Заключительная олимпиада. 24 июля.
Краткие решения

1. Рыбаки ловили рыбу два дня. В первый день каждый рыбак поймал столько рыб, сколько все остальные вместе во второй день. Докажите, что все рыбаки поймали поровну рыб.

Решение Каждый рыбак поймал за два дня столько, сколько все рыбаки поймали во второй день.

2. 49 точек на окружности занумерованы (возможно, в беспорядке) нечетными числами 3, 5, 7, ..., 99. Если один номер делится на другой, точки соединяются хордой. Докажите, что найдутся хорды, которые пересекаются (внутри круга).

Решение Рассмотрим точки с номерами 3, 9, 27, 81. Любые две из них соединены хордой, поэтому будут пересечения внутри круга.

Замечание Есть много других решений.

3. A, B и C - последовательные вершины правильного n-угольника, длина стороны которого равна 1. Диагонали многоугольника, выходящие из вершины B, делят треугольник ABC на $n-2$ треугольника. Докажите, что в каждом из них длина одной стороны равна произведению длин двух других сторон.

Решение Пусть X, Y — соседние точки пересечения диагоналей и прямой AC (точка X лежит между A и Y). Тогда треугольники BXY и ABY подобны по двум углам, откуда $AB : BX = BY : XY$. Значит $XY = BX \cdot BX$.

4. Положительные числа a, b, c, не превосходящие 1, таковы, что $ab + ac + bc = 1$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2$

Решение 1 Пусть $a \leq b \leq c$. Тогда

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq ac + bc + 1 \leq ac + bc + ab + 1 = 2$$

Решение 2 Достаточно доказать, что $a + b + c \leq 2$. Методом Штурма доказывается, что если $a+b+c = 2+x$, то минимум, выражения $ab+ac+bc = 1$ достигается при $a = b = 1$, $c = x$ и равен $1 + 2x > 1$. Значит $a + b + c \leq 2$, откуда $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2$.

5. Дано целое число $n > 0$. Имеются чашечные весы и n гирь, веса которых равны $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Все n гирь выкладываются одна за другой на чаши весов, то есть на каждом из n шагов выбирается гиря, которая еще не выложена на весы, и добавляется либо на левую, либо на правую чашу весов; при этом гири выкладываются так, чтобы ни в какой момент правая чаша не была тяжелее левой. Найдите количество способов выполнить такую последовательность шагов.

Решение Ответ $(2n-1)!!$. По индукции доказывается, утверждение — если есть n гирек с массами $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ таких, что $a_{k+1} > a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, то их можно выставить $(2n-1)!!$ способами. Переход — если гирька которую выставляют $n+1$ самая тяжелая, то ее поставить один способ, если одна из n остальных, то есть 2 способа ее поставить. Итого количество способов умножается на $2n+1$.

6. Обозначим через $p(n, k)$ количество делителей числа n не меньших чем k. Чему равна сумма $p(1001, 1) + p(1002, 2) + \ldots + p(2000, 1000)$?

Решение Ответ 2000. В этой сумме будут по разу подсчитаны в качестве делителей все числа от 1 до 2000.

7. Вневписанная окружность треугольника ABC касается его стороны BC в точке P, а продолжений сторон AB и AC — в точках Q и R соответственно. Докажите, что если середина PQ лежит на описанной окружности треугольника ABC, то и середина PR тоже лежит на этой описанной окружности.

8. Существует ли такая сетка из параллелограммов на плоскости в вершинах которой можно нарисовать правильный пятиугольник?

Решение Ответ: нет существует. Задача решается бесконечным спуском — по пятиугольнику строится пятиугольник меньшего размера с вершинами в решетке.