XXVI Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль. 3–28 июля 2010 г.

8 КЛАСС. ГРУППА ПРОФИ.

МАТЕРИАЛЫ ЗАНЯТИЙ

Сухов К.А.
Русских М.С.
Карпов Д.В.
Антропов А.В.

1. От авторов.

Дорогой друг! Вы сейчас держите в руках или читаете с экрана брошюру, которая родилась как плод совместного творчества авторов с группой “Профи–8” Летней многопредметной школы Кировской области 2010 года.

Большие и интересные занятия по теории графов были подготовлены и проведены Д.В. Карповым. Основная часть занятий была составлена тремя оставшимися авторами совместно. Матбои с группами Профи–9 и Профи–7 были составлены совместно с А.В. Пастором, А.В. Шаповаловым и Н.Д. Кудыком, за что хотим выразить им благодарность. Особо хотелось бы отметить роскошный подарок А.В. Шаповалова — 7–ю задачу заключительной олимпиады.

Надеемся, что мы оставили много поводов для размышления до следующей школы и, конечно же, хотим выразить благодарность всем ученикам группы “Профи–8”:

Акбарову Артуру, Александрову Никите, Белову Дмитрию, Галимову Тимуру, Голованову Александру, Заславскому Олегу, Князевой Алисе, Колупаеву Владиславу, Корякину Данилу, Котельниковой Юлии, Латышеву Алексею, Малыгину Виталию, Марьину Егору, Матушкину Александру, Мокину Александру, Рыкову Никите, Садыкову Ринату, Соколу Евгению, Софроновой Алине, Сурину Михаилу, Шайхеевой Талии.

Редактор *Сухов К.А.*
Художественный редактор *Рубанова Н.И.*
TEXнический редактор *Сухов К.А.*
Генеральный корректор *Антропов А.В.*
Корректор *Русских М.С.*

Сдано в набор 25.07.10. Подписано к печати 26.07.10. Формат A5
Бумага «Снегурочка». Печать высокая, очень высокая.
Заказ $\sin(\ln(e^\pi))$ Тираж 30
Издательство «Хакерка»
Директор издательства *Плетнев К.В.*

2. Вступительная олимпиада. 4 июля.

1. Стадо молодняка состоит из бычков и телочек. Телочек в стаде 55% от его общей численности, а их общий вес составляет 45% общего веса стада. Во сколько раз средний вес бычка больше среднего веса телочки?

2. Существуют ли 127 подряд идущих натуральных числа, сумма которых делится на 2010?

3. Найдите все тройки действительных чисел такие, что каждое из них равно квадрату суммы двух других.

4. Пусть $ABCD$ – равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC. На продолжении прямой DA за точку A отложили отрезок AE такой, что $AE = BC$. В каком отношении биссектриса угла DBE делит отрезок DE?

5. В Однобоком графстве между некоторыми, но, к сожалению, еще не между всеми, усадьбами проложены дороги с односторонним движением. При этом, при появлении любой новой дороги (также с односторонним движением) между усадьбами, не соединенными дорогой до этого, появится возможность добраться от любой усадьбы до любой другой, не нарушая правил. Докажите, что такая возможность имеется уже сейчас.

6. Внутри острого угла со сторонами a и b расположен выпуклый четырехугольник $ABCD$. Оказалось, что для каждой из двух прямых, содержащих стороны угла, сумма расстояний от вершин A и C до этой прямой равна сумме расстояний от вершин B и D до этой же прямой. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

7. Куб $100 \times 100 \times 100$ составлен из белых и черных единичных кубиков, причем в каждом кубе $2 \times 2 \times 2$ находится ровно 3 белых и 5 черных кубиков. Сколько вершин большого куба покрашены в черный цвет?

8. Квадратный лист бумаги разрезают по прямой на две части, и так делают много раз. Какое наименьшее число разрезов нужно сделать, чтобы среди полученных частей оказалось ровно сто двадцатиугольников?

3. Сильная связность ориентированных графов. 5 июля.

Определение: Вершины a и b ориентированного графа G назовем *связанными*, если в графе G существуют пути из a в b и из b в a.

Ориентированный граф G называется *сильно связным*, если любые две его вершины связаны.

Таким образом, множество вершин $V(G)$ оказывается разбито на классы попарно связанных вершин, которые мы будем называть *компонентами сильной связности.*

Построим для нашего ориентированного графа G *граф компонент сильной связности* $\mathcal{C}(G)$, вершины которого соответствуют компонентам сильной связности ориентированного графа G. Проведем в графе $\mathcal{C}(G)$ ребро $V_i \to V_j$ тогда и только тогда, когда в графе G есть ребро, направленное от V_i к V_j.

Для любого подмножества $U \subset V(G)$ через $G(U)$ мы будем обозначать *индуцированный подграф* графа G на множестве вершин U (такой граф состоит из вершин множества U и всех ребер графа G между этими вершинами).

1. a) Докажите, что в графе $\mathcal{C}(G)$ нет циклов. b) Докажите, что для любой компоненты сильной связности V_i граф $G(V_i)$ на вершинах множества V_i с ребрами графа G между этими вершинами сильно связен.

Определение: Пусть V_i — компонента сильной связности ориентированного графа G. Назовем эту компоненту *промежуточной*, если в графе $\mathcal{C}(G)$ существует ребро, входящее в V_i, и существует ребро, выходящее из V_i. В противном случае назовем компоненту V_i *крайней.*

2. В ориентированном графе 200 вершин, из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро и в каждую вершину входит хотя бы одно ребро. Докажите, что можно добавить не более 100 новых ориентированных ребер так, чтобы этот граф стал сильно связным. (Между двумя вершинами может быть проведено несколько ребер.)

3. Пусть G связный ориентированный граф на n вершинах. Докажите, что a) Существует сильно связный остовный подграф графа G, в котором не более $2n-2$ ребра.
b) Если в графе G между любыми двумя вершинами проведено не более одного ребра, то существует сильно связный остовный подграф графа G, в котором не более $2n-3$ ребра.
c) Для всех $n \geqslant 3$ постройте примеры графов, для которых оценки пунктов a) и b) являются точными.

Определение: *Полный ориентированный граф* или *турнирный граф* — это ориентированный граф, в котором любые две вершины соединены ровно одним ориентированным ребром

4. a) Докажите, что компоненты сильной связности турнирного графа можно пронумеровать $G_1, \ldots, G_k$ так, чтобы для всех $i < j$ в $\mathcal{C}(G)$ было ребро $G_i \to G_j$.
b) В ориентированном графе нет циклов. Докажите, что его вершины можно пронумеровать $v_1 \ldots v_k$ так, что каждое ребро ориентировано от вершины с меньшим номером к вершине с большим номером.

5. Докажите, что в сильно связном турнирном графе существует *гамильтонов цикл* (т. е. цикл, проходящий по каждой вершине ровно один раз).

6. a) Докажите, что в сильно связном турнирном графе с четырьмя и более вершинами существует вершина, удаление которой не нарушает сильной связности графа.
b) Докажите, что таких вершин хотя бы две.

7. Пусть G — сильно связный турнирный граф, $3 \leqslant k \leqslant v(G)$.
a) Докажите, что для любой вершины $v \in V(G)$ существует простой цикл длины k, проходящий через v.
b) Докажите, что в графе G существует хотя бы $v(G) - k + 1$ простых циклов длины k.

8. Пусть G — полный ориентированный граф с n вершинами. Докажите, что в нем существует такой гамильтонов путь $a_1 \to a_2 \to \dots \to a_n$, что его концы соединены ребром $a_1 \to a_n$
a) при четном n; b) при нечетном n, отличным от 3 и 5.
c) Найдите все полные ориентированные графы, для которых такого пути не существует.

4. Разнобой. 05 июля

1. Докажите, что при любом нечетном n, большем 3, число $2^{n!}-1$ делится на $n^3 - 4n$.

2. Дана шоколадка 700×2009 (700 – высота, 2009 – ширина). Два человека играют в следующую игру. Ход состоит в том, что можно взять любой отдельный кусок шоколадки (в начале игры такой кусок всего один) и выгрызть из него кусок в форме прямоугольника, причем первому игроку разрешается съедать только прямоугольники, у которых высота больше либо равна ширины, а второму — у которых меньше либо равна ширины. Выигрывает тот, кто доест последний кусочек. Кто выиграет при правильной игре?

3. Какие четырехугольники можно разрезать прямой линией на два подобных между собой четырехугольника?

4. Назовем натуральное число n “крокодилом”, если любое натуральное число, меньшее n, можно представить в виде суммы нескольких различных делителей n. Докажите, что произведение двух крокодилов — крокодил.

Оглавление

5. Каждому из 30 человек нравятся ровно m остальных. При каком наименьшем m можно гарантировать, что найдутся два человека, нравящихся друг другу?

6. Окружность, построенная на высоте AD прямоугольного треугольника ABC как на диаметре, пересекает катет AB в точке K, а катет AC – в точке M. Отрезок KM пересекает высоту AD в точке L. Известно, что $\frac{AK}{AL} = \frac{AL}{AM}$. Найдите острые углы треугольника ABC.

7. На доске написано несколько натуральных чисел. Разрешается стереть с доски два числа и записать вместо них их НОД и НОК. Докажите, что когда–нибудь числа на доске перестанут меняться.

8. Докажите, что в любом выпуклом многоугольнике можно разместить два не налегающих многоугольника, подобных ему с коэффициентом 1/2.

9. a) Как соединить 2003 города наименьшим числом авиалиний так, чтобы из любого города можно было попасть в любой другой, сделав не более двух пересадок? (Укажите все способы и докажите, что других нет.) b) Сколькими способами это можно сделать?

10. Существуют ли 100 попарно различных натуральных чисел, таких, что при любом разбиении их на две непустые группы сумма чисел в одной группе делится на сумму чисел в другой?

5. Пути и циклы

Определение: *Эйлеров путь* в графе G — это путь, проходящий по каждому ребру ровно один раз.
Эйлеров цикл в графе G — это цикл, проходящий по каждому ребру ровно один раз.

Разумеется, эйлеров путь и цикл в графе могут иметь самопересечения по вершинам.

1. Пусть G — связный граф.
a) Эйлеров цикл в графе G существует тогда и только тогда, когда G связен и степени всех вершин четны.
b) Ребра графа G можно разбить на не более, чем k путей и циклов тогда и только тогда, когда в графе не более, чем $2k$ вершин нечетной степени.

Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, множество ребер — через $E(G)$, для количества вершин и ребер будем использовать обозначения $v(G)$ и $e(G)$ соответственно. Через $d_G(x)$ мы обозначаем степень вершины x в графе G. Через $\delta(G)$ мы обозначаем минимальную степень вершины графа G. Длина пути и цикла в графе всегда измеряется в ребрах.

Путь (и, аналогично, цикл) называется *простым*, если он не имеет самопересечений по вершинам. Во всех следующих задачах пути и циклы — простые.

2. Пусть $\delta(G) \geqslant 2$. Докажите, что:
a) в графе G есть простой путь длины хотя бы $\delta(G)$;
b) в графе G есть простой цикл длины хотя бы $\delta(G)+1$.

3. Пусть $e(G) \geqslant t \cdot v(G)$, $t \in \mathbb{N}$.
a) Докажите, что существует такой подграф H графа G, что $\delta(H) \geqslant t+1$.
b) Докажите, что в графе G есть простой путь длины хотя бы $t+1$ и простой цикл длины хотя бы $t+2$.

4. Пусть $n > 2$, $a_1 \ldots a_n$ — максимальный путь в графе G, причем $d_G(a_1) + d_G(a_n) \geqslant n$. Докажите, что в графе есть цикл длины n.

5. a) В графе для любых двух несмежных вершин $u, v \in V(G)$ выполняется
$d_G(u) + d_G(v) \geqslant v(G) - 1$. Докажите, что в графе G есть гамильтонов путь.
b) Докажите, что если $\delta(G) \geqslant \frac{v(G)-1}{2}$, то в графе G есть гамильтонов путь.

46. Показатели: определение, основные свойства.
47. Квадратичные вычеты, невычеты, их произведение.
48. Символ Лежандра.
49. Лемма Гензеля.
50. Первообразный корень, свойства, модули по которым их нет.
51. Первообразный корень существование.
52. Периодические дроби.
53. Неравенство Коши для двух чисел, примеры применения. Неравенство Бернулли.
54. Неравенство КБШ, два доказательства.
55. Неравенство КБШ, применение.
56. Неравенство о средних для квадратичного, арифметического и гармонического.
57. Неравенство о средних для арифметического и геометрического, индукция О.Л.Коши.
58. Транснеравенство, неравенство Чебышева.
59. Комплексные числа: аксиоматическое задание.
60. Комплексные числа: сопряжение, модуль, аргумент.
61. Комплексные числа: тригонометрическая форма.
62. Комплексные числа: аргумент, модуль и сопряженное произведения.
63. Комплексные числа: корни из единицы, сумма их степеней.
64. Комплексные числа: решение квадратного уравнения.

6. a) Для любых двух несмежных вершин u, $v \in V(G)$ выполняется $d_G(u)+d_G(v) \geqslant v(G)$. Докажите, что в графе G есть гамильтонов цикл.
b) Докажите, что если $\delta(G) \geqslant \frac{v(G)}{2}$, то в графе G есть гамильтонов цикл.

7. Пусть $ab \notin E(G)$, $d_G(a)+d_G(b) \geqslant v(G)$, а в графе $G+ab$ есть гамильтонов цикл. Докажите, что в графе G также есть гамильтонов цикл.

8. Пусть $v(G) = n$, а $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_n$ — последовательность степеней вершин графа G. Пусть $d_i + d_{n-i} \geqslant n$ для каждого $i \in [1..n-1]$. Докажите, что в графе G есть гамильтонов цикл.

6. Разнобой. 6 июля.

1. Найдите все такие пары натуральных чисел (a, b), что $a-b$ – простое число, а $a \cdot b$ – точный квадрат.

2. Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на сторонах BC, CA и AB соответственно, и делят их в отношении $1\colon 2$ так, что A_1 ближе к точке B, B_1 ближе к C, C_1 — к A. Докажите, что из отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 можно составить треугольник.

3. Назовем пони необщительным, если у него не более пяти друзей. Назовем пони чудиком, если все его друзья необщительны. Докажите, что чудиков не больше, чем необщительных.

4. Выпуклый четырехугольник разбит диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что точки пересечения медиан этих треугольников образуют параллелограмм.

5. Имеет ли уравнение $x^2 + y^3 = z^4$ решения в простых числах?

6. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2+bx+c$ таков, что уравнение $f(x) = x$ не имеет вещественных корней. Докажите, что уравнение $f(f(x)) = x$ также не имеет корней.

7. Повар выложил на сковородку 8 котлет по кругу (по часовой стрелке), причем каждая следующая выкладываемая котлета была на 10 граммов тяжелее предыдущей. Когда котлеты поджарились, повар обнаружил, что забыл, с какой котлеты он начинал выкладывать. Помогите ему найти самую тяжелую котлету за 2 взвешивания на чашечных весах без гирь.

8. Дана окружность, ее диаметр AB и точка C на этом диаметре. Постройте с помощью циркуля и линейки на окружности две точки X и Y, симметричные относительно диаметра AB, для которых прямая YC перпендикулярна к прямой XA.

9. Существуют ли четыре квадратных трехчлена такие, что в каком бы порядке f_1, f_2, f_3, f_4 их не выписали, найдется такое вещественное число a, что $f_1(a) < f_2(a) < f_3(a) < f_4(a)$?

10. В радужном городе 1000 жителей. Каждый вечер все жители города сообщают всем своим знакомым те новости, которые они знают. Известно, что любая новость рано или поздно становиться известна всем. Докажите, что можно выбрать 90 жителей, и сообщить им некую новость так, что через 10 дней она станет известна всем жителям.

7. Раскраски вершин графов. 7 июля.

Будем обозначать через $\Delta(G)$ и $\delta(G)$ максимальную и минимальную степень вершины графа G соответсвенно.

Определение: 1) Раскраска вершин графа G в k цветов называется *правильной*, если любые две смежные вершины покрашены в разные цвета.

2) Через $\chi(G)$ обозначим *хроматическое число* графа G — наименьшее такое натуральное число, что существует правильная раскраска вершин графа G в такое количество цветов.

1. Пусть G — связный граф, $\Delta(G) = d$ и в графе G есть вершина степени менее d. Докажите, что $\chi(G) \leqslant d$ (то есть, вершины графа G можно правильным образом раскрасить в d цветов).

18. Теорема Брукса простой вариант(лемма к доказательству).

19. План доказательства теоремы Брукса.

20. Эйлеров путь и цикл.

21. Гамильтонов путь.

22. Гамильтонов цикл.

23. Лемма Холла.

24. Лемма Холла для арабских стран, применение леммы Холла.

25. Ориентированные углы, их свойства.

26. Скалярное произведение, свойства.

27. Движения. Определение, сохранение основных геометрических объектов.

28. Движения. Основные типы, их композиции.

29. Теорема об однозначности движения по трем точкам.

30. Теорема Шаля.

31. Двойное отношение в комплексных числах, условие принадлежности окружности и прямой.

32. Описание движений в терминах комплексных чисел.

33. Неравенство Птолемея.

34. Выпуклые множества.

35. Теорема Хелли.

36. Теорема Юнга.

37. Векторы: определение, основные свойства.

38. Векторы и выпуклый многоугольник, два доказательства.

39. Центр масс — точки пересечения основных чевиан треугольника.

40. Центр масс — определение, примеры.

41. Центр масс — правила групировки и рычага, основная теорема.

42. Теорема Чевы.

43. Теорема Менелая.

44. Теорема Ван–Обеля.

45. Точки Нагеля и Жергона.

Обозначим через H точку пересечения его диагоналей, A и E центры описанных окружностей треугольников PHQ и RHS соответственно. Докажите, что $HATE$ – параллелограмм.

6. Последовательность чисел a_k и b_k задается рекуррентно, следующими условиями: $a_1 = 2010$, $b_1 = 2011$, $a_{n+1} = a_n + b_n\sqrt{3}$, $b_{n+1} = b_n - a_n\sqrt{3}$. Чему равно a_{2011}?

7. Есть две группы монет: в одной 10, и в другой 77 монет. Известно, что среди этих 10 есть ровно одна фальшивая. Как за три взвешивания узнать есть ли среди этих 77 монет хотя бы одна фальшивая. (Известно, что все фальшивые весят одинаково и легче настоящих, которые тоже весят одинаково.)

41. Предварительный список вопросов к зачету.

01. Равносильность формального и функционального равенства многочленов

02. Теорема Безу.

03. Количество корней многочлена.

04. Многочлены над $\mathbb{Z}_p$, количество корней

05. Интерполяционный многочлен: существование.

06. Интерполяционный многочлен: единственность, описание всех.

07. Рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами.

08. Оценка модуля одного многочлена через другой.

09. Четные и нечетные полиномы.

10. Теорема Виета

11. Неприводимость, содержание многочлена.

12. Лемма Гаусса, критерий Эйзенштейна.

13. Неприводимость над $\mathbb{Z}$ и над $\mathbb{Q}$.

14. Функции и многочлены над $\mathbb{Z}_p$.

15. Суммы коэффициентов с номера кратными 2, 3, 4.

16. Сильная связность ориентированных графов.

17. Турнирный граф.

2. Вершины графа G нельзя правильным образом покрасить в d цветов. Тогда существует такой подграф H графа G, что $\delta(H) \geqslant d$.

3. a) Докажите, что из графа G можно удалить не более, чем $\frac{1}{n}$ часть его ребер так, чтобы полученный граф имел правильную раскраску вершин в n цветов.
b) Докажите, что из графа G можно несколько ребер так, часть его ребер так, чтобы полученный граф имел правильную раскраску вершин в n цветов и степень каждой вершины уменшилась не более, чем в чем $\frac{n-1}{n}$ раз.

Главной целью нашего занятия является доказательство теоремы Брукса.

Теорема (R. L. Brooks, 1941) Пусть $d \geqslant 3$, а G — связный граф, отличный от полного графа на $d+1$ вершине, $\Delta(G) \leqslant d$. Тогда $\chi(G) \leqslant d$.

При $\Delta(G) = 2$ вопрос о существовании правильной раскраски вершин связного графа G в два цвета очевиден. Такой граф G — либо P_n (путь из n вершин), либо C_n (цикл из n вершин). В первом случае легко видеть, что $\chi(P_n) = 2$, а во втором случае $\chi(C_{2k}) = 2$ и $\chi(C_{2k+1}) = 3$.

