Двадцать седьмая Летняя Многопредметная Школа Кировской области

Вишкиль. 3-28 июля 2011 г.

8 класс, группа профи

Преподаватели:
А. В. Пастор, А. С. Трегубов, Л. А. Попов, Е. А. Исаак

Вступительная олимпиада. 04.07.2011

1. Как поровну разделить 7 булок на 12 человек так, чтобы каждый кусок был больше $\frac{1}{12}$ булки.

2. На хорде AB окружности с центром O берется произвольная точка M. Через точки A, M и O проводится окружность, пересекающая первую окружность в точках A и C. Докажите, что $MB = MC$.

3. Число $\underbrace{11\ldots1}_{n}2\underbrace{1\ldots11}_{n}$ делится на 11. Докажите, что оно делится на 121.

4. В таблице 2011×2011 расставляются числа 1 и -1 так, чтобы произведения чисел во всех строках и во всех столбцах были равны 1. Сколькими способами это можно сделать?

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1} & = & x_2 + x_3 + \ldots + x_{10} \\ \frac{1}{x_2} & = & x_1 + x_3 + \ldots + x_{10} \\ & \ldots & \\ \frac{1}{x_{10}} & = & x_1 + x_2 + \ldots + x_9. \end{cases}$$

6. Имеется несколько юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. Две свахи знают, кто с кем знаком. Одна сваха заявляет: “Я могу одновременно женить всех брюнетов так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке!”. Вторая сваха говорит: “А я могу устроить судьбу всех блондинок: каждая выйдет замуж за знакомого юношу!”. Этот диалог услышал любитель математики, который сказал: “В таком случае можно сделать и то, и другое одновременно!”. Прав ли он?

Теорема Холла, или Лемма о девушках. 05.07.2011

Лемма о девушках. *Дано n юношей и несколько девушек. Известно, что для любого $k \leq n$ и любой группы из k юношей есть не менее k девушек, каждая из которых знакома хотя бы с одним из этих k юношей. Тогда все юноши могут выбрать по невесте из числа своих знакомых так, что ни одна девушка не будет выбрана двумя юношами.*

Теперь давайте сформулируем эту лемму на языке теории графов. Для этого введем несколько определений.

Определение 1. Граф называется *двудольным*, если множество его вершин можно разбить на два множества, называемых *долями* так, чтобы любое ребро графа соединяло вершины из разных долей.

Определение 2. *Паросочетанием* графа называется набор его ребер, не имеющих общих концов. Паросочетание называется *совершенным*, если любая вершина графа является концом одного из ребер паросочетания.

Теорема 1 (Теорема Холла)**.** *Двудольный граф G с долями A и B удовлетворяет следующему условию: для любого подмножества $M \subset A$ в доле B найдется не менее $|M|$ вершин, смежных хотя бы с одной из вершин множества M. Тогда в графе G есть паросочетание, при котором каждая вершина доли A является концом одного из его ребер.*

Докажем теорему Холла двумя способами.

1. (*Метод чередующихся цепей*). Рассмотрим произвольное паросочетание в графе, удовлетворяющем условию теоремы Холла. Пусть нашлась вершина доли A, не являющаяся концом ни одного из ребер паросочетания. Докажите, что тогда существует паросочетание с большим числом ребер, и выведете из этого теорему Холла.

2. (*Индукция*). Двудольный граф G с долями A и B удовлетворяет условию теоремы Холла.

а) Пусть подмножество $M \subset A$ таково, что ровно $|M|$ вершин доли B смежны хотя бы с одной вершиной множества M. Докажите, что если удалить из G все вершины множества M, а также все смежные с ними вершины, то получившейся граф также будет удовлетворять условию теоремы Холла.

б) Докажите теорему Холла индукцией по числу вершин графа.

3. Все вершины двудольного графа имеют степень k.

а) Докажите, что в этом графе есть совершенное паросочетание.

б) Докажите, что ребра этого графа можно раскрасить в k цветов правильным образом (то есть так, чтобы никакие два одноцветных ребра не имели общей вершины).

4. (Лемма Холла для арабских стран.) Среди n юношей и нескольких девушек некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Каждый юноша хочет жениться на m знакомых девушках. Докажите, что они могут это сделать тогда и только тогда, когда для любого набора из k юношей количество знакомых им в совокупности девушек не меньше km.

5. Конечное множество разбито на m подмножеств с одинаковым количеством элементов, и это же множество разбито на m^2 подмножеств с одинаковым числом элементов. Докажите, что можно выбрать m^2 различных элементов так, что каждое из множеств первого разбиения содержит ровно m выбранных элементов, а каждое из множеств второго разбиения содержит ровно один выбранный элемент.

6. Даны k мальчиков и $2k-1$ конфета. Докажите, что можно дать каждому мальчику по конфете так, чтобы мальчику, которому не нравится его конфета, не нравились и конфеты остальных мальчиков (чтобы не создавать предпосылок для драки).

Разнобой-1. 05.07.2011

1. Шахматный король обошел доску ни разу не побывав в одной клетке дважды, причем его маршрут не имеет самопересечений. Какое наибольшее число диагональных ходов он мог совершить?

2. Докажите, что не существует таких двух трапеций, что боковые стороны каждой из них соответственно равны основаниям другой.

3. Положительное число x таково, что $[x]\cdot\{x\}=100$. Чему может быть равно число $[x^2]-[x]^2$? (Как обычно, $[y]$ — это целая часть числа y, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее y; $\{y\}=y-[y]$ — дробная часть числа y.)

4. Точка K лежит на стороне BC треугольника ABC. Биссектриса угла BAK вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке L. При этом прямые KL и AC перпендикулярны. Докажите, что $AK=AB$ или $AK=KC$.

5. Треугольник, все углы которого не больше 120°, разбит на треугольники. Докажите, что как минимум у одного из треугольников разбиения все углы также не больше 120°.

6. Решите в целых числах уравнение $x^3 + y^3 + 6xy = 8$.

7. В стране провели анкету, в которой требовалось назвать своего любимого писателя, художника и композитора. Оказалось, что каждый упомянутый хоть раз деятель искусств является любимым ровно k людьми. Докажите, что всех проанкетированных можно разделить на $3k-2$ группы так, чтобы в каждой группе любые два человека имели совершенно разные вкусы.

Многочлены. Деление с остатком и алгоритм Евклида. 06.07.2011

Определение 1. Многочленом над полем K называется выражение вида $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, где $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$ и $a_n \neq 0$. Число n называется степенью многочлена P, и обозначается $\deg P$. Множество всех многочленов над полем K обозначается через $K[x]$. Например, множество всех многочленов с вещественными коэффициентами обозначается через $\mathbb{R}[x]$, а множество всех многочленов с рациональными коэффициентами — через $\mathbb{Q}[x]$ и т. д.

Можно также рассматривать множество многочленов с коэффициентами из некоторого кольца. Например, множество многочленов с целыми коэффициентами обозначается через $\mathbb{Z}[x]$.

В основном, мы будем рассматривать многочлены с вещественными или рациональными коэффициентами. В частности, решая задачи этой серии можно считать, что все рассматриваемые многочлены имеют вещественные коэффициенты.

Определение 2. Многочлены $P_1(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ и $P_2 = b_m x^m + \dots + b_0$ называются *равными* тогда и только тогда, когда $m = n$ и $a_k = b_k$ при $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Каждому многочлену $P \in K[x]$ можно поставить в соответствие функцию $x \mapsto a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$. Через некоторое время мы докажем, что в случае бесконечного поля K (в частности, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$), функции заданные многочленами $P_1, P_2 \in K[x]$ равны тогда и только тогда, когда многочлены P_1 и P_2 равны.

Определение 3. Многочлен P делится на многочлен $Q \neq 0$, если существует многочлен R такой, что $P = QR$.

Многочлен h является *общим делителем* многочленов f и g, если $f \,\vdots\, h$ и $g \,\vdots\, h$ и называется *наибольшим общим делителем*, если его степень не меньше степени любого другого общего делителя f и g.

Теорема 1 (Теорема о делении с остатком)**.** *Пусть $f, g \in K[x]$, где K — поле и $g(x) \neq 0$. Тогда существуют единственные многочлены $q(x)$ и $r(x)$ такие, что $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ и $\deg(r) < \deg(g)$.*

Теорема 2 (Алгоритм Евклида)**.** *Пусть $f(x)$ и $g(x) \neq 0$ — многочлены над полем. Рассмотрим последовательные деления с остатком $f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x)$, $g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x)$, $r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x), \ldots, r_{n-2}(x) = r_{n-1}(x)q_n(x) + r_n(x)$, $r_{n-1}(x) = r_n(x)q_{n+1}(x)$.*

Тогда этот процесс завершится за конечное число шагов и многочлен $r_n(x)$ будет наибольшим общим делителем многочленов f и g.

