-2}(x) = r_{n-1}(x)q_n(x) + r_n(x)$, $r_{n-1}(x) = r_n(x)q_{n+1}(x)$. Докажите, что $(f(x), g(x)) = r_n(x)$.

б) **(Линейное представление НОД.)** Докажите, что для любых многочленов $f(x)$ и $g(x)$ существуют многочлены $u(x)$ и $v(x)$ такие, что $u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x))$.

в) Докажите, что любой общий делитель двух многочленов делит их наибольший общий делитель.

4. Дан многочлен $(x^7 + x^5 + 1)^{20}$. Найдите его коэффициент при а) x^{18}; б) x^{17}.

5. Найдите а) сумму коэффициентов; б) знакопеременную сумму коэффициентов многочлена $(1-3x+2x^2)^{743} \cdot (1+3x-2x^2)^{744}$.

6. Докажите, что а) $(x^m - 1, x^n - 1) = x^{(m,n)} - 1$;

б) $(x^{2^m} + 1, x^{2^n} + 1) = 1$, при $m \neq n$.

7. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{6\alpha^3+7\alpha^2-2\alpha-1}$, где α — корень многочлена $2x^2+x-2$.

Упражнения по теме "Многочлены"

1. Разделите с остатком многочлены: а) $x^7 - 5x^6 + 4x^5 - x^3 + 2x - 8$ на $x^3 - 2x + 3$; б) $x^6 - 8x^5 + 5x^4 - 2x^2 + 3$ на $x^2 - 3x + 5$.

2. Найдите НОД многочленов а) $x^4 + 2x^3 - x - 2$ и $x^2 + 5x + 6$; б) $x^4 + 2x^3 + x^2 + 6x + 2$ и $x^5 + 2x^4 - 5x^2 - 6x - 2$.

Графы. Ориентированные и не только. 19.07.2007

1. У Феди есть полный граф с n вершинами. Он хочет расставить стрелки на ребрах этого графа так, чтобы никакие три ребра не образовывали ориентированный цикл. Сколькими способами это можно сделать?

Определение 1. Ориентированный граф называется *сильно связным*, если от любой его вершины можно добраться до любой другой двигаясь по стрелкам.

Определение 2. *Гамильтоновым путем* называется путь, проходящий по каждой вершине графа ровно один раз. *Гамильтоновым циклом* называется цикл, проходящий по каждой вершине графа ровно один раз.

2. а) Докажите, что в полном ориентированном графе сущестует гамильтонов путь. б) Докажите, что в полном сильно связном ориентированном графе существует гамильтонов цикл.

3. Полный сильно связный ориентированны граф содержит хотя бы 4 вершины. Докажите, что одну из его вершин можно удалить без потери сильной связности.

4. В стране 2007 городов и первоначально нет ни одной дороги. Две строительные компании строят по дороге по очереди. (Любая дорога соединяет два города в одном из направлений. Между двумя городами нельзя проводить две дороги в одном направлении, но можно провести две дороги разного направления.) Проигрывает компания, после хода которой из любого города можно будет проехать в любой другой. Какая из двух компаний сможет обеспечить себе победу?

5. Дан граф, степень любой вершины которого не меньше k (где $k \geq 2$). Докажите, что в этом графе найдется простой цикл длины не меньшей, чем $k+1$.

6. В графе N вершин. Докажите, что а) если степени всех вершин не меньше $\frac{N-1}{2}$, то в данном графе существует гамильтонов путь; б) если степени всех вершин не меньше $\frac{N}{2}$, то в данном графе существует гамильтонов цикл.

Многочлены. Основная теорема арифметики. 20.07.2007

Определение. Многочлен $f(x) \neq 0$ называется *неприводимым*, если его нельзя представить в виде $f(x) = g(x)h(x)$, где $\deg g(x) > 0$, $\deg h(x) > 0$.

1. Докажите, что если $f(x)g(x) \vdots h(x)$ и $(f(x), h(x)) = 1$, то $g(x) \vdots h(x)$.

2. (Основная теорема арифметики.) Любой многочлен может быть представлен в виде произведения неприводимых сомножителей единственным образом с точностью до перестановки и домножения сомножителей на константы.

Определение. Число a называется корнем *кратности* k многочлена $f(x)$, если $f(x) \vdots (x-a)^k$ и $f(x) \not\vdots (x-a)^{k+1}$. *Числом корней многочлена с учетом кратности* называется сумма кратностей всех его корней.

3. а) Докажите, что многочлен степени n может иметь не более n корней с учетом кратности. б) Докажите, что если многочлены $f(x)$

и $g(x)$ принимают одинаковые значения в бесконечном числе точек, то они равны.

4. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что для любых двух различных целых чисел a и b верно, что $f(b) - f(a)$ делится на $b - a$.

5. Многочлен $P(x)$ дает остаток 5 при делении на $x - 2$ и остаток 7 при делении на $x - 3$. Какой остаток многочлен $P(x)$ дает при делении на $(x - 2)(x - 3)$?