4. Пусть G — связный граф, $\Delta(G) = d \geqslant 3$. Докажите, что вершины G можно правильным образом раскрасить в d цветов, если
a) есть такая вершины a, что граф $G - a$ несвязен;
b) есть две такие вершины a и b, что граф $G - a - b$ несвязен;
c) есть три вершины u, v и w такие, что u смежна с v и w, вершины v и w несмежны и граф $G - v - w$ связен.

5. Докажите теорему Брукса.

И напоследок две несложные задачи про раскраски.

6. Через $\overline{G}$ будем обозначать *дополнение* графа G, то есть, граф на тех же вершинах с ребрами, которых нет в графе G. Докажите, что $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant n + 1$, где n — количество вершин графа G.

7. В графе G любые два нечетных цикла имеют общую вершину. Докажите, что $\chi(G) \leqslant 5$.

8. Разнобой. 7 июля

1. Пусть p – простое число. Докажите, что $(3p-1)! + 2p^2 \ \vdots\ p^3$

2. Пусть $f(x)$ — приведенный квадратный трехчлен, который имеет два различных действительных корня, из которых ровно один принадлежит отрезку $[0;1]$. Докажите, что $f(f(0)) \leqslant 0$.

3. a) Из угла прямоугольного биллиарда $m \times n$ с целыми сторонами пущен шар по биссектрисе этого угла. Докажите, что после нескольких отражений (по закону "угол падения равен углу отражения") шар снова попадет в угол. b) Через сколько отражений случится этот долгожданный момент?

4. В графе с n вершинами степень каждой вершины не превосходит 5. Докажите, что его вершины можно покрасить в 3 цвета так, что ребер с одноцветными концами будет не более $n/2$.

5. Натуральные числа m и n таковы, что $m^2 + n^2 + m \ \vdots\ mn$. Докажите, что m — квадрат натурального числа.

6. Шесть кругов имеют общую точку. Докажите, что один из них содержит центр какого-то другого.

9. Векторы. 9 июля

0. Упростите выражение a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{BD}$; b) $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{YN} + \overrightarrow{BX} - \overrightarrow{TZ} + \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{YZ}$.

1. Докажите, что a) если M — середина отрезка AB, то для любой точки O плоскости выполняется равенство

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

b) если M делит отрезок AB в отношении $m : n$, то для любой

слагаемых.

11. Докажите, что период суммы (разности) двух дробей является делителем НОКа периодов, а предпериод не превосходит максимума периодов.

Задачи для самостоятельного решения.

12. Пусть $p > 5$ — простое число. Известно, что длина наименьшего периода десятичной записи дроби $1/p$ равна $2n$. Докажите, что если этот период разбить на два n-значных куска, то сумма чисел в этих кусках равна $99\ldots9$ (n девяток). Например, $1/7 = 0.(142857)$, $142 + 857 = 999$.

40. Заключительная Олимпиада. 23 июля.

1. Решите в натуральных числах n и k уравнение: $n! = k^2 + 2$.

2. В треугольнике ABC сторона BC вдвое больше стороны AC, D – середина BC, E – середина DC. Докажите, что AD является биссектрисой угла BAE.

3. Числа a, b и c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Докажите, что

$$2ab + 3ac + 6bc \leqslant 12 - 3a^2 + 5c^2.$$

4. На планете, имеющей форму сферы, построены города, некоторые из которых соединены дорогами. Для каждого города G имеется «антигород» $G^\star$, симметричный G относительно центра сферы. Если города G и H соединены дорогой, то «антигорода» $G^\star$ и $H^\star$ также соединены дорогой. Дороги не пересекаются в точках, отличных от городов, и из любого города можно по дорогам добраться в любой. В городах, соединенных дорогой, количество жителей отличается не более чем на 1000. Докажите, что существует город, число жителей в котором отличается от числа жителей в «антигороде» не более чем на 1000.

5. Четырехугольник $PQRS$, противоположные стороны которого не параллельны, вписан в окружность с центром в точке T.

дроби, а a –числитель.

В дальнейшем считаем, что $b \neq 2^n 5^m$.

Вспомним *Алгоритм деления столбиком.* при правильном взгляде на вещи состоит в следующем. Полагаем $r_0 = a$ и считаем рекуррентно $10 \cdot r_{i-1} = bq_i + r_i$ (деление с остатком). При этом q_i – i-тая цифра после запятой в равенстве $\frac{a}{b} = 0, q_1 q_2 q_3 \ldots$

2. a) Докажите, что при делении в столбик получается периодическая дробь с периодом не более $b-1$; b) и даже сумма длин периода и предпериода не более $b-1$.

Еще одно понимание алгоритма деления столбиком состоит в следующем. Делим с остатком: $a \cdot 10^k = bQ_k + r_k$. Тогда Q_k — число, образованное первыми k цифрами после запятой, r_k — то же самое, что ранее (тем самым r_k оказывается остатком при делении $a \cdot 10^k$ на b).

3. a) Докажите, что если $(b, 10) = 1$, то $(r_i, b) = 1$. b) Докажите, что длина периода не превосходит $\varphi(b)$.

4. Докажите, что если $(b, 10) = 1$, то зацикливание происходит без предпериода. При этом длина периода не зависит от a и равна наименьшему t, для которого $10^t - 1 \;\vdots\; b$.

5. Пусть наименьший период некоторой последовательности равен l, а L — некоторый другой период. Докажите, что $L \;\vdots\; l$.

6. Докажите, что дробь $0, RTTT\ldots$ (R — из k цифр, T — из t цифр) равна $\frac{R}{10^k} + \frac{T}{10^k(10^t-1)}$.

7. Докажите, что если $(b, 10) \neq 1$, то в десятичной записи $\frac{a}{b}$ обязательно есть предпериод.

8. Пусть $a < b$, $(a, b) = 1$, $b = 2^x \cdot 5^y \cdot b'$, $l = \max\{x, y\}$. Докажите, что период дроби $\frac{a}{b}$ равен периоду дроби $\frac{1}{b'}$, а предпериод в точности равен l, и не может быть меньше.

9. Каково наибольшее значение длины предпериода среди всех несократимых дробей со знаменателем не превосходящим 2008?

10. Приведите пример дробей с предпериодами, при сложении которых предпериод исчезает, а период меньше, чем оба периода

точки O плоскости выполняется равенство

$$\overrightarrow{OM} = \frac{n}{m+n} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n} \cdot \overrightarrow{OB}.$$

2. Докажите, что a) точка X принадлежит прямой AB тогда и только тогда, когда существует такое t, что для любой точки O плоскости $\overrightarrow{OX} = t \cdot \overrightarrow{OA} + (1-t) \cdot \overrightarrow{OB}$
b) точка X принадлежит отрезку AB тогда и только тогда, когда существует такое t, $0 < t < 1$, что для любой точки O плоскости $\overrightarrow{OX} = t \cdot \overrightarrow{OA} + (1-t) \cdot \overrightarrow{OB}$.

3. Докажите, что сумма векторов, идущих из центра правильного n-угольника в его вершины, равна $\overrightarrow{0}$.

4. Докажите, что если векторы $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}$ и $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}$ перпендикулярны, то $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{c}|$.

5. В четырехугольнике $ABCD$ точка M — середина BC, N — середина AD. Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}}{2}$.

6. Пусть $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ — два неколлинеарных вектора. Докажите, что любой вектор $\overrightarrow{c}$ можно единственным образом представить в виде $\overrightarrow{c} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2}$, где α и β — вещественные числа.

7. На прямой лежит одиннадцать точек $M_1, \ldots, M_{11}$. Вне прямой дана точка F. Можно ли на отрезках $FM_1, \ldots, FM_{11}$ расставить стрелки так, чтобы сумма всех полученных векторов была равна $\overrightarrow{0}$?

8. a) Докажите, что из медиан треугольника можно составить треугольник. b) Докажите, что это можно сделать при помощи параллельных переносов медиан. c) Найдите отношение площади получившегося треугольника к площади исходного.

9. Докажите, что на сторонах и диагоналях нечетноугольника можно расставить стрелочки так, чтобы сумма всех полученных векторов была равна $\overrightarrow{0}$.

Задачи для самостоятельного решения.

10. Пусть M, N, P, Q — середины сторон AB, BC, CD и DE выпуклого пятиугольника $ABCDE$; F — середина MP, G — середина NQ. Докажите, что отрезок FG параллелен отрезку AE и имеет вчетверо меньшую длину.

11. У выпуклого пятиугольника отметили середины сторон, а потом стерли все, кроме отмеченных точек. Восстановите пятиугольник.

12. На окружности радиуса 1 с центром O отмечена $2n+1$ точка $P_1, \ldots, P_{2n+1}$, лежащих по одну сторону от некоторого диаметра. Докажите, что $\left|\overrightarrow{OP_1} + \ldots + \overrightarrow{OP_{2n+1}}\right| \geqslant 1$.

13. На плоскости дано 2000 векторов, причем среди них есть не коллинеарные. Известно, что сумма любых 1999 векторов коллинеарна с вектором, не включенным в сумму. Докажите, что сумма всех 2000 векторов равна нулевому вектору.

10. Многочлены. 9 июля

1. Дан многочлен $(x^8 + x^5 + 1)^{20}$. Найдите его коэффициент при a) x^{17}; b) x^{18}.

2. Разделите с остатком a) $x^2 - x + 1$ на $x - 2$; b) $x^6 + 1$ на $x^2 + x$; c) $x^n - 1$ на $x - 1$; d) $x^n + 1$ на $x + 1$.

3. Найдите все натуральные n, при которых число $2n^3 + 3n^2 + 4n + 3$ делится на число $n^2 + 1$.

4. Докажите, что при любых целых неотрицательных l, m, n многочлен $x^{3l+2} + x^{3m+1} + x^{3n}$ делится на $x^2 + x + 1$.

5. Многочлен f дает остаток 2 при делении на $x - 2$ и остаток 5 при делении на $x - 3$. Какой остаток многочлен f будет давать при делении на $(x - 2)(x - 3)$?

6. Докажите, что для любых натуральных чисел n и k (где $n > k$) существует натуральное число, которое при делении на числа 1, 2, …, n дает ровно k различных остатков.

7. Теорема Безу. Значение многочлена в точке $c \in \mathbb{R}$ совпадает с остатком от деления его на многочлен $x - c$.

есть, их значения совпадают во всех точках $x \in \mathbb{Z}_p$.