Следствие (Линейное представление НОД)**.** *Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ над полем существуют многочлены $u(x)$ и $v(x)$ такие, что $u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x))$.*

Следствие. *Любой общий делитель двух многочленов над полем делит их наибольший общий делитель.*

1. (Теорема Безу.) а) Докажите, что остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x - a$ равен $f(a)$. б) Докажите, что $f(x) \,\vdots\, x - a$ тогда и только тогда, когда $f(a) = 0$.

2. Дан многочлен $(x^7 + x^5 + 1)^{20}$. Найдите его коэффициент при а) x^{18}; б) x^{17}.

3. Найдите а) сумму коэффициентов; б) знакопеременную сумму коэффициентов многочлена $(1 - 3x + 2x^2)^{743} \cdot (1 + 3x - 2x^2)^{744}$.

4. Найдите наибольший общий делитель следующих многочленов: а) $x^n - 1$ и $x^m - 1$; б) $x^{2^n} + 1$ и $x^{2^m} + 1$.

5. а) Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{6\alpha^3+7\alpha^2-2\alpha-1}$, где α — корень многочлена $2x^2 + x - 2$.

б) Сделайте то же самое в случае, когда α — корень многочлена $x^5 - x - 1$.

Упражнения по теме “Многочлены”

1. Найдите наибольший общий делитель многочленов и его линейное представление. а) $f(x) = x^5 - x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 15$ и $g(x) = x^3 + x^2 + 5x + 5$; б) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 22x^2 + 23x + 34$ и $g(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 6$.

Степень точки и радикальная ось. 06.07.2011

Определение 1. Даны окружность S с центром O и радиусом r, и точка M, такая, что $|OM| = d$. *Степенью* точки M относительно окружности S называется величина $d^2 - r^2$

Утверждение. *Через точку M, находящуюся на расстоянии d от центра окружности радиуса r, проведена прямая, пересекающая окружность в точках A и B. Тогда если точка M лежит вне окружности, то $|AM| \cdot |MB| = d^2 - r^2$, а если точка M лежит внутри окружности, то $|AM| \cdot |MB| = r^2 - d^2$.*

1. На прямой ℓ отмечены точки A и B. Кроме того, дано некоторое фиксированное число c. Докажите, что на прямой ℓ существует ровно одна такая точка X, что $AX^2 - BX^2 = c$.

2. На плоскости даны две неконцентрические окружности S_1 и S_2. Докажите, что геометрическое место точек, для которых степень относительно S_1 равна степени относительно S_2 — прямая.

Определение 2. Эта прямая называется *радикальной осью* окружностей S_1 и S_2.

Определение 3. *Углом* между двумя пересекающимися окружностями называется угол между касательными к этим окружностям, проведенным через точку их пересечения (имеется в виду наименьший возможный угол между двумя данными прямыми).

3. На плоскости даны окружности S_1 и S_2. Найдите ГМТ центров окружностей, перпендикулярных S_1 и S_2.

4. На плоскости даны окружности S_1 и S_2. Найдите ГМТ центров окружностей, делящихся пополам окружностями S_1 и S_2 (то есть каждая из окружностей S_1 и S_2 пересекает искомую окружность в диаметрально противоположных точках).

5. Центры трех окружностей не лежат на одной прямой. Докажите, что их радикальные оси пересекаются в одной точке.

Определение 4. Эта точка называется *радикальным центром* трех окружностей.

6. При помощи циркуля и линейки постройте окружность, касательные к которой, проведенные из данных точек A, B, C, были бы соответственно равны трем данным отрезкам a, b, c.

7. На сторонах BC, AC, AB остроугольного треугольника ABC взяты произвольные точки A_1, B_1, C_1. Докажите, что три общие хорды пар окружностей с диаметрами AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в ортоцентре треугольника ABC.

Разнобой-2. 06.07.2011

1. Существуют ли четыре таких квадратных трехчлена, что, записав их в любом порядке, мы сможем найти число, при подстановке которого в эти трехчлены полученные значения будут записаны в строго возрастающем порядке?

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle ABD = 65°$, $\angle CBD = 35°$, $\angle ADC = 130°$ и $AB = BC$. Найдите углы четырехугольника.

3. Докажите, что число $(5+\sqrt{17})^n + (5-\sqrt{17})^n$ делится на 2^n и не делится на 2^{n+1}.

4. Все вершины графа G имеют степень 3, a — одна из них. Известно, что вершины графа G можно покрасить в три цвета правильным образом. Докажите, что эту покраску можно произвести так, чтобы соседи вершины a не были одноцветными.

5. Пусть $a, b, c, d > 0$. Докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{d}} + \sqrt{\frac{c+d}{a}} + \sqrt{\frac{d+a}{b}} \geq 4\sqrt{2}.$$

6. Существует ли такой набор из 100 попарно различных натуральных чисел, что при любом разбиении чисел этого набора на две непустые группы сумма чисел в одной из групп делится на сумму чисел в другой группе?

7. Масса каждой из 201 гирек, расположенных по окружности — натуральное число, а их общая масса — 500 грамм. Докажите, что из этого набора можно выбрать одну или несколько гирек, расположенных подряд, с общей массой 100 грамм.

Многочлены. Основная теорема арифметики. 07.07.2011

Определение 1. Многочлен $f(x) \neq 0$ называется *неприводимым*, если его нельзя представить в виде $f(x) = g(x)h(x)$, где $\deg g(x) > 0$, $\deg h(x) > 0$.

В задачах 1-3 все рассматриваемые многочлены берутся над полем

1. Докажите, что если $f(x)g(x) \vdots h(x)$ и $(f(x), h(x)) = 1$, то $g(x) \vdots h(x)$.

2. (Основная теорема арифметики.) Любой многочлен может быть представлен в виде произведения неприводимых сомножителей единственным образом с точностью до перестановки и домножения сомножителей на константы.

Определение 2. Число a называется корнем *кратности* k многочлена $f(x)$, если $f(x) \vdots (x-a)^k$ и $f(x) \not\vdots (x-a)^{k+1}$. *Числом корней многочлена с учетом кратности* называется сумма кратностей всех его корней.

3. а) Докажите, что многочлен степени n может иметь не более n корней с учетом кратности. б) Докажите, что если многочлены $f(x)$ и $g(x)$ принимают одинаковые значения в бесконечном числе точек, то они равны.

4. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что для любых двух различных целых чисел a и b верно, что $f(b) - f(a)$ делится на $b - a$.

5. Многочлен $P(x)$ дает остаток 5 при делении на $x-2$ и остаток 7 при делении на $x-3$. Какой остаток многочлен $P(x)$ дает при делении на $(x-2)(x-3)$?

6. Дан многочлен $f(x)$ такой, что многочлен $f(x^n)$ делится на многочлен $x-1$. Докажите, что многочлен $f(x)$ также делится на многочлен $x-1$.

7. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — взаимно простые многочлены, все коэффициенты которых — целые числа. Докажите, что существует натуральное M такое, что для всех натуральных n справедливо неравенство $(f(n), g(n)) < M$.

Внутренний матбой. 07.07.2011

1. Каждая деталь конструктора "Юный паяльщик" — это скобка в виде буквы "П", состоящая из трех единичных отрезков. Можно ли из деталей этого конструктора спаять полный проволочный каркас куба $2 \times 2 \times 2$, разбитого на кубики $1 \times 1 \times 1$? (Каркас состоит из 27 точек, соединенных единичными отрезками; любые две соседние точки должны быть соединены ровно одним проволочным отрезком.)

2. Существует ли арифметическая прогрессия из 2011 членов, такая, что каждый ее член является точной степенью натурального числа с натуральным показателем, большим 1.

3. Каёмкой клетчатого прямоугольника (со сторонами, не меньшими двух) назовём полосу ширины 1, идущую по краю прямоугольника. (Прямоугольник $2 \times n$ является и своей каёмкой). Можно ли квадрат 2001×2001 покрыть по линиям сетки каёмками в несколько слоёв (т. е. над каждой клеткой квадрата должно быть поровну клеток каёмок)?

4. В классе учатся n мальчиков и n девочек. Каждый мальчик составил рейтинг девочек в порядке убывания: какая нравится ему больше всего, какая на втором месте и т.д. (никакие две девочки не нравятся никакому мальчику в одинаковой степени). На день святого Валентина каждому мальчику подарили по девочке. Обсуждая полученные подарки, мальчики заметили, что при любом другом распределении девочек хотя бы одному из них досталась бы меньше нравящаяся ему девочка. Докажите, что хотя бы один из мальчиков получил ту девочку, которая нравилась ему больше всего.