6. Дан многочлен $f(x)$ такой, что многочлен $f(x^n)$ делится на многочлен $x - 1$. Докажите, что многочлен $f(x)$ также делится на многочлен $x - 1$.

7. а) Пусть a, b и c — различные вещественные числа. Докажите, что при всех вещественных x выполняется равенство

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} = 1.$$

б) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные вещественные числа. Докажите, что при всех вещественных x выполняется равенство

$$\frac{(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)} + \frac{(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)} + \cdots +$$

$$+ \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})} = 1.$$

Квадратичные вычеты. 20.07.2007

Определение. Пусть $m > 1$ — натуральное число и a — целое число, взаимно простое с m. Число a называется *квадратичным вычетом* по модулю m, если существует $x \in \mathbb{N}$ такое, что $a \equiv x^2 \pmod{m}$. В противном случае число a называется *квадратичным невычетом* по модулю m.

1. Докажите, что если p — нечетное простое число, то по модулю p существует ровно $\frac{p-1}{2}$ квадратичных вычетов и столько же невычетов.

2. Докажите, что для данного модуля $p \in \mathbb{P}$ а) произведение двух квадратичных вычетов — вычет; б) произведение вычета на невычет — невычет; в) произведение двух невычетов — вычет.

3. Пусть p — нечетное простое число. а) Докажите, что если a — квадратичный вычет по модулю p, то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$. б) Докажите, что если a — квадратичный невычет по модулю p, то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$.

Определение. Пусть $p \in \mathbb{P}$. *Символом Лежандра* называется выражение, обозначаемое $\left(\frac{a}{p}\right)$, равное 1, если a — квадратичный вычет по модулю p; -1, если a — невычет по модулю p и 0, если a кратно p.

Из задачи **3.** следует, что если p нечетно, то $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$.

4. Докажите, что -1 является квадратичным вычетом по модулю простого числа $p > 2$ тогда и только тогда, когда $p \equiv 1 \pmod 4$.

5. Пусть p — нечетное простое число, a, b, c — вычеты по модулю p, причем $a \not\equiv 0 \pmod p$, а $D = b^2 - 4ac$. Докажите, что если D — квадратичный вычет по модулю p, то сравнение $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod p$ имеет два корня, если D — квадратичный невычет по модулю p, то сравнение $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod p$ не имеет корней, а если $D \equiv 0 \pmod p$, то это сравнение имеет один корень.

6. Докажите, что простых чисел вида $4k + 1$ бесконечно много.

7. Докажите, что уравнение $4xy - x - y = z^2$ а) не имеет решений в натуральных числах; б) имеет бесконечно много решений в целых числах.

Комплексные числа. 21.07.2007

1. Вычислите $(1 - \sqrt{3}i)^{2007}$.

2. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ — все корни степени k из единицы. Найдите $\varepsilon_1^n + \varepsilon_2^n + \cdots + \varepsilon_k^n$.

3. Докажите, что если комплексное число z является корнем многочлена $f(x)$ с вещественными коэффициентами, то число $\overline{z}$ также является его корнем.

4. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — точки комплексной плоскости, являющиеся вершинами выпуклого n-угольника. Известно, что точка z удовлетворяет уравнению $\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \cdots + \frac{1}{z-z_n} = 0$. Докажите, что точка z лежит внутри этого n-угольника.

5. а) Найдите $\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_n^4 + \ldots$. б) Докажите, что $\mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_n^4 - \mathrm{C}_n^6 + \ldots = \sqrt{2^n}\cos(\frac{\pi n}{4})$, в) $\mathrm{C}_n^1 - \mathrm{C}_n^3 + \mathrm{C}_n^5 - \mathrm{C}_n^7 + \ldots = \sqrt{2^n}\sin(\frac{\pi n}{4})$.

Определение. *Двойным отношением* комплексных чисел a, b, c, d называется число $(a, b, c, d) = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d}$.

6. Докажите, что точки, соответствующие комплексным числам a, b, c, d лежат на одной окружности или на одной прямой тогда и только тогда, когда их двойное отношение вещественно.

7. Пусть A, B, C, D — произвольные точки плоскости. При помощи комплексных чисел докажите, что а) $|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| \geq |AC| \cdot |BD|$ (**неравенство Птолемея**); б) равенство достигается тогда и только тогда, когда точки A, B, C, D лежат на одной окружности, причем именно в таком порядке (**теорема Птолемея**).

Двудольные графы. 21.07.2007

1. На вечере ни один мальчик не танцевал со всеми девочками, а каждая девочка танцевала хотя бы с одним мальчиком. Докажите, что существует 2 мальчика и 2 девочки такие, что первый танцевал с первой, второй — со второй, а первый со второй и второй с первой не танцевали.

2. (Лемма о девушках.) Дано n юношей и несколько девушек. Известно, что для любого $k \leq n$ и любой группы из k юношей есть не менее k девушек, каждая из которых знакома хотя бы с одним из этих k мальчиков. Докажите, что все юноши могут выбрать по невесте из числа своих знакомых.

А если сформулировать по-научному про двудольный граф, то получится **теорема Холла**.