1. a) Докажите, что многочлен $x^p - x$ эквивалентен нулевому по модулю p; b) Докажите, что если многочлены f и g по модулю p эквивалентны, то $f - g$ делится на $x^p - x$.

2. Докажите, что *любая* функция $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ задается некоторым многочленом.

3. a) Докажите, что если многочлен неприводим как многочлен по модулю, то он неприводим и как многочлен с целыми коэффициентами.

b) Приведите пример неприводимого многочлена с целыми коэффициентами, приводимого как многочлен по модулю.

c) Выведите отсюда критерий Эйзенштейна.

4. Докажите, что если $p - 1 \ \vdots \ m$, то многочлен $x^m - 1$ имеет ровно m корней по модулю p.

5. Пусть $P(x)$ – некоторый многочлен. Выразите через его значения в некоторых точках a) сумму четных коэффициентов;

b) нечетных коэффициентов;

c) сумму коэффициентов с номерами кратными 4;

d) дающих остаток r по модулю 4.

e) с номерами кратными 3;

f) с номерами дающими остаток 1 при делении на 3.

Задачи для самостоятельного решения.

6. Докажите, что многочлен $(x^2 - 13)(x^2 - 17)(x^2 - 221)$ имеет корни по любому наперед заданному простому модулю p.

7. Докажите, что для всякого простого числа p найдется простое число q такое, что $n^p - p$ не делится на q ни при каком натуральном n.

39. Десятичные дроби. 21 июля.

1. Докажите, что дробь является конечной тогда и только тогда, когда b имеет вид 2^n5^m. Здесь и далее, число b – знаменатель

5. Строго докажите, что a) круг; b) полуплоскость; c) бесконечная полоса; d) внутренность острого угла; d) треугольник являются выпуклыми.

6. Теорема Хелли: На плоскости даны n выпуклых множеств, каждые три из которых имеют общую точку. Докажите, что все эти множества имеют общую точку a) $n = 4$; b) для произвольного n.

7. На плоскости заданы несколько полуплоскостей, которые покрывают всю плоскость. Докажите, что из этих полуплоскостей можно выбрать три, которые также покрывают всю плоскость.

8. На плоскости даны несколько точек, любые три из которых можно накрыть кругом радиуса 1. Докажите, что и все эти точки можно накрыть таким кругом.

Задачи для самостоятельного решения.

9. Теорема Юнга: На плоскости даны несколько точек, расстояние между любыми двумя из которых не превосходит 1. Докажите, что все эти точки можно накрыть кругом радиуса $1/\sqrt{3}$.

10. Докажите, что внутри любого выпуклого семиугольника есть точка, не принадлежащая ни одному из четырехугольников, образованных четверками его соседних вершин.

38. Многочлены над комплексными числами и над $\mathbb{Z}_p$. 21 июля.

0. Вспомните, что степень произведения многочленов по простому модулю есть сумма степеней сомножителей. Приведите пример, показывающий, что для составного модуля это неверно.

0. Вспомните, что у многочлена степени n по простому модулю не может быть более n корней. Покажите, что для составного модуля это не так.

Определение: Назовем два многочлена по модулю p *эквивалентными,* если они задают одну и ту же функцию $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, то

8. Многочлен делится на $x - c$ тогда и только тогда, когда c является его корнем.

9. Пусть $c_1, \dots, c_k$ — различные вещественные числа. Докажите, что многочлен f делится на произведение $(x-c_1)\dots(x-c_k)$ тогда и только тогда, когда все c_i являются корнями f.

Задачи для самостоятельного решения.

Определение: *Кратностью* корня c многочлена f называется наибольшее целое k такое, что f делится на $(x-c)^k$. Обозначение: $\mathrm{mult}_f(c)$.

10. Докажите, что a) $\mathrm{mult}_{f+g}(c) \geqslant \min(\mathrm{mult}_f(c), \mathrm{mult}_g(c))$;
b) $\mathrm{mult}_{fg}(c) = \mathrm{mult}_f(c) + \mathrm{mult}_g(c)$.

11. Докажите, что число корней многочлена (с учетом кратности) не превосходит его степени.

12. Докажите, что если значения многочленов f и g совпадают во всех точках, то есть $f(c) = g(c)$ для любого c, то многочлены f и g совпадают.

11. Неравенства. 9 июля

1. Докажите, что a) $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ для любых чисел a и b; b) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$.

2. a) Для любого положительного числа x докажите неравенство $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$. b) Какое наименьшее значение может принимать выражение $ax + \frac{b}{x}$ при $x > 0$ $(a, b > 0)$?

3. Докажите, что для любых положительных чисел a, b и c выполняется неравенство $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 9$.

4. Докажите, что $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$ $(a, b, c > 0)$.

5. Докажите, что $a + b + c + d \geqslant 4\sqrt[4]{abcd}$ $(a, b, c, d > 0)$.

6. Числа x и y больше нуля, но меньше единицы. Докажите, что $\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} < 1$.

7. a) При $n > 2$ докажите неравенство $2^n > 2n + 1$;
b) *(Неравенство Бернулли)* При $n > 1$, $\alpha > -1$ докажите неравенство $(1 + \alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$.

8. Докажите, что $7a + 5b \geqslant ab + 35$, если $a, b \in [5, 7]$.

9. Докажите *неравенство между средним квадратическим и средним арифметическим* для положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

10. *(Неравенство Коши-Буняковского-Шварца)* a) Докажите, что для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ справедливо неравенство

$$\left(a_1^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + \cdots + b_n^2\right) \geqslant (a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2.$$

b) При каких значениях переменных достигается равенство?

Задачи для самостоятельного решения.

11. Докажите, что если x, y и z — длины сторон треугольника, то $xyz \geqslant (x + y - z)(y + z - x)(x + z - y)$.

12. Придумайте и докажите неравенство, аналогичное задаче 3, для положительных чисел x_1,x_2,...,x_n.

13. Придумайте и докажите неравенство Бернулли для остальных α.

12. Показатели. 10 июля

Определение: Показателем целого a по модулю натурального n (при условии, что a и n взаимно просты) называется наименьшее натуральное t такое, что $a^t \underset{n}{\equiv} 1$.

1. a) Докажите, что $a^d \underset{n}{\equiv} 1$ тогда и только тогда, когда d делится на t.
b) Докажите, что $a^d \underset{n}{\equiv} a^s$ тогда и только тогда, когда $d - s \vdots t$.
c) Докажите, что $\varphi(n)$ делится на t.

(здесь p — простое число).

7. Пусть $f \in \mathbb{Z}[x]$ принимает целые значения ± 1 при двух различных целых значениях a, b. Докажите, что a) если $|b - a| > 2$, то f не имеет рациональных корней; b) если $|b - a| \leqslant 2$, то рациональным корнем может быть лишь $(b + a)/2$.

8. Пусть a_1, a_2,..., a_n — различные целые числа. Докажите, что многочлены

a) $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) - 1$;

b) $(x - a_1)^2(x - a_2)^2\ldots(x - a_n)^2 + 1$

неприводимы над $\mathbb{Z}$.

37. Теорема Хелли. 21 июля.

1. На прямой даны несколько отрезков, любые два из которых имеют общую точку. Докажите, что все отрезки имеют общую точку.

2. На плоскости даны несколько прямоугольников, у которых стороны параллельны двум заданным взаимно перпендикулярным прямым. При этом любые два прямоугольника имеют общую точку. Доказать, что и все эти прямоугольники имеют общую точку.

3. На плоскости дано конечное множество многоугольников, любые два из которых имеют общую точку. Докажите, что найдется прямая, пересекающая каждый из этих многоугольников. Правда ли, что у многоугольников обязательно найдется общая точка?

Определение: Множество точек на плоскости называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками оно целиком содержит отрезок, их соединяющий. Многоугольник называется выпуклым, если множество его точек является выпуклым.

4. Докажите, что пересечение любого семейства выпуклых множеств является выпуклым множеством. Верно ли то же самое для объединения?

36. Неприводимость. 20 июля.

Воспоминания. Отныне мы будем рассматривать многочлены с коэффициентами не только в $\mathbb{R}$, но и в других числовых системах, например, в $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}$. Пусть K — такая числовая система; через $K[x]$ мы будем обозначать множество всех многочленов с коэффициентами из K. Конечно, любой многочлен из $K[x]$ является и многочленом над $\mathbb{R}$, то есть $K[x] \subseteq \mathbb{R}[x]$. Но другие понятия, например, *неприводимость*, могут измениться при переходе от $\mathbb{R}$ к K: многочлен называется *неприводимым над K*, если его нельзя представить в виде произведения двух многочленов степени выше нулевой с коэффициентами из K.

1. Пусть g, $h \in \mathbb{Z}[x]$ и $f = gh$. Известно, что не все коэффициенты g четны и не все коэффициенты h четны. Докажите, что не все коэффициенты f четны.

Определение: *Содержанием* многочлена $f \in \mathbb{Z}[x]$ называется наибольший общий делитель его коэффициентов (обозначение: $c(f)$). Многочлен называется *примитивным*, если его содержание равно 1.

2. Докажите, что любой многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$ можно представить в виде $f = c(f)f_1$, где f_1 — примитивный многочлен.

3. (Лемма Гаусса) Произведение примитивных многочленов примитивно.

Следствие. $c(fg) = c(f)c(g)$.

4. Если многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$ неприводим над $\mathbb{Z}$, то он неприводим над $\mathbb{Q}$.

5. (Критерий Эйзенштейна). Пусть все коэффициенты многочлена над $\mathbb{Z}$, кроме старшего, делятся на простое число p и свободный член не делится на p^2. Докажите, что этот многочлен неприводим над $\mathbb{Z}$.

Задачи для самостоятельного решения.

6. Докажите, что многочлен $x^{p-1} + \cdots + x + 1$ неприводим над $\mathbb{Z}$

2. a) Докажите, что в разложении на простые сомножители числа $2^q - 1$, где q –простое, любое число будет давать остаток 1 по модулю q.

b) Выведите из этого, что простых чисел бесконечно много.

3. Докажите, что $\varphi(a^n - 1)$ делится на n для натуральных a и n.

4. Пусть p и q – простые, $q > 5$. Известно, что $2^p + 3^p$ делится на q. Докажите, что $q > 2p$.

5. Докажите, что если m – степень двойки, то любой простой делитель числа $2^m + 1$ сравним с 1 по модулю $2m$.