Заменена на:

4'. В стране Юрландии некоторые города соединены дорогами (не проходящими через другие города), причем из любого города можно добраться до любого другого. В один несчастный день злобное племя субчиков захватило некоторый город. Каждый следующий день субчики либо захватывали город, соседний с одним из захваченных, либо освобождали захваченный город, все соседние с которым захвачены. При этом никакой город не захватывали больше одного раза. Докажите, что если субчики уже ничего не могут захватить, то из любых двух соседних городов хотя бы один захвачен.

5. Из точки A к данной окружности S проведены касательные AB и AC. На средней линии треугольника ABC, параллельной стороне BC, выбраны произвольные точки X и Y. Отрезки касательных из точек

X и Y к S пересеклись в точке Z. Докажите, что четырехугольник $AXZY$ — описанный.

6. Натуральные числа таковы, что $m^2 + n^2 + m \,\vdots\, mn$. Докажите, что число m является точным квадратом.

7. Даны положительные числа a, b, c и d такие, что $ac = bd$. Докажите неравенство

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)}{\sqrt{abcd}} \geq 4(a+c)(b+d).$$

8. В остроугольном треугольнике ABC сторона $AC > BC$, а CD, AP и BQ — высоты. Пусть R — точка пересечения прямых PQ и AB. Докажите, что описанные окружности треугольников CPQ и RDQ касаются.

Гамильтоновы пути и циклы. 09.07.2011

Определение 1. Множества вершин и ребер графа G обозначаются $V(G)$ и $E(G)$ соответственно. Степень вершины v графа G обозначается $d_G(v)$. Наименьшая из степеней вершин графа G обозначается $\delta(G)$.

Определение 2. *Простым путем* в графе называется путь, не имеющий самопересечений по вершинам (то есть никакая вершина не встречается в нем дважды). Аналогично, *простым циклом* называется цикл, не имеющий самопересечений по вершинам.

Длиной пути (цикла) называется количество его ребер.

1. Пусть $\delta(G) \geq 2$. Докажите, что а) в графе G есть простой путь длины хотя бы $\delta(G)$; б) в графе G есть простой цикл длины хотя бы $\delta(G) + 1$.

2. Дан граф G такой, что $e(G) \geqslant t \cdot v(G)$, $t \in \mathbb{N}$ (через $v(G)$ и $e(G)$ обозначены количество вершин и ребер графа G соответственно).

а) Докажите, что существует такой подграф H графа G, что $\delta(H) \geq t + 1$.

б) Докажите, что в графе G есть простой путь длины хотя бы $t + 1$ и простой цикл длины хотя бы $t + 2$.

3. Пусть $n > 2$, $v_1 \dots v_n$ — максимальный простой путь в графе G, причем $d_G(v_1) + d_G(v_n) \geq n$. Докажите, что в графе есть простой цикл длины n.

Определение 3. *Гамильтоновым путем* называется путь, проходящий по каждой вершине графа ровно один раз. *Гамильтоновым циклом* называется цикл, проходящий по каждой вершине графа ровно один раз.

4. (Теорема Оре.) В графе n вершин. а) Сумма степеней любых двух несмежных вершин больше либо равна $n-1$. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов путь. б) Сумма степеней любых двух несмежных вершин больше либо равна n. Докажите, что в этом графе есть гамильтонов цикл.

5. (Теорема Дирака.) В графе N вершин. Докажите, что а) если степени всех вершин не меньше $\frac{N-1}{2}$, то в данном графе существует гамильтонов путь; б) если степени всех вершин не меньше $\frac{N}{2}$, то в данном графе существует гамильтонов цикл.

6. Пусть $ab \notin E(G)$, $d_G(a) + d_G(b) \geq v(G)$, а в графе $G + ab$ (т. е. графе, отличающемся от G добавлением ребра ab) есть гамильтонов цикл. Докажите, что в графе G также есть гамильтонов цикл.

7. (Теорема Хватала.)

а) Пусть $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ — степени вершин графа G, причём для любого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ выполняется неравенство $d_i + d_{n-i} \geq n$. Докажите, что в графе G есть гамильтонов цикл.

б) Пусть $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ — степени вершин графа G, причём для любого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ выполняется неравенство $d_i + d_{n-i} \geq n-1$. Докажите, что в графе G есть гамильтонов путь.

Векторы. Основные понятия. 09.07.2011

Определение 1. Пусть k и ℓ — два луча, с началом в точках K и L соответственно. Лучи k и ℓ называются *сонаправленными*, если выполняется одно из следующих двух условий.

- Лучи k и ℓ лежат на (различных) параллельных прямых и находятся в одной полуплоскости относительно прямой KL.
- Лучи k и ℓ лежат на одной прямой и один из этих лучей содержится в другом (то есть все точки одного из лучей принадлежат другому).

Теорема 1. *Сонаправленность лучей является отношением эквивалентности.*

Определение 2. *Направленным отрезком* называется упорядоченная пара точек на плоскости. Направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overline{AB}$ или $\overrightarrow{AB}$. Начало и конец направленного отрезка могут совпадать.

Определение 3. Направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *эквивалентными*, если $|AB| = |CD|$ и лучи $[AB)$ и $[CD)$ сонаправлены. Направленные отрезки нулевой длины всегда считаются сонаправленными.

Утверждение. *Если точки A, B, C, D не лежат на одной прямой, то направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABDC$ является параллелограммом (именно с таким порядком вершин!).*

Теорема 2. *Эквивалентность направленных отрезков является отношением эквивалентности.*

Определение 4. Классы эквивалентности направленных отрезков называются *векторами.* Словосочетание “вектор $\overline{AB}$” означает класс эквивалентности, содержащий направленный отрезок $\overline{AB}$.

Замечание. Вектор можно отложить от любой точки плоскости, то есть если даны вектор $\overline{u}$ и точка O, то найдется единственная точка P, такая, что $\overline{OP} = \overline{u}$.

Определение 5. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *сонаправленными*, если сонаправлены лучи $[AB)$ и $[CD)$. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *противоположно направленными*, если лучи $[AB)$ и $[CD)$ параллельны (или лежат на одной прямой), но не сонаправлены. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *коллинеарными*, если они либо сонаправлены, либо противоположно направлены.

Утверждение. *Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — два неколлинеарных вектора. Тогда любой вектор $\overline{c}$ можно единственным образом представить в виде $\overline{c} = u\overline{a} + v\overline{b}$, где $u, v \in \mathbb{R}$.*

Определение 6. Пара неколлинеарных векторов $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ называется *базисом*, а представление $\overrightarrow{c} = u\overrightarrow{a} + v\overrightarrow{b}$ — *разложением* вектора $\overrightarrow{c}$ *по базису* $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$.

1. Докажите, что а) точка X принадлежит прямой AB тогда и только тогда, когда существует такое t, что для любой точки O плоскости $\overline{OX} = t\cdot\overline{OA}+(1-t)\cdot\overline{OB}$; б) точка X принадлежит отрезку AB тогда и только тогда, когда существует такое t, $0 < t < 1$, что для любой точки O плоскости $\overline{OX} = t\cdot\overline{OA} + (1-t)\cdot\overline{OB}$.

2. Докажите, что сумма векторов, идущих из центра правильного n-угольника в его вершины, равна $\overline{0}$.

3. Стороны треугольника ABC параллельны медианам треугольника DEF. Докажите, что стороны треугольника DEF параллельны медианам треугольника ABC.

4. Пусть M, N, P, Q — середины сторон AB, BC, CD и DE выпуклого пятиугольника $ABCDE$; F — середина MP, G — середина NQ. Докажите, что отрезок FG параллелен отрезку AE и имеет вчетверо меньшую длину а) с помощью векторов; б) без помощи векторов.

5. На прямой лежит 2011 точек $M_1, \ldots, M_{2011}$. Вне прямой дана точка F. Можно ли на отрезках $FM_1, \ldots, FM_{2011}$ расставить стрелки так, чтобы сумма всех полученных векторов была равна $\overline{0}$?

6. Даны n векторов с ненулевой суммой. Два игрока по очереди выбирают себе по одному вектору из этого набора. Выигрывает игрок, у которого в конце игры модуль суммы выбранных векторов будет больше. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его соперник?

7. На окружности радиуса 1 с центром O дано $2n+1$ точек $P_1, \ldots, P_{2n+1}$, лежащих по одну сторону от некоторого диаметра. Докажите, что $\left|\overline{OP_1} + \ldots + \overline{OP_{2n+1}}\right| \geq 1$.