3. (Лемма Холла для арабских стран.) Среди n юношей и нескольких девушек некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Каждый юноша хочет жениться на m знакомых девушках. Докажите, что они могут это сделать тогда и только тогда, когда для любого набора из k юношей количество знакомых им в совокупности девушек не меньше km.

4. Даны k мальчиков и $2k - 1$ конфета. Докажите, что можно дать каждому мальчику по конфете так, чтобы мальчику, которому не нравится его конфета, не нравились и конфеты остальных мальчиков (чтобы не создавать предпосылок для драки).

5. Все вершины двудольного графа имеют степень k. Докажите, что их можно разбить на пары смежных.

6. Каждый из двух равновеликих квадратов разбит на 100 равновеликих частей. Докажите, что можно сложить эти квадраты в стопку и проткнуть в 100 точках так, чтобы каждая из 100 частей каждого из квадратов была проткнута.

7. Пусть M — множество всех k-элементных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, 2k+1\}$. Существует ли биекция $f : M \to M$ такая, что $A \cap f(A) = \varnothing$.

Многочлены. Теорема Виета. 22.07.2007

1. (Теорема Виета.) Пусть многочлен $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ имеет ровно n корней с учетом кратности — $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда выполняются следующие соотношения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n & = & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n & = & \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ & \ldots & \\ x_1x_2\ldots x_n & = & (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

2. Многочлен $x^2 + ax + b + 1$ с целыми коэффициентами имеет два натуральных корня. Докажите, что число $a^2 + b^2$ — составное.

3. Докажите, что сумма кубов трех корней уравнения $x^3 + px + q = 0$ с целыми коэффициентами есть целое число, делящееся на 3.

4. Уравнение $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ имеет n различных вещественных корней. Докажите, что а) $a_{n-1}^2 \geq \frac{2n}{n-1}a_n a_{n-2}$; б) $a_1^2 \geq \frac{2n}{n-1}a_2 a_0$.

5. Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}$. Известно, что $abc = 1$, $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что одно из чисел равно 1.

6. Докажите, что если многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет рациональный корень $x_0 = \frac{p}{q}$, то $P(x) = (qx - p)Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами.

Разнобой. 22.07.2007

Определение. Четным контуром степени k называется однородный граф степени k, не содержащий нечетных циклов.

1. (Теорема Кёнига о четном контуре.) Докажите, что четный контур степени k можно разбить на k графов степени 1, не имеющих общих ребер.

2. Решить в целых числах уравнение $x^3 + 7 = y^2$.

3. Через каждую вершину треугольника проведены две прямые, делящие противоположную сторону треугольника на три равные части.

Докажите, что диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, образованного этими прямыми, пересекаются в одной точке.

4. Даны положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, сумма которых равна 1. Докажите, что

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}{x_1x_2\ldots x_n} \geq (n-1)^n.$$

5. Комплексные числа x, y, z имеют модуль 1. Найдите $\left|\frac{x+y+z}{xy+yz+zx}\right|$.

6. Постройте выпуклый а) пятиугольник; б) по серединам его сторон.

Заключительная олимпиада. 23.07.2007

Довывод

1. Можно ли составить три несократимые дроби, произведение которых равно 1, использовав в качестве числителей и знаменателей этих дробей шесть чисел из набора $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$? (Каждое число можно использовать один раз или не использовать вовсе.)

2. Положительное число x таково, что $[x] \cdot \{x\} = 100$. Чему может быть равно число $[x^2] - [x]^2$? (Как обычно, $[y]$ — это целая часть числа y, а $\{y\}$ — дробная часть числа y.)

3. На клетчатой доске 100×100 расставлены несколько шахматных коней. Каждую минуту какой-нибудь один из коней делает ход на свободное поле. Через некоторое время оказалось, что каждый конь побывал на всех полях ровно по одному разу и вернулся на исходное поле. Докажите, что был момент, когда все кони стояли не на своих полях.

4. Дан остроугольный треугольник ABC такой, что $\angle B = 60°$. Его высоты AD и CE пересекаются в точке H. Докажите, что центр описанной окружности этого треугольника лежит на биссектрисе угла $\angle CHD$.

5. Натуральные числа a, b, c таковы, что число $a - b$ — простое и $3c^2 = c(a+b) + ab$. Докажите, что $8c + 1$ — точный квадрат.

Вывод

6. Положительные вещественные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$ и $a^3 > 36$. Докажите неравенство $\frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 > ab + bc + ac$.

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω с центром в точке O. Биссектриса угла $\angle ABD$ пересекает сторону AD в точке K, а окружность ω в точке M; биссектриса угла $\angle CBD$ пересекает сторону CD в точке L, а окружность ω в точке N. Известно, что $KL \| MN$. Докажите, что описанная окружность треугольника MON проходит через середину BD.

8. В лагерь приехали m мальчиков и d девочек. Каждая девочка знакома не более, чем с 10 мальчиками, а каждый мальчик — не менее, чем с одной девочкой. Оказалось, что у каждого мальчика больше знакомых девочек, чем у любой знакомой с ним девочки — знакомых мальчиков. Докажите, что $d \geq 1,1m$.