6. Докажите, что $2^{n+1} - 1$ не делится на $n + 1$.

Задачи для самостоятельного решения.

7. a) Пусть $a > 1$, $p > 2$ и p – простое. Докажите, что простые нечетные делители $a^p - 1$ или делят $a - 1$ или сравнимы с 1 по модулю $2p$.

b) Докажите, что число $\frac{a^p-1}{a-1}$ имеет хотя бы один простой делитель, не делящий $a - 1$.

c) *Частный случай теоремы Дирихле.* Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, сравнимых с 1 по модулю $2p$.

13. КБШ. 10 июля.

1. Пусть a, b, c, $d > 0$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geqslant \frac{64}{a+b+c+d}.$$

2. Для положительных чисел x, y и z выполняется равенство $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant x + y + z.$$

3. a) Пусть a, b, $c > 0$. Докажите, что

$$a^3b + b^3c + c^3a \geqslant a^2bc + b^2ac + c^2ab.$$

b) Пусть a, b и c — длины сторон треугольника. Докажите, что

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geqslant 0.$$

4. Даны попарно различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите, что $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

5. Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n\geqslant 2$) справедливо неравенство $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-a_i}\geqslant\frac{n}{n-1}$, где $s=a_1+\ldots+a_n$.

6. Для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ докажите неравенства

$$\text{a)}\ \frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_1}\geqslant a_1+a_2+\ldots+a_n;$$

$$\text{b)}\ \left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\ldots\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right)\geqslant(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n).$$

7. Пусть a, b, $c>0$ и $abc=1$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

8. Пусть a, b, c, $d>0$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geqslant 2.$$

9. Пусть a, b, c, $d>0$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\geqslant\frac{2}{3}.$$

10. Предположим, что $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — положительные числа, удовлетворяющие условию

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=b_1+b_2+\ldots+b_n.$$

Докажите неравенство

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1}+\frac{a_2^2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+b_n}\geqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{2}.$$

35. Направленные углы. 20 июля.

1. На стороне AB равнобедренного треугольника ABC ($AB=BC$) выбрана точка D. Через точку D провели касательную к описанной окружности треугольника ADC. Она пересекла описанную окружность треугольника BDC в точке M. Докажите, что $BM\|AC$.

2. (**Прямая Симсона.**) Даны треугольник ABC и точка P. Пусть A_1, B_1 и C_1 — основания перпендикуляров, опущеных из точки P на прямые BC, AC и AB соответственно. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, тогда и только тогда, когда точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC.

3. (**Точка Микеля.**) На плоскости даны 4 прямые общего положения. Докажите, что описанные окружности четырех образованных ими треугольников имеют общую точку.

4. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Описанная окружность треугольника O_1BO_2 пересекает вторую окружность также в точке P. Докажите, что точки O_1, A и P лежат на одной прямой.

5. В треугольнике ABC провели биссектрису BK и высоту CD, а в треугольнике BKC — высоту KL. Прямые BK и CD пересекаются в точке M, а прямые KL и CD — в точке N. Описанная окружность треугольника BKN вторично пересекает прямую AB в точке P. Докажите, что треугольник KPM равнобедренный.

6. Окружности S_1, S_2 и S_3 пересекаются в точке A. Кроме того, первые две окружности пересекаются в точке B, первая и третья — в точке C, а вторая и третья — в точке D. Касательные к окружности S_2 в точке B и к окружности S_3 в точке C пересекаются на окружности S_1. Докажите, что касательные к окружности S_2 в точке D и к окружности S_1 в точке C пересекаются на окружности S_3.

Кстати, первоборазные, корни существуют только по модулям $n = 2,\ 4,\ p^t,\ 2p^t$, где $p > 2$ –простое.

Теорема: По простому модулю всегда существует первообразный корень.

Ключевая лемма: Для любого натурального k по простому модулю p существует не более k таких остатков, что их k–я степень сравнима с 1 по модулю p.

План доказательства:

1. Если x по модулю p имеет показатель ab, то x^a имеет показатель b.

2. Если x и y имеют по модулю p показатели a и b соответственно, причем a и b взаимно просты, то xy имеет показатель ab.

3. Пусть s – наименьшее общее кратное всех возможных показателей остатков по модулю p. Далее, пусть $s = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}$ — разложение на простые множители. Докажите, что существуют n остатков по модулю p, имеющих показатели $p_1^{k_1},\ p_2^{k_2},\ \ldots,\ p_n^{k_n}$ соответственно.

4. Докажите существование остатка показателя s.

5. Покажите, что $s = p - 1$ (не забудьте про ключевую лемму!) Закончите доказательство теоремы.

1. Докажите, что для любого простого p числа $1,\ 2,\ \ldots,\ p-1$ можно расставить по кругу так, что для любых трех последовательных a, b и c разность $b^2 - ac$ делится на p.

2. Найдите число остатков по модулю p, являющихся первообразными корнями.

3. Петя возвел каждое из чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ 100$ в степень k и сложил все получившиеся результаты. При каких k то, что получилось, будет делиться на 101?

4. Докажите, что если число $2^n + 1$ — простое ($n > 1$), то 3 является его первообразным корнем.

14. Комплексные числа, начала. 10 июля

1. Выполните действия: $\frac{(1+3i)(1-4i)+4+i}{2+i}$.

2. Докажите свойства сопряжения: $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, $\overline{\overline{z}} = z$.

3. Докажите, что числа z и $\overline{z}$ одновременно либо являются, либо не являются корнями многочлена с вещественными коэффициентами.

4. a) Докажите, что $|zw| = |z| \cdot |w|$ для любых z и w.
b) Докажите, что если два натуральных числа представляются в виде суммы двух квадратов, то их произведение также представляется в виде суммы двух квадратов.

5. a) Докажите, что для любого комплексного числа z найдется такое комплексное t, что $t^2 = z$. Сколько существует таких t?
b) Решите уравнение $x^2 - (2i+2)x + (2i-1) = 0$.

6. Вычислите $(1 - \sqrt{3}i)^{2007}$.

Задачи для самостоятельного решения.

7. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ — все корни степени k из единицы. Найдите $\varepsilon_1^n + \varepsilon_2^n + \ldots + \varepsilon_k^n$.

8. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — точки комплексной плоскости, являющиеся вершинами выпуклого n-угольника. Известно, что точка z удовлетворяет уравнению $\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \ldots + \frac{1}{z-z_n} = 0$. Докажите, что точка z лежит внутри этого n-угольника.

15. Геометрия масс. 11 июля

Определение: Пусть M – некоторая точка плоскости и m – ненулевое число. Материальной точкой (M, m) называется пара точка M с числом m, причем число m называется массой материальной точки (M, m), а точка M – носителем этой материальной точки.

Определение: Центром масс системы материальных точек (M_1, m_1), (M_2, m_2), ..., (M_n, m_n) называется такая точка Z, для которой имеет место равенство $m_1 \cdot \overrightarrow{ZM_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{ZM_2} + \ldots + m_n \cdot \overrightarrow{ZM_n} = 0$.

1. (Основная теорема) a) Если точка Z является центром масс системы материальных точек (M_1, m_1), (M_2, m_2), ..., (M_n, m_n), причем $m_1+m_2+\ldots+m_n \neq 0$, то для любой точки O справедливо равенство

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{m_1 \cdot \overrightarrow{OM_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{OM_2} + \ldots + m_n \cdot \overrightarrow{OM_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

.

b) Обратно, если для некоторой точки O выполняется это равенство, то точка Z – центр масс данной системы материальных точек.

2. Для конечной системы материальных точек с ненулевой суммой масс существует единственный центр масс.

Далее везде, говоря о системе материальных точек, мы будем предполагать, что сумма масс ее точек отлична от нуля.

3. (Правило рычага) Центр масс Z двух материальных точек (M_1, m_1), (M_2, m_2) с неотрицательными массами расположен на отрезке M_1M_2, причем $m_1 \cdot |M_1Z| = m_2 \cdot |M_2Z|$.

4. (Правило группировки) Пусть дана система материальных точек (M_1, m_1), (M_2, m_2), ..., (M_n, m_n) и пусть точка O – центр масс системы, состоящей из первых k материальных точек данной системы. Тогда центр масс данной системы совпадает с центром масс системы материальных точек

$$(O, m_1 + m_2 + \ldots + m_k),\ (M_{k+1}, m_{k+1}),\ \ldots (M_n, m_n).$$

16. Многочлены с целыми коэффициентами и не только. 11 июля

1. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что в последовательности $\{P(n)\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечно много состав-

33. Разнобой обо всем. 19 июля.

1. Дан граф. Рассмотрим раскраски его ребер в красный и синий цвета, для которых из каждой вершины выходит четное число красных ребер. Докажите, что число таких раскрасок является степенью двойки.

2. Докажите, что натуральное число a является точным квадратом тогда и только тогда, когда для любого натурального b существует натуральное c такое, что $a + bc$ — точный квадрат.

3. Есть 8 одинаковых кубиков с ребром 1. Произвольные 24 грани из 48 покрашены в белый цвет, а остальные — в черный. Доказать, что из этих 8 кубиков можно составить куб $2\times2\times2$, так чтобы на его поверхности белых и черных квадратиков со стороной 1 было поровну.

4. Сторону AC треугольника ABC отразили симметрично относительно прямых AB и BC. Пусть K — точка пересечения полученных прямых. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на BK.

5. Существует ли натуральное число n, у которого сумма цифр такая же, как у числа $n^2 - 1$?

34. Первообразный корень. 20 июля.

Определение: Если a и n — взаимно простые натуральные числа, и показатель числа a по модулю n равен $\varphi(n)$, то a называется первообразным корнем по модулю n.

В таком случае a^0, a^1, $\ldots a^{\varphi(n)-1}$ дают по разу всевозможные остатки по модулю n, взаимно простые с n.

Упражнение 1: Покажите справедливость предыдущего утверждения.

Упражнение 2: Существует ли первообразный корень по модулю 8? По модулю 9?

2. Докажите, что для данного модуля $p \in \mathbb{P}$
a) произведение двух квадратичных вычетов — вычет;
b) произведение вычета на невычет — невычет;
c) произведение двух невычетов — вычет.

3. Пусть p — нечетное простое число. a) Докажите, что если a — квадратичный вычет по модулю p, то $a^{\frac{p-1}{2}} \underset{p}{\equiv} 1$. b) Докажите, что если a — квадратичный невычет по модулю p, то $a^{\frac{p-1}{2}} \underset{p}{\equiv} -1$.