Многочлены. Теорема Виета и прочее. 10.07.2011

Теорема (Ф. Виет). *Пусть многочлен* $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ *имеет ровно* n *корней с учетом кратности —* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Тогда выполняются следующие соотношения:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ & \ldots \\ x_1x_2\ldots x_n &= (-1)^n\frac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

Определение. Многочлен от n переменных называется *симметрическим*, если он не изменяется при перестановке переменных.

Основными симметрическими многочленами называются многочлены вида
$$\sigma_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}.$$

Факт. *Любой симметрический многочлен от n переменных можно выразить через основные симметрические.*

Доказывать этот факт в общем виде мы пока не будем. Но для большинства многочленов, которые могут встретиться вам на практике можно легко подобрать соответствующее выражение.

В этих терминах соотношения из теоремы Виета можно переформулировать следующим образом: $\sigma_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$

1. Многочлен $x^2 + ax + b + 1$ с целыми коэффициентами имеет два натуральных корня. Докажите, что число $a^2 + b^2$ — составное.

2. Докажите, что сумма кубов трех корней уравнения $x^3 + px + q = 0$ с целыми коэффициентами есть целое число, делящееся на 3.

3. Уравнение $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ имеет n различных вещественных корней. Докажите, что а) $a_{n-1}^2 \ge \frac{2n}{n-1} a_n a_{n-2}$; б) $a_1^2 \ge \frac{2n}{n-1} a_2 a_0$.

4. Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}$. Известно, что $abc = 1$, $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что одно из чисел равно 1.

5. Пусть $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами, а $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь такая, что $f(\frac{p}{q}) = 0$. Докажите, что а) $p \mid a_0$; б) $q \mid a_n$.

в) Докажите, что если многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет рациональный корень $x_0 = \frac{p}{q}$, то $P(x) = (qx - p)Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами.

6. Дан многочлен $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ ненулевой степени с положительным старшим коэффициентом. Докажите, что этот многочлен принимает сколь угодно большие значения (т.е. для любого $M \in \mathbb{R}$ существует такое $x \in \mathbb{R}$, что $P(x) > M$).

7. Пусть $x_0, x_1, \dots, x_n$ — различные вещественные числа.

а) Докажите, что существует единственный многочлен такой f такой, что $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = \ldots = f(x_n) = 0$ и $\deg f \le n$.

б) Пусть $y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Докажите, что существует единственный многочлен f такой, что $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$, $\ldots f(x_n) = y_n$ и $\deg f \le n$.

Определение. Построение многочлена, принимающего в данных точках данные значения, называется *интерполяцией*, а сам многочлен — *интерполяционным многочленом.*

Неравенства о средних и метод Штурма. 10.07.2011

1. (**Неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом.**) Для произвольных положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ выполняется неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

а) Докажите, что если неравенство о средних выполняется для k чисел, то оно выполняется и для $2k$ чисел. б) Докажите, что если неравенство о средних выполняется для k чисел, то оно выполняется и для $k-1$ числа.

2. а) Пусть $a > b > c > d > 0$. Известно, что $a+d = b+c$. Что больше: ad или bc?

б) Докажите неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом при помощи пункта а) этой задачи (такой способ доказательства неравенств называется **методом Штурма**).

3. а) (**Неравенство о среднем геометрическом и среднем гармоническом.**) Докажите, что для произвольных положительных чисел $a_1, \ldots, a_n$ выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

б) (**Неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратичном.**) Докажите, что для произвольных вещественных чисел $a_1, \ldots, a_n$ выполняется неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

4. Для положительных чисел a и b докажите неравенство: $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}$.

5. Докажите, что при любых положительных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с суммой 1 выполнено неравенство

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}{x_1x_2\ldots x_n} \geq (n-1)^n.$$

6. Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с суммой S выполнено неравенство

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \leq 1 + \frac{S}{1!} + \frac{S^2}{2!} + \ldots + \frac{S^n}{n!}.$$

7. Пусть $x_1 + \ldots + x_n = \frac{1}{2}$, а все x_i — неотрицательны. Докажите, что

$$\frac{1-x_1}{1+x_1} \cdot \frac{1-x_2}{1+x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1-x_n}{1+x_n} \geq \frac{1}{3}.$$

8. Докажите, что при положительном x и произвольных y, z верно неравенство $2^{10}(x+y^2+z^4)^7 \geq 7^7(xyz)^4$.

Скалярное произведение векторов. 10.07.2011

Определение. *Скалярным произведением* двух ненулевых векторов $\overline{u}$ и $\overline{v}$ называется число $|u| \cdot |v| \cdot \cos(\widehat{\overline{u}, \overline{v}})$. В случае, если хотя бы один из векторов $\overline{u}$ или $\overline{v}$ равен $\overline{0}$, их скалярное произведение также считается равным 0. Скалярное произведение векторов $\overline{u}$ и $\overline{v}$ обозначается $(\overline{u}, \overline{v})$ или $\overline{u} \cdot \overline{v}$.

1. Для произвольных точек пространства A, B, C и D доказать формулу $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BD} = 0$.

2. На сторонах параллелограмма во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что их центры образуют квадрат.

3. Пусть O – центр описанной окружности, H — ортоцентр и M — точка пересечения медиан треугольника ABC. а) Докажите, что $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$. б) Выведите из этого, что точки M, H, O лежат на одной прямой (*прямая Эйлера*), причем $MH = 2OM$. в) Докажите, что $OH^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2)$.

4. а) Даны два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) соответственно. Докажите, что $\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

б) На координатной плоскости дан параллелограмм $ABCD$. Известно, что вершина A имеет координаты $(0, 0)$, вершина B — (x_1, y_1) и вершина D — (x_2, y_2). Докажите, что площадь параллелограмма $ABCD$ равна $|x_1y_2 - x_2y_1|$.

5. Докажите, что а) сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон; б) сумма квадратов сторон произвольного четырехугольника не меньше, чем сумма квадратов его диагоналей, причем равенство достигается только в случае параллелограмма.

6. Вещественные числа a, b, c и d таковы, что $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ и $ac + bd = 0$. Найдите $ab + cd$.

7. Пусть α, β, γ — углы треугольника. Докажите неравенство $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}$.

Преобразования плоскости. 11.07.2011

Определение 1. *Преобразованием плоскости* называется биекция множества точек плоскости на себя.

Определение 2. Преобразование плоскости F называется *движением*, если оно сохраняет расстояния (то есть для любых двух точек A и B $|F(A)F(B)| = |AB|$).

Определение 3. Преобразование плоскости F называется *преобразованием подобия*, если существует такое $k > 0$, что для любых двух точек A и B $|F(A)F(B)| = k|AB|$.

1. Докажите, что движение переводит а) отрезок в отрезок; б) прямую в прямую.

в) Докажите, что преобразование подобия обладает теми же свойствами.

2. Точки A и B лежат по одну сторону от прямой ℓ. Постройте ломаную $ACDB$ наименьшей длины так, чтобы отрезок CD лежал на прямой ℓ и длина его была равна a.

3. Окружность пересекает каждую сторону треугольника в двух точках, одна из которых покрашена в красный, а другая — в синий цвет. Докажите, что если перпендикуляры к сторонам треугольника, восставленные в синих точках, пересекаются в одной точке, то перпендикуляры к сторонам треугольника, восставленные в красных точках, также пересекаются в одной точке.

4. (Точка Торричелли.) Пусть T — такая точка плоскости, что сумма расстояний от нее до вершин данного остроугольного треугольника минимальна. Докажите, что все стороны треугольника видны из нее под углом 120°.

5. Равные окружности S_1 и S_2 касаются окружности S внутренним образом в точках A_1 и A_2. Произвольная точка C окружности S соединена отрезками с точками A_1 и A_2. Эти отрезки пересекают окружности S_1 и S_2 в точках B_1 и B_2. Докажите, что $A_1A_2 \parallel B_1B_2$.

6. (Лемма Архимеда.) Пусть A и B — фиксированные точки окружности S. Выберем одну из дуг окружности S с концами A и B и рассмотрим произвольную окружность, касающуюся отрезка AB и выбранной дуги. Обозначим точки касания через P и Q соответственно. Докажите, что все прямые PQ пересекаются в одной точке.

7. В квадрате со стороной 1 расположена фигура, расстояние между любыми двумя точками которой не равно 0,001. Докажите, что площадь этой фигуры не превосходит: а) 0,34; б) 0,287.

Многочлены с целыми коэффициентами и многочлены по простому модулю. 11.07.2011

Определение 1. Пусть $p \in \mathbb{P}$, α — вычет по модулю p и $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Вычет α является *корнем многочлена $f(x)$ по модулю p*, если $f(\alpha) \equiv 0 \pmod p$.

Два многочлена *сравнимы по модулю p*, если сравнимы их коэффициенты при каждой степени x.

1. а) Докажите, что если α — корень многочлена $f(x)$ по модулю p, то

$$f(x) \equiv (x-\alpha)g(x) \pmod p$$

для некоторого многочлена $g(x)$ с целыми коэффициентами.

б) Докажите, что если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — различные корни многочлена $f(x)$ по модулю p, то

$$f(x) \equiv (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)g(x) \pmod p$$

для некоторого многочлена $g(x)$ с целыми коэффициентами.

в) Докажите, что многочлен степени n, у которого не все коэффициенты делятся на p, может иметь не более n корней по модулю p.

г) Докажите, что

$$x^{p-1} - 1 \equiv (x-1)(x-2)\dots(x-(p-1)) \pmod p.$$

д) Выведите из предыдущих пунктов теорему Вильсона (то есть докажите, что $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$).

Определение 2. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. *Содержанием* многочлена f называется наибольший общий делитель всех его коэффициентов. Содержание многочлена f обозначается $c(f)$.

2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами.

а) Докажите, что если $c(f) = c(g) = 1$, то $c(fg) = 1$.

б) **(Лемма Гаусса.)** Докажите, что $c(fg) = c(f)c(g)$.

в) Докажите, что многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами неприводим над $\mathbb{Z}$, то он неприводим и над $\mathbb{Q}$ (т.е. если f нельзя разложить на множители с целыми коэффициентами, то его нельзя разложить и на множители с рациональными коэффициентами).

3. (Критерий Эйзенштейна.) Пусть все коэффициенты многочлена $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, кроме старшего, кратны простому числу p, а свободный член не кратен p^2. Докажите, что многочлен $f(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

4. Пусть $p \in \mathbb{P}$. Докажите, что многочлен $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

5. а) Многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ нечетной степени n принимает значения ± 1 в n различных целых точках. Докажите, что $f(x)$ неприводим в $\mathbb{Z}[x]$.

б) Унитарный многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени n принимает значение -1 в n различных целых точках. Докажите, что $f(x)$ неприводим в $\mathbb{Z}[x]$. (Многочлен называется *унитарным*, если его старший коэффициент равен 1.)

Перестановки. 11.07.2011

1. На полковом плацу нарисован прямоугольник 1×7, разбитый на 7 квадратов. В квадратах написаны числа от 1 до 7, но не обязательно по порядку. Старшина выстроил семерых солдат в шеренгу так, что каждый стоит в своем квадрате. По команде “Переставься!” каждый солдат переходит из своего квадрата в k-ый слева, где k — число, написанное в квадрате, где стоит солдат. Докажите, что не больше, чем через 12 команд начальное расположение солдат повторится.

Определение 1. *Перестановкой* конечного множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ называется биективное отображение σ этого множества на себя.

Утверждение. *Любая перестановка разбивается на непересекающиеся циклы.*

Определение 2. *Инверсией* назовем такую пару индексов i, j, что $i < j$ и $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Перестановка называется *четной* (соответственно *нечетной*), если число инверсий в ней четно (соответственного нечетно).

Определение 3. *Транспозицией* называется перестановка, меняющая два элемента местами.

Транспозиции, меняющие местами два соседних элемента, называются *элементарными.*

2. Докажите, что любую перестановку можно получить последовательным выполнением а) транспозиций; б) элементарных транспозиций.

3. а) Докажите, что при любой транспозиции четность перестановки меняется.

б) Найдите число четных перестановок множества из n-элементов.

4. а) Докажите, что при композиции двух перестановок их четности складываются.

б) Чему равна четность цикла длины n?

5. Придумайте две перестановки, такие, что их композициями можно получить любую перестановку.

6. В городе N разрешены только тройные обмены квартир (по циклу). Однажды выяснилось, что горожане Дилер и Брокер хотят поменяться своими квартирами, а все остальные жители при этом не хотят никуда переезжать. Докажите, что этот план невыполним.

7. В ресторане есть n юношей, n девушек и n столов. За каждым столом сидят один юноша и одна девушка. На каждом столе написано, за какой номер стола должен пересесть сидящий за ним юноша и за какой стол сидящая за ним девушка. Каждые десять минут все посетители ресторана пересаживаются в соответствии с номерами, указанными на их столах. При каких n можно так написать числа на столах, что в итоге каждый юноша посидит с каждой девушкой и каждый из пришедших посидит за каждым столом?

8. В библиотеке n журналов размещены на k полках. На каждой полке первый журнал был переставлен за последний журнал этой же полки. Библиотекарь за одну операцию меняет местами два произвольных журнала (возможно на разных полках). Докажите, что наименьшее число операций, которое потребуется библиотекарю, для расстановки в исходном порядке равно $n-k$.

Преобразования плоскости: связь с векторами. 12.07.2011

1. Пусть F — произвольное преобразование подобия (возможно, являющееся движением, т. е. коэффициент подобия может быть равен 1).

а) Докажите, что если $\overline{AB}=\overline{CD}$, то $\overline{F(A)F(B)}=\overline{F(C)F(D)}$.

Исходя из утверждения пункта **а)** мы можем однозначно определить образ произвольного вектора $\overline{v}$ и обозначить его $F(\overline{v})$.

б) Докажите, что для любых векторов $\overline{u}$ и $\overline{v}$ и числа $k\in\mathbb{R}$ верны равенства $F(\overline{u}+\overline{v})=F(\overline{u})+F(\overline{v})$ и $F(k\overline{u})=kF(\overline{u})$.

Определение. Рассмотрим произвольный вектор $\overline{a}$ и угол φ. Через $\overline{a_\varphi}$ мы будем обозначать вектор, полученный из вектора $\overrightarrow{a}$ поворотом на угол φ.

Замечание. Если $\overline{AB}=\overline{CD}$, B' — образ точки B при повороте на угол φ с центром A и D' — образ точки D при повороте на угол φ с центром C, то $\overline{AB'}=\overline{CD'}$. Это означает, что при повороте вектора на угол φ с любым центром будет получаться один и тот же вектор.

2. а) Докажите, что движение является параллельным переносом тогда и только тогда, когда каждый вектор оно переводит в равный ему вектор (т.е. каждый направленный отрезок переводит в эквивалентный ему). б) Докажите, что движение является поворотом на угол $\varphi\neq 0$ тогда и только тогда, когда для любого вектора $\overrightarrow{a}$ данное движение переводит его в вектор $\overrightarrow{a_\varphi}$. в) Докажите, что преобразование подобия является гомотетией с коэффициентом $k\neq 1$ тогда и только тогда, когда для любого вектора $\overrightarrow{a}$ данное преобразование переводит его в вектор $k\cdot\overrightarrow{a}$.

3. Даны две пересекающиеся прямые. Докажите, что композиция осевых симметрий относительно этих прямых есть поворот с центром в точке пересечения прямых и найдите угол этого поворота.

4. а) Докажите, что композиция двух поворотов (их центры не обязательно совпадают!), сумма углов которых не кратна 360°, есть поворот. Найдите его угол и центр. б) А что будет, если сумма углов кратна 360°?

5. Докажите, что композиция двух гомотетий (опять же, их центры не обязательно совпадают) с коэффициентами k_1 и k_2, где $k_1k_2 \neq 1$, является гомотетией. Найдите ее центр и коэффициент. Что будет, если $k_1k_2 = 1$?

6. В треугольнике ABC проведены медиана CM и высота CH. На плоскости выбрана произвольная точка P, через которую проведены прямые, перпендикулярные CA, CM и CB. Обозначим точки пересечения этих прямых с прямой CH через A_1, M_1 и B_1 соответственно. Докажите, что $A_1M_1 = B_1M_1$.

Разнобой-3. 12.07.2011

1. Каждый из двух равновеликих квадратов разбит на 100 равновеликих частей. Докажите, что можно сложить эти квадраты в стопку и проткнуть в 100 точках так, чтобы каждая из 100 частей каждого из квадратов была проткнута.

2. Среди n векторов есть два неколлинеарных, но сумма любых $n-1$ из них коллинеарна оставшемуся. Докажите, что сумма всех n векторов равна $\overline{0}$.

3. Даны восемь вещественных чисел a, b, c, d, e, f, g, h. Докажите, что хотя бы одно из шести чисел $ac + bd$, $ae + bf$, $ag + bh$, $ce + df$, $cg + dh$, $eg + fh$ неотрицательно.

4. а) Опишите все перестановки на 10 элементах из которых извлекается корень третьей степени (т.е. она является третьей степенью некоторой перестановки); б) посчитайте их количество.