Определение: Пусть $p \in \mathbb{P}$. *Символом Лежандра* называется выражение, обозначаемое $\left(\frac{a}{p}\right)$, равное 1, если a — квадратичный вычет по модулю p; -1, если a — невычет по модулю p и 0, если a кратно p.

Из задачи **3.** следует, что если p нечетно, то $\left(\frac{a}{p}\right) \underset{p}{\equiv} a^{\frac{p-1}{2}}$.

4. Докажите, что -1 является квадратичным вычетом по модулю простого числа $p > 2$ тогда и только тогда, когда $p \underset{4}{\equiv} 1$.

5. Пусть p — нечетное простое число, a, b, c — вычеты по модулю p, причем $a \not\vdots\, p$, а $D = b^2 - 4ac$. Докажите, что если D — квадратичный вычет по модулю p, то сравнение $ax^2 + bx + c \underset{p}{\equiv} 0$ имеет два корня, если D — квадратичный невычет по модулю p, то сравнение $ax^2 + bx + c \underset{p}{\equiv} 0$ не имеет корней, а если $D \,\vdots\, p$, то это сравнение имеет один корень.

6. Докажите, что простых чисел вида $4k + 1$ бесконечно много.

7. Докажите, что уравнение $4xy - x - y = z^2$ a) не имеет решений в натуральных числах; b) имеет бесконечно много решений в целых числах.

Задачи для самостоятельного решения.

8. Решите в целых числах уравнение $x^3 + 7 = y^2$.

9. Простое число $p \underset{4}{\equiv} 3$, а целые числа x и y таковы, что $x^2 + y^2 \,\vdots\, p$. Докажите, что $x, y \,\vdots\, p$.

ных чисел.

2. Пусть $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами, а $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь такая, что $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$. Докажите, что a) $p \mid a_0$; b) $q \mid a_n$.

3. Пусть $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что $P(a) - P(b) \,\vdots\, a - b$.

4. Многочлен f таков, что $f(7) = 11$, а $f(11) = 13$. Докажите, что хотя бы один из его коэффициентов — не целое число.

5. Докажите, что $x^{200}y^{200} + 1$ нельзя представить в виде $p(x)q(y)$.

6. Для многочлена $(3x^2 - 4x + 2)^{100}$ после раскрытия скобок найдите a) сумму коэффициентов; b) свободный член.

7. Докажите, что многочлен $(x^2 - x + 1)^{1988} + (x^2 + x + 1)^{1988}$ после раскрытия скобок не содержит нечетных степеней x.

8. Докажите, что $\forall n \in \mathbb{N}$ есть унитарный многочлен f такой, что

$$f \in \mathbb{Z}[x] \colon \forall x \in \mathbb{Z}\ f(x) \,\vdots\, n.$$

Задачи для самостоятельного решения.

9. Докажите, что если степень многочлена P меньше чем степень многочлена Q, то найдется такое число x_0, что для любого $x > x_0$ будет выполняться неравенство: $|P(x)| < |Q(x)|$.

10. Многочлены f и g с целыми коэффициентами таковы, что $f(k)$ делится на $g(k)$ для каждого целого k. Докажите, что f делится на g.

17. Векторы и массы. 11 июля

1. Пусть точка M делит медиану AA_1 треугольника ABC в отношении $2 : 1$, считая от вершины A. Докажите, что для любой точки O выполнено равенство $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$. Выведите отсюда теорему о пересечении медиан треугольника.

2. Какие массы надо поместить в вершины треугольника со сторонами a, b и c, чтобы центр масс полученной системы материальных точек оказался a) в точке пересечения медиан; b) в точке пересечения биссектрис; c) в точке пересечения высот (ортоцентре)?

3. В треугольнике ABC проведена медиана AM, точка P — ее середина. Прямая BP пересекает сторону AC в точке E. Найдите, в каком отношении точка E делит AC.

4. Точки, разбивающие каждую из сторон четырехугольника на три равные части, соединены естественным образом. Докажите, что a) каждый из полученных отрезков также разбивается точками пересечения на три равные части.
b) Площадь среднего четыреухгольника в девять раз меньше площади исходного.

5. Дано n попарно неколлинеарных векторов $\overrightarrow{a_1},\ldots,\ \overrightarrow{a_n}$ $(n \geqslant 3)$ такие, что $\overrightarrow{a_1} + \cdots + \overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{0}$. a) Докажите, что существует выпуклый n-угольник $A_1 \ldots A_n$ такой, что набор векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, $\ldots,\overrightarrow{A_nA_1}$ совпадает с набором $\overrightarrow{a_1},\ \ldots,\overrightarrow{a_n}$.
b) Сколько существует различных многоугольников, удовлетворяющих условию a)?

6. Внутри треугольника ABC отметили точку O. Докажите, что точка O — центр масс системы (A, S_{BCO}), (B, S_{ACO}), (C, S_{ABO}).

Задачи для самостоятельного решения.

7. На биссектрисе угла A неравнобедренного треугольника ABC выбрана точка K. Прямые BK и CK пересекают стороны AC и AB в точках L и M. Докажите, что прямая LM проходит через основание биссектрисы внешнего угла A треугольника.

8. Дано $2n$ векторов на плоскости. Двое по очереди берут векторы. Выигрывает тот у кого длина суммы его векторов будет больше. Кто выигрывает при правильной игре?

9. Многоугольник вписан в окружность диаметра 1. На его сторонах расставлены стрелочки. Докажите, что длина суммы полу-

8. (Формула Стюарта). В треугольнике ABC проведен отрезок AA_1, где точка A_1 делит сторону BC в отношении $\frac{p}{q}$, считая от B. Докажите, что

$$AA_1^2 = \frac{p}{p+q}AC^2 + \frac{q}{p+q}AB^2 - \frac{pq}{(p+q)^2}BC^2.$$

9. Диагонали некоторого четырехугольника перпендикулярны. Докажите, что диагонали любого другого четырехугольника с соответственно равными сторонами также перпендикулярны.

10. Точки A, B, C, D таковы, что для любой точки M числа $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ и $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD})$ различны. Докажите, что $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$.

11. Даны точки A, B, C, D. Докажите, что

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \geqslant AC^2 + BD^2,$$

причем равенство достигается, только если $ABCD$ — параллелограмм.

12. Точки P и Q — середины диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2.$$

32. Квадратичные вычеты. 19 июля.

Определение: Пусть $m > 1$ — натуральное число и a — целое число, взаимно простое с m. Число a называется *квадратичным вычетом* по модулю m, если существует $x \in \mathbb{Z}$ такое, что $a \underset{m}{\equiv} x^2$. В противном случае число a называется *квадратичным невычетом* по модулю m.

1. Докажите, что если p — нечетное простое число, то по модулю p существует ровно $\frac{p-1}{2}$ квадратичных вычетов и столько же невычетов.

31. Скалярное произведение. 19 июля.

Определение: *Скалярным произведением* двух ненулевых векторов $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ называется число $|u|\cdot|v|\cdot\cos(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$. В случае, если хотя бы один из векторов $\overrightarrow{u}$ или $\overrightarrow{v}$ равен $\overrightarrow{0}$, их скалярное произведение также считается равным 0. Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ обозначается через $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ или $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$.

1. Для произвольных точек пространства A, B, C и D докажите формулу $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

2. Точки A, B и C не лежат на одной прямой. Найдите геометрическое место точек M таких, что

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}.$$

3. Правильный многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ вписан в окружность радиуса R с центром в O; X — произвольная точка. Докажите, что $|A_1X|^2+\ldots+|A_nX|^2=n(R^2+d^2)$, где $d=|OX|$.

4. Пусть O — центр описанной окружности, H — ортоцентр треугольника ABC, M — точка пересечения медиан этого треугольника. Докажите, что a) $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$; b) точки M, H, O лежат на одной прямой **(прямая Эйлера)**, причем $MH=2OM$; c) $OH^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$.

5. Даны два вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ с координатами (x_1,y_1) и (x_2,y_2) соответственно. Докажите, что $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=x_1x_2+y_1y_2$.

6. Пусть α, β и γ — углы остроугольного треугольника ABC. Докажите, что a) $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma\geqslant -\frac{3}{2}$;
b) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leqslant\frac{3}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения.

7. Вещественные числа a, b, c и d таковы, что $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$ и $ac+bd=0$. Найдите $ab+cd$.

ченных векторов не превосходит 2.

18. Массы наносят ответный удар! 13 июля

1. Пусть M, N и P — точки, расположенные на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC и делящие эти стороны в одинаковых отношениях (т. е. $\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CP}{PA}$). Докажите, что точка пересечения медиан треугольника MNP совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC.

Определение: Пусть $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ — два коллинеарных вектора. Тогда отношением $\frac{\overrightarrow{a}}{\overrightarrow{b}}$ называется число, которое при умножении на $\overrightarrow{b}$ дает $\overrightarrow{a}$.

2. Докажите при помощи масс **теорему Чевы**.

На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC, или на их продолжениях отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 *конкурентны* (т. е. либо параллельны, либо пересекаются в одной точке) тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}\cdot\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}=1.$$

3. Докажите при помощи масс **теорему Менелая**.

На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC, или на их продолжениях отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}\cdot\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}=-1.$$

4. Докажите при помощи масс **теорему Ван-Обеля**.

Чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке K. Докажите, что

$$\frac{AK}{KA_1}=\frac{AB_1}{B_1C}+\frac{AC_1}{C_1B}.$$

5. a) (**точка Жергонна.**) Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанной окружности с соответсвующими сторонами, пересекаются в одной точке. b) (**точка Нагеля.**) Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания вневписанных окружностей с соответсвующими сторонами, пересекаются в одной точке. c) Точки C_1, A_1, B_1 — середины сторон AB, BC, AC треугольника ABC. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ABC совпадает с точкой Нагеля треугольника $A_1B_1C_1$.

Задачи для самостоятельного решения.

6. Дан треугольник со сторонами a, b и c. Какие массы нужно поместить в его вершины, чтобы центром масс получившейся системы оказался центр a) вписанной; b) вневписанной окружности данного треугольника.

19. Матбой–междусобой. Профи–8. 13 июля.

1. Внутри квадрата со стороной 10 имеется закрашенный квадратик со стороной 1, стороны которого параллельны сторонам большого квадрата. За одну пробу про любой многоугольник можно узнать, какая доля его площади закрашена. Можно ли за две пробы наверняка определить местоположение закрашенного квадратика?

2. Во всех клетках таблицы 120×120 стоят плюсы. Разрешается одновременно изменить знаки во всех клетках одной строки или одного столбца. Можно ли, проделав такие операции несколько раз, получить таблицу, где ровно 2010 минусов?

3. Дан граф с n вершинами. Докажите, что можно задать ориентацию на его ребрах таким образом, чтоб модуль разности между количествами входящих и выходящих ребер для каждой вершины не превышал единицы.

клетки. При этом запрещается ставить две шишки на одну клетку (в том числе и в начале). Кроме того, если шишка ходила по горизонтали, то в следующий ход она должна ходить по вертикали, и наоборот. Докажите, что нельзя сделать подряд 100 ходов.

4. Докажите, что если 4^n+2^n+1 — простое число, то n — степень тройки.

5. Назовем многочлен P с вещественными коэффициентами *любопытным*, если $P(x)$ рационально тогда и только тогда, когда рационально x. При каких n существует любопытный многочлен n–й степени?

6. На плоскости дано $3n$ точек, расстояние между любыми двумя не больше 1. Докажите, что их можно разбить на n треугольников так, чтобы сумма площадей этих треугольников была не больше $1/2$.

7. В окружность ω вписан 43–угольник. Для любых трех подряд идущих вершин отмечают центр вписанной окружности этого треугольника. Оказалось, что все отмеченные точки равноудалены от центра ω. Докажите, что первоначальный многоугольник правильный.

8. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, оказалось что $AB = AC$ и $AD = AE$, а также угол $\angle BAC = \angle DAE$. Пусть X – точка пересечения BD и CE, O – центр описанной окружности треугольника CXD. Докажите, что AO перпендикулярно BE.

9. В стране 2010 городов и 3014 дорог между ними, причем из любого можно добраться в любой другой. Докажите, что можно закрыть 2 дороги, ведущие из одного города так, чтобы попрежнему из любого города можно было добраться до любого другого.

10. Для произвольных попарно различных вещественных чисел докажите неравенство:

$$\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2} \geqslant 2.$$

ризонтали, то в следующий ход она должна ходить по вертикали, и наоборот. Докажите, что нельзя сделать подряд 100 ходов.

7. В ряд стоят 14 гномов, у каждого не менее 5 орехов. Каждую минуту один из гномов может передать орех гному, стоящему справа, если у того больше орехов. Через некоторое время все орехи собрались у одного гнома. Какое наименьшее число орехов могло быть у гномов?

8. По кругу стоят числа от 1 до 30. Вася каждую минуту меняет местами два соседних числа. Через некоторое время все числа оказались на диаметрально противоположных местах. Докажите, что в какой-то момент Вася поменял местами два числа, дающих в сумме 31.

9. В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AC и BC соответственно. На стороне AB выбраны такие точки K и L, что $AK = BL$, а отрезки KM и LN пересекаются и равны. Докажите, что $AC = BC$.

10. Про вещественные числа a, b и c известно, что сумма дробей $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, $\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ и $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ равна единице. Докажите, что из трех данных дробей две равны 1, а одна равна -1.

30. Матбой ПРОФИ–8 — ПРОФИ–9. 17 июля.

1. Натуральное число называется *палиндромом*, если его запись читается одинаково в обе стороны (например, 1043401). Все палиндромы выписали в ряд в порядке возрастания. Найдите все простые числа, которые могут быть делителями разности двух соседних чисел этого ряда.

2. Верно ли, что для каждого приведенного квадратного трехчлена $f(x)$ существует x такое, для которого числа $f(x)$, $f(f(x))$ и $f(f(f(x)))$ – стороны треугольника?

3. В клетках прямоугольника 5×9 лежат 33 шишки. За ход можно одновременно сдвинуть все шишки на соседние по стороне

4. Длина высоты AB прямоугольной трапеции $ABCD$ равна сумме длин оснований AD и BC. Докажите, что биссектриса угла ABC делит сторону CD пополам.

5. *Лучом* на клетчатой плоскости назовем клетки одного столбца или строки, идущие подряд, начиная с некоторой клетки. Можно ли из клетчатой плоскости вырезать один горизонтальный и один вертикальный луч так, чтобы начав с некоторой неудаленной клетки, обойти всю оставшуюся плоскость. Разрешается переходить из любой клетки плоскости на любую соседнюю по горизонтали или по вертикали неудаленную клетку, которая не была пройдена ранее.

6. На плоскости даны три точки. Из них выбираются любые две, строится серединный перпендикуляр к отрезку, их соединяющему, и все точки отражаются симметрично относительно этой прямой; затем из всех точек (старых и новых) снова выбирают какие-то две точки и весь процесс повторяют. Так делается бесконечно много раз. Доказать, что в плоскости найдется такая прямая, что все полученные точки будут лежать по одну сторону от нее.

7. При каких натуральных n каждое из выражений $n^2-10n+84$, $n^2-12n+40$ и $n^2-4n+98$ является простым числом?

8. Пусть a, b и c – стороны треугольника. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geqslant 3.$$

9. Решите в натуральных числах $(n+1)^n = 2n^k + 3n + 1$.

10. Существуют ли два различных 239–значных числа таких, что одно из них является точным квадратом, второе точным кубом, а кроме того они отличаются лишь перестановкой цифр.

20. Многочлены. Формальное и функциональное равенство. Интерполяция. 14 июля

1. У двух многочленов f и g значения совпадают в бесконечном множестве точек. Докажите, что многочлены равны.

2. a) Докажите, что если $P(x) = P(-x)$ для бесконечного множества значений x, то многочлен P состоит только из одночленов четной степени.
b) Докажите, что если $P(x) = -P(-x)$ для бесконечного множества значений x, то многочлен P состоит только из одночленов нечетной степени.

3. Многочлен $p(x)$ при делении на $x - k$ дает остаток a) k; b) $-k$; c) $k^2 - k + 1$ при любом k от 0 до n. Найдите хотя бы один такой многочлен. d) Найдите все такие многочлены наименьших степеней.

4. a) Пусть a, b и c — различные вещественные числа. Докажите, что при всех вещественных x выполняется равенство

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} = 1.$$

b) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные вещественные числа. Докажите, что при всех вещественных x выполняется равенство

$$\frac{(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)} + \frac{(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})} = 1.$$

5. Пусть $x_0, \ldots,\ x_n$ – различные числа. a) Найдите многочлен $f_0(x)$ степени n такой, что $f_0(x_0) = 1$, $f_0(x_i) = 0$, для любого i от 1 до n.
b) Решите интерполяционную задачу: Найти многочлен $f(x)$ такой, что $f(x_i) = y_i$, где $i \in [0, n]$, а y_i – произвольные числа.

4. Уравнение $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ имеет n различных вещественных корней. Докажите, что
a) $a_{n-1}^2 \geqslant \frac{2n}{n-1}a_na_{n-2}$;
b) $a_1^2 \geqslant \frac{2n}{n-1}a_2a_0$.

5. Пусть a, b и c – вещественные числа. Известно, что $abc = 1$, $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что одно из чисел равно 1.

6. Докажите, что если многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет рациональный корень $x_0 = \frac{p}{q}$, то $P(x) = (qx - p)Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами.

29. Матбой ПРОФИ–7 — ПРОФИ–8. 17 июля.

1. Пусть ℓ — биссектриса внешнего угла C треугольника ABC. Прямая, параллельная ℓ и проходящая через середину K стороны AB, пересекает сторону AC в точке E. Найти CE, если $AC = b$ и $CB = a$.

2. В связном графе 2010 вершин и 3014 ребер. Докажите, что из него можно удалить два ребра, имеющих общую вершину, так, чтобы связность сохранилась.

3. Натуральные числа a и b таковы, что число $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ является целым. Докажите, что $(a, b) \leqslant \sqrt{a+b}$.

4. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $a^2 + b^2 + ab = c^2 + d^2 + cd$. Докажите, что число $a + b + c + d$ — составное.

5. Натуральное число называется *палиндромом*, если его запись читается одинаково слева направо и справа налево (например, 1043401). Все палиндромы выписали в ряд в порядке возрастания. Найдите все простые числа, которые могут быть делителями разности двух соседних чисел этого ряда.

6. В клетках прямоугольника 5×9 лежат 33 шишки. За ход можно одновременно сдвинуть все шишки на соседние по стороне клетки. При этом запрещается ставить две шишки на одну клетку (в том числе и в начале). Кроме того, если шишка ходила по го-

Определение: *Двойным отношением* комплексных чисел a, b, c, d называется число $(a,b,c,d) = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d}$.

4. Докажите, что точки, соответствующие комплексным числам a, b, c и d лежат на одной окружности или на одной прямой тогда и только тогда, когда их двойное отношение вещественно.

5. Пусть A, B, C и D — произвольные точки плоскости. При помощи комплексных чисел докажите, что a) (**неравенство Птолемея**)

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| \geqslant |AC| \cdot |BD|$$

b) равенство достигается тогда и только тогда, когда точки A, B, C и D лежат на одной окружности, причем именно в таком порядке (**теорема Птолемея**).

28. Многочлены: Теорема Виета. 17 июля.

1. (Теорема Виета.) Пусть многочлен

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

имеет ровно n корней с учетом кратности — x_1, x_2,…,x_n. Тогда выполняются следующие соотношения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ & \ldots \\ x_1x_2\ldots x_n &= (-1)^n\frac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

2. Многочлен $x^2 + ax + b + 1$ с целыми коэффициентами имеет два натуральных корня. Докажите, что число $a^2 + b^2$ — составное.

3. Докажите, что сумма кубов трех корней уравнения $x^3 + px + q = 0$ с целыми коэффициентами есть целое число, делящееся на 3.

c) Каким будет этот многочлен наименьшей степени? Как выглядят все такие многочлены?

6. Пусть f и g – два многочлена с вещественными коэффициентами. Оказалось, что они принимают целые значения в одних и тех же точках (то есть если $f(a)$ целое, то и $g(a)$ целое и наоборот). Докажите, что $f(x) \pm g(x) = c$, то есть либо сумма, либо разность многочленов тождественно равна константе.

Задачи для самостоятельного решения.

7. Дан многочлен $f(x)$ такой, что многочлен $f(x^n)$ делится на многочлен $x-1$. Докажите, что многочлен $f(x)$ также делится на многочлен $x-1$.