5. Вне параллелограмма $ABCD$ отмечена точка P такая, что точка C лежит внутри треугольника BDP и $\angle PBC = \angle PDC$. Докажите, что $\angle CPB = \angle DPA$.

6. В клубе “Народные Богатства” состоят 15 олигархов, некоторые из которых являются между собой деловыми партнерами. Анализируя финансовые итоги 2011 г., Счетная палата отметила, что в начале года состояние каждого из членов клуба было не меньше четверти суммарного состояния всех его партнеров, а уже в декабре состояние каждого члена клуба стало меньше четверти суммарного состояния всех его партнеров. Докажите, что кто-то из олигархов завел в 2011 г. новые деловые контакты.

7. Докажите, что для любого положительного числа x справедливо неравенство $2x^9 + 9x^8 \leq 9x^{10} + 2$.

Ориентированные графы. 14.07.2011

Определение 1. Вершины a и b ориентированного графа G назовем *связанными*, если в графе G существуют ориентированные пути из a в b и из b в a. Ориентированный граф называется *сильно связным*, если любые две его вершины связаны.

1. Дан неполный ориентированный граф G. При добавлении любого ориентированного ребра он становится сильно связным (то есть, из любой вершины появляется возможность попасть в любую другую). Докажите, что граф G является сильно связным.

2. Дан сильно связный ориентированный граф G на n вершинах.

а) В графе G между двумя вершинами может быть проведено несколько ориентированных рёбер. Докажите, что в нем можно оставить не более $2n - 2$ ориентированных рёбер так, чтобы сохранилась сильная связность.

б) В графе G между любыми двумя вершинами проведено не более одного ориентированного ребра. Докажите, что в нем можно оставить не более $2n - 3$ ориентированных рёбер так, чтобы сохранилась сильная связность.

в) Для всех $n \geq 3$ приведите примеры графов, для которых оценки из предыдущих пунктов являются точными.

Определение 2. *Компонентой сильной связности* графа G называется максимальный по включению сильно связный подграф графа G (то есть такой сильно связный подграф, что никакой другой содержащий его подграф не является сильно связным).

Замечание. Каждая вершина ориентированного графа принадлежит какой-либо компоненте сильной связности (возможно, состоящей из одной вершины). Очевидно, что различные компоненты сильной связности не могут иметь общих вершин.

Определение 3. Для данного ориентированного графа G определим *граф компонент сильной связности* $\mathcal{C}(G)$ следующим образом. Вершинами этого графа будут компоненты сильной связности графа G, и из компоненты A ведет ребро в компоненту B, если в графе G есть ребро, ведущее из вершины компоненты A в вершину компоненты B.

3. Докажите, что в графе $\mathcal{C}(G)$ нет циклов.

Определение. *Полный ориентированный граф* или *турнирный граф* — это ориентированный граф, в котором любые две вершины соединены ровно одним ориентированным ребром.

4. а) Докажите, что в сильно связном турнирном графе существует *гамильтонов цикл* (т. е. цикл, проходящий по каждой вершине ровно один раз).

б) Докажите, что в сильно связном турнирном графе с четырьмя и более вершинами существует вершина, удаление которой не нарушает сильной связности графа.

в) Докажите, что таких вершин хотя бы две.

5. а) **(Теорема Муна.)** Пусть G — сильно связный турнирный граф, $3 \le k \le v(G)$. Докажите, что для любой вершины $v \in V(G)$ существует простой цикл длины k, проходящий через v.

б) Докажите, что в графе G существует хотя бы $v(G) - k + 1$ простых циклов длины k.

6. Дан турнирный граф G на n вершинах.

а) Докажите, что при $n \neq 2, 3, 4, 6$ в графе G можно выбрать вершину так, чтобы при изменении направлений всех стрелок в этой вершине получился сильно связный турнирный граф.

б) При $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ и $n = 6$ найдите все турнирные графы, для которых это невозможно.

7. Пусть G — турнирный граф на $n^2 + 1$ вершине. Его ребра раскрашены в два цвета так, что нет одноцветных циклов. Докажите, что найдется одноцветный простой путь, проходящий по n ребрам.

Ориентация на плоскости. Направленные и ориентированные углы. 14.07.2011

Теорема 1. *Пусть M — множество всех упорядоченных троек точек плоскости, не лежащих на одной прямой. Тогда множество M можно* *представить в виде объединения двух непересекающихся подмножеств M_1 и M_2, обладающих следующими свойствами:*

1) *тройки (A, B, C) и (A, B, D) принадлежат одному подмножеству тогда и только тогда, когда точки C и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB;*

2) *для любой тройки (A, B, C) тройки (B, C, A) и (C, A, B) лежат в том же подмножестве, что и (A, B, C), а тройки (A, C, B), (C, B, A) и (B, A, C) — в другом подмножестве,*

причем такое разбиение единственно с точностью до нумерации подмножеств.

Определение 1. Тройки точек, принадлежащие одному подмножеству, называются *одинаково ориентированными.*

Задать ориентацию на плоскости значит выбрать одно из двух подмножеств M_1 или M_2. При этом, тройки точек, принадлежащие выбранному подмножеству, будут называться *ориентированными против часовой стрелки*, а тройки, принадлежащие другому подмножеству — *ориентированными по часовой стрелке.*

Замечание. Поскольку разбиение множества M на два подмножества определяется однозначно с точностью до нумерации, для того, чтобы задать ориентацию на плоскости достаточно задать ориентацию для одной упорядоченной тройки точек. Ориентация любой другой упорядоченной тройки будет тогда определяться однозначно.

Теорема 2. *Параллельный перенос и поворот сохраняют ориентацию, а осевая симметрия — изменяет ориентацию.*

То есть если $A' = F(A)$, $B' = F(B)$, $C' = F(C)$, где F — параллельный перенос или поворот, то тройки точек (A, B, C) и (A', B', C') ориентированны одинаково, а если F — осевая симметрия, то ориентации этих троек различны.

Определение 2. *Направленным углом* между прямыми a и b называется угол, при повороте на который прямая a переходит в прямую, параллельную b или совпадающую с b. Направленный угол между прямыми a и b обозначается $\angle(a, b)$. Он определен с точностью до кратного $180°$.

Свойства направленных углов

1. $\forall a \quad \angle(a, a) = 0$;

2. $\forall a, b, c \quad (\angle(a,b) = \angle(a,c) \Longleftrightarrow b \parallel c)$;

3. $\forall a, b \quad \angle(a,b) = -\angle(b,a)$;

4. $\forall a, b, c \quad \angle(a,b) + \angle(b,c) = \angle(a,c)$.

Теорема 3. 1) *Точки A, B, C, D лежат на одной прямой либо на одной окружности тогда и только тогда, когда $\angle(AB, BC) = \angle(AD, DC)$;*

2) *Прямая ℓ, проходящая через точку A, является касательной к описанной окружности треугольника ABC тогда и только тогда, когда $\angle(AB, BC) = \angle(\ell, AC)$.*

Замечание. Пункты 1) и 2) предыдущей теоремы очень похожи: касательную к окружности удобно записывать как прямую, пересекающую ее в двух совпадающих точках. Таким образом, условие второго пункта теоремы можно записать так же, как и условие первого, считая, что точки A и D совпадают: $\angle(AB, BC) = \angle(AA, AC)$.

Определение 3. *Ориентированным углом* между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется угол, при повороте на который вектор $\overline{a}$ переходит в вектор, сонаправленый с $\overline{b}$. Ориентированный угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ обозначается $\angle(\overline{a}, \overline{b})$. Он определен с точностью до кратного 360°.

Свойства ориентированных углов

1. $\forall \overline{a} \quad \angle(\overline{a}, \overline{a}) = 0$;

2. $\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \quad (\angle(\overline{a}, \overline{b}) = \angle(\overline{a}, \overline{c}) \Longleftrightarrow \overline{b} \upuparrows \overline{c})$;

3. $\forall \overline{a}, \overline{b} \quad \angle(\overline{a}, \overline{b}) = -\angle(\overline{b}, \overline{a})$;

4. $\forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \quad \angle(\overline{a}, \overline{b}) + \angle(\overline{b}, \overline{c}) = \angle(\overline{a}, \overline{c})$.

1. а) Неравные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$ и $CA \parallel C_1A_1$. Докажите, что существует гомотетия, переводящая A в A_1, B в B_1 и C в C_1. б) Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $\angle(AB, BC) = \angle(A_1B_1, B_1C_1)$ и $\angle(BC, CA) = \angle(B_1C_1, C_1A_1)$. Докажите, что они подобны.

в) Пусть $AB = BC$. Докажите, что $\angle(BA, AC) = \angle(AC, CB)$.

г) Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $\angle(AB, BC) + \angle(CA, AO) = 90^\circ$.

Решения следующих задач принимаются только в направленных углах.

2. На стороне AB равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) выбрана точка D. Через точку D провели касательную к описанной окружности треугольника ADC. Она пересекла описанную окружность треугольника BDC в точке M. Докажите, что $BM \| AC$.

3. (**Прямая Симсона.**) Даны треугольник ABC и точка P. Пусть A_1, B_1 и C_1 — основания перпендикуляров, опущеных из точки P на прямые BC, AC и AB соответственно. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, тогда и только тогда, когда точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC.

4. а) (**Точка Микеля.**) На плоскости даны 4 прямые общего положения. Докажите, что описанные окружности четырех образованных ими треугольников имеют общую точку.

б) Точки A, B, C, D лежат на одной окружности. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые BC и DA — в точке F. Докажите, что точка Микеля прямых AB, BC, CD и DA лежит на прямой EF.

5. Точки A, B, C и D лежат на окружности с центром O. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а описанные окружности треугольников AEC и BED пересекаются в точках E и P. Докажите, что а) точки A, D, P и O лежат на одной окружности; б) $\angle EPO = 90°$.

6. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Описанная окружность треугольника O_1BO_2 пересекает вторую окружность также в точке P. Докажите, что точки O_1, A и P лежат на одной прямой.

7. Окружности S_1, S_2 и S_3 пересекаются в точке A. Кроме того, первые две окружности пересекаются в точке B, первая и третья — в точке C, а вторая и третья — в точке D. Касательные к окружности S_2 в точке B и к окружности S_3 в точке C пересекаются на окружности S_1. Докажите, что касательные к окружности S_2 в точке D и к окружности S_1 в точке C пересекаются на окружности S_3.

Квадратичные вычеты. 15.07.2011

Определение 1. Пусть $m > 1$ — натуральное число и a — целое число, взаимно простое с m. Число a называется *квадратичным вычетом* по модулю m, если существует $x \in \mathbb{N}$ такое, что $a \equiv x^2 \pmod{m}$. В противном случае число a называется *квадратичным невычетом* по модулю m.

1. Докажите, что если p — нечетное простое число, то по модулю p существует ровно $\frac{p-1}{2}$ квадратичных вычетов и столько же невычетов.

2. Докажите, что для данного модуля $p \in \mathbb{P}$ а) произведение двух квадратичных вычетов — вычет; б) произведение вычета на невычет — невычет; в) произведение двух невычетов — вычет.

3. Пусть p — нечетное простое число. а) Докажите, что если a — квадратичный вычет по модулю p, то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$. б) Докажите, что если a — квадратичный невычет по модулю p, то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$.

Определение 2. Пусть $p \in \mathbb{P}$. *Символом Лежандра* называется выражение, обозначаемое $\left(\frac{a}{p}\right)$, равное 1, если a — квадратичный вычет по модулю p; -1, если a — невычет по модулю p и 0, если a кратно p.

Из задачи **3** следует, что если p нечетно, то $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$.

4. а) При каких p вычет -1 является квадратичным вычетом по модулю p (где p — нечетное простое число)?

б) **(Теорема Жирара.)** Пусть $x^2 + y^2$ делится на простое число $p = 4k + 3$. Докажите тогда, что x и y делятся на p.

5. Пусть p — нечетное простое число, a, b, c — вычеты по модулю p, причем $a \not\equiv 0 \pmod p$, а $D = b^2 - 4ac$. Докажите, что если D — квадратичный вычет по модулю p, то сравнение $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod p$ имеет два корня, если D — квадратичный невычет по модулю p, то сравнение $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod p$ не имеет корней, а если $D \equiv 0 \pmod p$, то это сравнение имеет один корень.

6. а) Найдите сумму всех квадратичных вычетов по простому модулю p. б) Известно, что x не делится на простое p. Найдите сумму $\sum\limits_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k(k+x)}{p}\right)$.

7. Докажите, что многочлен $x^4 + 1$ неприводим как многочлен над $\mathbb{Z}$, но приводим как многочлен над полем $\mathbb{F}_p$ для любого простого числа p.

8. Докажите, что уравнение $4xy - x - y = z^2$ а) не имеет решений в натуральных числах; б) имеет бесконечно много решений в целых числах.

Комплексные числа. 16.07.2011

1. а) Докажите, что если комплексное число z является корнем многочлена $f(x)$ с вещественными коэффициентами, то число $\overline{z}$ также является его корнем.

б) Докажите, что любой многочлен с вещественными коэффициентами можно разложить в произведение неприводимых многочленов не более, чем второй степени.

2. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — точки комплексной плоскости, являющиеся вершинами выпуклого n-угольника. Известно, что точка z удовлетворяет уравнению $\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \cdots + \frac{1}{z-z_n} = 0$. Докажите, что точка z лежит внутри этого n-угольника.

3. Докажите, что $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.

4. а) Докажите, что $\mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_n^4 - \mathrm{C}_n^6 + \ldots = \sqrt{2^n}\cos(\frac{\pi n}{4})$; б) $\mathrm{C}_n^1 - \mathrm{C}_n^3 + \mathrm{C}_n^5 - \mathrm{C}_n^7 + \ldots = \sqrt{2^n}\sin(\frac{\pi n}{4})$.

5. Вычислите а) $\mathrm{C}_{2010}^0 + \mathrm{C}_{2010}^3 + \mathrm{C}_{2010}^6 + \ldots + \mathrm{C}_{2010}^{2010}$; б) $\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^3 + \mathrm{C}_n^6 + \ldots$, где $n \in \mathbb{N}$.

Определение. *Двойным отношением* комплексных чисел a, b, c, d называется число $(a,b,c,d) = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d}$.

6. Докажите, что точки, соответствующие комплексным числам a, b, c, d лежат на одной окружности или на одной прямой тогда и только тогда, когда их двойное отношение вещественно.

7. Пусть A, B, C, D — произвольные точки плоскости. При помощи комплексных чисел докажите, что а) $|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| \geq |AC| \cdot |BD|$ (**неравенство Птолемея**); б) равенство достигается тогда и только тогда, когда точки A, B, C, D лежат на одной окружности, причем именно в таком порядке (**теорема Птолемея**).

Упражнения по теме “Комплексные числа”

1. Вычислите а) $(1+i)^{2011}$; б) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}-i}\right)^{2011}$.

Классификация движений. 16.07.2011

1. Докажите, что любое движение однозначно задается образами а) одной точки и двух неколлинеарных векторов; б) трех точек, не лежащих на одной прямой.

2. а) Докажите, что движение, имеющее три неподвижные точки, не лежащие на одной прямой, является тождественным преобразованием, а движение, имеющее две неподвижные точки, — тождественным преобразованием или осевой симметрией.

б) Докажите, что движение, имеющее ровно одну неподвижную точку, является поворотом.

3. (Теорема Шаля.) Докажите, что любое движение можно представить как композицию не более, чем трех осевых симметрий.

4. Докажите, что движение, которое можно представить в виде композиции четного числа осевых симметрий, нельзя представить в виде композиции нечетного числа осевых симметрий.

Определение 1. Движение, представимое в виде композиции четного числа осевых симметрий, называется *движением первого рода*, а движение, представимое в виде композиции нечетного числа осевых симметрий, называется *движением второго рода*.

Определение 2. *Скользящей симметрией* называется композиция симметрии относительно некоторой прямой ℓ и параллельного переноса на вектор, параллельный ℓ (этот вектор может быть нулевым).

5. а) Докажите, что любое движение первого рода является поворотом или параллельным переносом. б) Докажите, что любое движение второго рода является скользящей симметрией.

6. На плоскости нарисованы два равных треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ так, что обход вершин одного треугольника происходит по часовой стрелке, а обход соответствующих им вершин другого треугольника происходит против часовой стрелки. Докажите, что середины отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 лежат на одной прямой.

7. На плоскости был нарисован пятиугольник, на сторонах которого наружу были построены правильные треугольники. Хулиган Костя стер почти весь чертеж, оставив лишь вершины треугольников, не принадлежащие пятиугольнику. Сможет ли Женя восстановить чертеж?