21. Разные неравенства. 14 июля.

1. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Докажите, что

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leqslant n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2).$$

2. (Транснеравенство.) a) Пусть $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$; $0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ и $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ — перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$. Докажите, что

$$a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1 \leqslant a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + \ldots$$

$$\ldots + a_nb_{i_n} \leqslant a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n.$$

b) Пусть $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n; 0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n; \ldots;$ $0 < \ell_1 \leqslant \ell_2 \leqslant \ldots \leqslant \ell_n$ и $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, …, $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ — перестановки чисел $1, 2, \ldots, n$. Докажите, что $a_1b_{i_1}\ldots\ell_{j_1} + a_2b_{i_2}\ldots\ell_{j_2} + \ldots + a_nb_{i_n}\ldots\ell_{j_n} \leqslant a_1b_1\ldots\ell_1 + a_2b_2\ldots\ell_2 + \ldots + a_nb_n\ldots\ell_n$.

3. (неравенство Чебышева.) Докажите, что для чисел $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, $0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ выполнено неравенство
$(a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_n) \leqslant n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)$.

4. Сумма положительных чисел $a_1+a_2+\ldots+a_n \leqslant 1/2$. Докажите, что $(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n) \geqslant 1/2$.

Задачи для самостоятельного решения.

5. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$ и $a+b+c+d \leqslant 1$. Докажите, что $a^2+3b^2+5c^2+7d^2 \leqslant 1$.

6. Даны положительные числа a и b такие, что $a+b \leqslant 2$. Докажите неравенство $\frac{a}{b+ab}+\frac{b}{a+ab} \geqslant 1$.

22. Движения. 15 июля.

Определение: Движением называется преборазование плоскости, при котором расстояние между точками и расстояние между их образами одинаково.

Далее мы опередили: параллельный перенос, поворот, осевую симметрию, скользящую симметрию. Определили композицию и поговорили о композиции основных движений.

1. Две равные окружности касаются в точке M. Три прямые, проходящие через точку M, пересекают первую окружность в точках A_1, B_1 и C_1, а вторую – в точках A_2, B_2 и C_2. Докажите, что: a) треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны; b) отрезки, соединяющие центры их вписанных и описанных окружностей, а также точки пересечения медиан, пересекаются в точке M и делятся ей пополам.

2. На стороне BC равностороннего треугольника ABC выбрана точка D. На отрезке CD вне треугольника ABC построен еще один правильный треугольник CDE. Точки M и N – середины отрезков AD и BE соответственно. Докажите, что треугольник MCN также является равносторонним.

4. Докажите, что движение, которое можно представить в виде композиции четного числа осевых симметрий, нельзя представить в виде композиции нечетного числа осевых симметрий.

5. На плоскости даны два равных квадрата $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 лежат на одной прямой или образуют вершины квадрата.

6. (Задача Наполеона.) Дан произвольный треугольник. На его сторонах наружу построены правильные треугольники. Докажите, что их центры являются вершинами правильного треугольника.

7. На плоскости был нарисован пятиугольник, на сторонах которого наружу были построены правильные треугольники. Хулиган Вася стер почти весь чертеж, оставив лишь вершины треугольников, не принадлежащие пятиугольнику. Сможет ли Петя восстановить чертеж?

27. Комплексный счет в геометрии. 16 июля.

На занятии мы изучали, как можно посчитать геометрию в комплексных числах.

Определение: Вспомним что такое модуль, аргумент, тригонометрическая форма комплексного числа. Доказательство факта об аргументе произведения с помощью теоремы Шаля.

1. Запишите в комплексной форме следующие движения и преобразования плоскости: a) параллельный перенос, поворот; b) гомотетия, поворотная гомотетия; c) осевая симметрия, скользящая симметрия.

2. Найдите условие того, что три точки на комплексной плоскости a) лежат на одной прямой; b) одна лежит на отрезке между двумя другими.

3. Запишите уравнение a) прямой; b) окружности в комплексных числах.

b) при $p = 2$ аналогичное верно только при $\alpha \geqslant 2$.

Доказательство: Предположим, что $a-b$ делится на p, причем a не делится на p.
a) Докажите, что $\mathrm{ord}_p(a^p - b^p) > \mathrm{ord}_p(a-b)$.
b) Докажите, что $\mathrm{ord}_p(a^s - b^s) = \mathrm{ord}_p(a-b)$, если s не делится на p.
c) Докажите, что $\mathrm{ord}_p(a^k - b^k) \geqslant \mathrm{ord}_p(a-b) + \mathrm{ord}_p(k)$.
d) Докажите, что если $p > 2$, то $\mathrm{ord}_p(a^p - b^p) = \mathrm{ord}_p(a-b) + 1$.
e) Докажите лемму Гензеля в случае, если выполнено условие 1).
f) Докажите лемму Гензеля в случае, если выполнено условие 2).

1. В какой степени 5 входит в разложение числа $3^{10000} - 2^{10000}$ на простые множители?

2. Докажите, что показатель числа 2 по модулю 3^n равен $\varphi(3^n)$.

3. Решите в натуральных числах уравнение $3^x = 2^x y + 1$.

4. Найдите все четверки натуральных чисел (n, k, p, x), для которых $x > 2$, $n > 1$, p — простое и $x^n = p^k + 1$.

5. Какое наибольшее число нулей может быть среди шести последних цифр числа 2^n для $n > 100$?

26. Теорема Шаля и задачи на движение. 16 июля.

1. Докажите, что любое движение однозначно задается образами a) одной точки и двух неколлинеарных векторов; b) трех точек, не лежащих на одной прямой.

2. a) Докажите, что движение, имеющее три неподвижные точки, не лежащие на одной прямой, является тождественным преобразованием, а движение, имеющее две неподвижные точки, — тождественным преобразованием или симметрией.
b) Докажите, что движение, имеющее ровно одну неподвижную точку, является поворотом.

3. Теорема Шаля. Докажите, что любое движение можно представить как композицию не более чем трех осевых симметрий.

23. Лемма Холла, двудольные графы. 15 июля.

1. На вечере ни один мальчик не танцевал со всеми девочками, а каждая девочка танцевала хотя бы с одним мальчиком. Докажите, что существует 2 мальчика и 2 девочки такие, что первый танцевал с первой, второй — со второй, а первый со второй и второй с первой не танцевали.

2. (Лемма о девушках.) Дано n юношей и несколько девушек. Известно, что для любого $k \leqslant n$ и любой группы из k юношей есть не менее k девушек, каждая из которых знакома хотя бы с одним из этих k мальчиков. Докажите, что все юноши могут выбрать по невесте из числа своих знакомых.

А если сформулировать по-научному про двудольный граф, то получится **лемма Холла**.

3. (Лемма Холла для арабских стран.) Среди n юношей и нескольких девушек некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Каждый юноша хочет жениться на m знакомых девушках. Докажите, что они могут это сделать тогда и только тогда, когда для любого набора из k юношей количество знакомых им в совокупности девушек не меньше km.

4. Даны k мальчиков и $2k-1$ конфета. Докажите, что можно дать каждому мальчику по конфете так, чтобы мальчику, которому не нравится его конфета, не нравились и конфеты остальных мальчиков (чтобы не создавать предпосылок для драки).

5. Все вершины двудольного графа имеют степень k. Докажите, что их можно разбить на пары смежных.

6. Латинским называется прямоугольник $m \times n$, $m \leqslant n$, заполненный числами от 1 до n, такой, что в каждой строчке и в каждом столбце числа различны. Докажите, что любой латинский прямоугольник можно дополнить до латинского квадрата $n \times n$.

7. Пусть M — множество всех k-элементных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, 2k+1\}$. Существует ли биекция $f\colon M \to M$ такая, что $A \cap f(A) = \varnothing$?

Задачи для самостоятельного решения.

8. Каждый из двух равновеликих квадратов разбит на 100 равновеликих частей. Докажите, что можно сложить эти квадраты в стопку и проткнуть в 100 точках так, чтобы каждая из 100 частей каждого из квадратов была проткнута.

9. В квадрате $n \times n$ стоят неотрицательные числа так, что в каждой строке и в каждом столбце сумма равна 1. Докажите, что в этот квадрат можно поставить n не бьющих друг друга ладей так, чтобы под каждой поставленной ладьей было положительное число.

24. Неравенство о средних. 15 июля.

1. Даны положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Докажите, что

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n$$

(Неравенством о средних пользоваться не разрешается).

2. (**Неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом.**) Для произвольных положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ выполняется неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

а) Докажите, что если неравенство о средних выполняется для k чисел, то оно выполняется и для $2k$ чисел. b) Докажите, что если неравенство о средних выполняется для k чисел, то оно выполняется и для $k-1$ числа. c) Выведете неравенство о средних из задачи **1.** d) Докажите неравенство о средних методом Штурма без применения индукции.

3. (**Неравенство о среднем геометрическом и среднем гармоническом.**) Докажите, что для произвольных положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

4. (**Неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратичном.**) Докажите, что для произвольных вещественных чисел $a_1, \ldots, a_n$ выполняется неравенство

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

5. Для положительных чисел a и b докажите неравенство: $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}$.

6. Докажите неравенство $\sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a} \leqslant 12$.

25. Лемма Гензеля. 16 июля

-1. Докажите, что $C_{p^n}^k \,\vdots\, p$, где k не равно 0 и p^n.

Обозначение: Будем обозначать степень, в которой простое число p входит в разложение n на простые множители, через $\mathrm{ord}_p(n)$.

0. Лемма Гензеля: Пусть a, b — различные целые числа, k — натуральное, а p — простое число, не делящее a. Если выполнено одно из прекрасных условий 1) и 2), то $\mathrm{ord}_p(a^k - b^k) = \mathrm{ord}_p(a-b) + \mathrm{ord}_p(k)$.

1) $p \neq 2$ и $\mathrm{ord}_p(a-b) \geqslant 1$;

2) $p = 2$ и $\mathrm{ord}_p(a-b) \geqslant 2$.

Замечание: Иначе лемму Гензеля можно переформулировать так:

если $a \underset{p^\alpha}{\equiv} b$ $(a \not\vdots\, p)$, α – максимальное число с этим свойством, то

а) при $p \neq 2$ выполнено $a^k \underset{p^{\alpha+s}}{\equiv} b^k$, где $s \equiv \mathrm{ord}_p(k)$, и число $\alpha + s$ нельзя увеличить;