Первообразные корни. 16.07.2011

Определение 1. Пусть $(a,m)=1$. Наименьшее натуральное число d такое, что $a^d\equiv 1\pmod m$ называется *показателем, которому принадлежит a по модулю m.*

1. Пусть a принадлежит показателю d по модулю m. Докажите, что а) числа $1=a^0,a^1,\ldots,a^{d-1}$ попарно не сравнимы по модулю m; б) $a^{d_1}\equiv a^{d_2}\pmod m \Leftrightarrow d_1\equiv d_2\pmod d$; в) $d\mid\varphi(m)$; г) для любого делителя h числа d число a^h принадлежит показателю $\frac{d}{h}$ по модулю m; д) если b принадлежит показателю k и $(d,k)=1$, то ab принадлежит показателю dk по модулю m.

Определение 2. Числа, принадлежащие показателю $\varphi(m)$ (если такие существуют), называются *первообразными корнями* по модулю m.

Теорема. *Первообразные корни по простому модулю p существуют.*

Эту теорему мы докажем двумя способами.

2. а) Пусть $d_1,\ldots,d_{p-1}$ — показатели, которым принадлежат числа $1,\ldots,p-1$ по простому модулю p. Докажите, что $[d_1,\ldots,d_{p-1}]=p-1$. б) При помощи пункта а) докажите, что первообразные корни по модулю p существуют.

3. а) Для любого натурального n докажите, что $\sum\limits_{d\mid n}\varphi(d)=n$.

б) Пусть $p\in\mathbb{P}$. При помощи пункта а) докажите, что для любого $d\mid p-1$ существует ровно $\varphi(d)$ вычетов, принадлежащих показателю d по модулю p.

4. Пусть показатель числа a по простому модулю p равен 3. Докажите, что тогда показатель числа $a+1$ равен 6.

5. Умножение всех элементов приведенной системы вычетов по нечетному простому модулю p на вычет $a\not\equiv 0\pmod p$ производит в ней перестановку.

а) Докажите, что если a — квадратичный вычет по модулю p, то получившаяся подстановка четна.

б) Докажите, что если a — квадратичный невычет по модулю p, то она нечетна.

6. Докажите, что для любых натуральных чисел a и n, больших единицы, $\varphi(a^n-1)$ делится на n.

Разнобой-4. 17.07.2011

1. В классе 30 учеников. На 14 уроках они садились по два человека за парту, причем на разных уроках они могли сидеть по разному. Докажите, что их можно рассадить за парты так, что у каждого ученика будет сосед, с которым он еще ни разу не сидел.

2. В некотором городе возможны только парные обмены квартир. Докажите, что любой сложный обмен можно осуществить за два дня.

3. а) Пусть $p \in \mathbb{P}$, $p > 2$. Докажите, что любой делитель числа $2^p - 1$ представим в виде $2kp + 1$, где $k \in \mathbb{N}$. б) Пусть $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что любой делитель числа $2^{2^n} + 1$ представим в виде $2^{n+1}k + 1$, где $k \in \mathbb{N}$. в) Докажите, что простых чисел каждого из видов $2kp+1$ и $2^{n+1}k+1$ (где числа $p \in \mathbb{P}$ и n фиксированы, а k может принимать любое натуральное значение) бесконечно много.

4. а) Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ — все корни степени k из единицы. Найдите $\varepsilon_1^n + \varepsilon_2^n + \cdots + \varepsilon_k^n$. б) Пусть $p \in \mathbb{P}$. Найдите остаток от деления на p числа $1^n + 2^n + \cdots + (p-1)^n$.

5. На данной окружности найдите такую точку, чтобы касательные из нее к другой данной окружности были равны отрезку от искомой точки до данной точки A.

6. Дано число $a > 30$. Известно, что $[a] \cdot [a^2] = [a^3]$. Докажите, что дробная часть числа a не превосходит $\frac{1}{2700}$.

Матбой Профи-8—Профи-9. 17.07.2011

1. Красные, синие и зеленые дети встали в круг. Когда учительница попросила поднять руку красных детей, рядом с которыми стоит зеленый ребенок, руку подняли 20 человек. А когда она попросила поднять руку синих детей, рядом с которыми стоит зеленый ребенок, руку подняли 25 человек. Докажите, что рядом с кем-то из поднимавших руку стоит сразу два зеленых ребенка.

2. Сколькими способами из клетчатого квадрата 2011×2011 можно вырезать квадрат 11×11 так, чтобы оставшуюся часть можно было разрезать на доминошки?

3. Дана последовательность положительных чисел $\{x_k\}_{k=1}^{2011}$, $x_1 = 2011$, $x_{2011} = 1$. Докажите, что выполняется неравенство

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{\sqrt{x_1 x_2}} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{\sqrt{x_2 x_3}} + \ldots + \frac{x_{2010}^2 + x_{2011}^2}{\sqrt{x_{2010} x_{2011}}} \geq 5511,44.$$

4. Все числа, большие 1, покрашены в два цвета (оба цвета использованы). Докажите, что существуют такие вещественные a и b, что числа $a+b$ и ab покрашены в разные цвета.

5. Окружность, проходящая через вершины A и B вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекает его диагонали AC и BD в точках E и F соответственно. Прямые AF и BC пересекаются в точке P, а прямые BE и AD — в точке Q. Докажите, что PQ параллельно CD.

6. Дано слово более чем из 10 букв, в котором любые две соседние буквы различны. Докажите, что можно поменять местами две соседние буквы так, чтобы полученное слово не было периодическим (не разбивалось на одинаковые подслова).

7. Найдите все натуральные числа a, b и c такие, что корни уравнений $x^2-2ax+b=0$, $x^2-2bx+c=0$, $x^2-2cx+a=0$ являются натуральными числами.

8. В треугольнике ABC проведены медианы BD, AK и CE, которые пересекаются в точке M. Известно, что $\frac{AB}{BC}=\frac{AK}{CE}\neq 1$. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABM и CBM, касаются прямой AC.

9. Числа $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0)$ — перестановка чисел $0, 1, \ldots, n$. Найдите все многочлены $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ $(a_n\neq 0)$ такие, что $f(x)$ имеет n вещественных корней с учетом кратности.

10. Найдите все такие натуральные n, что $n!+8$ делится на $2n+1$.

Матбой Профи-7-1 — Профи-8-1. 17.07.2011

1. 16 команд участвуют в футбольном первенстве. Оно проходит в несколько этапов. На каждом этапе какие-то 6 команд играют между собой однокруговой турнир. Могло ли оказаться, что после нескольких таких этапов все команды сыграют друг с другом по 2 раза?

2. Каждая сторона правильного треугольника поделена на 15 равных частей и через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. В результате этого получили разбиение треугольника на маленькие треугольнички. После этого в каждый из маленьких треугольничков записали $+1$ или -1. Известно, что число в каждом треугольничке равно произведению чисел в тех треугольничках, которые имеют с ним общую сторону. Докажите, что в каждом из маленьких треугольничков, прилегающих к серединам сторон большого треугольника, стоит число $+1$.

3. На шахматной доске 20×20 стоят несколько ладей, а на всех полях, которые ими не бьются, стоят кони. Никакие фигуры не бьют друг друга. Какое наибольшее количество фигур может быть на доске?

4. Натуральные числа a, b и c таковы, что $ab + 9b + 81$ и $bc + 9c + 81$ делятся на 101. Докажите, что $ac + 9a + 81$ тоже делится на 101.

5. Положительные числа x, y таковы, что $y^3 + y \leqslant x - x^3$. Докажите, что $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

6. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведена биссектриса BL. Точка K на гипотенузе BC такова, что $\angle BLK = 90°$. Оказалось, что $3CK = 2(BC - AB)$. Найдите $\angle C$.

7. В отрезке находится несколько меньших отрезков, покрывающих его. У каждого из них отбросили половину — левую или правую. Докажите, что оставшиеся половины покрывают не менее трети длины исходного отрезка.

8. В выпуклом шестиугольнике главные диагонали равны, и каждая из них делит его на две равновеликие части. Докажите, что длины его противоположных сторон равны.

9. В классе из 20 детей, некоторые из которых враждуют. Причем известно, что нет троих попарно враждующих. После обеда некоторые помирились, а некоторые поссорились. Оказалось, что все равно нет троих попарно враждующих. Докажите, что найдется не менее 15 пар детей, которые были друзьями до обеда и остались после.

10. Красные, синие и зеленые дети встали в круг. Когда учительница попросила поднять руку красных детей, рядом с которыми стоит зеленый ребенок, руку подняли 20 человек. А когда она попросила поднять руку синих детей, рядом с которыми стоит зеленый ребенок, руку подняли 25 человек. Докажите, что рядом с кем-то из поднимавших руку стоит сразу два зеленых ребенка.

Матбой Профи-7-2 — Профи-8-2. 17.07.2011

1. На симпозиум приехали 100 человек. Из них 15 французов, каждый из которых знаком хотя бы с 70 участниками симпозиума, и 85 немцев, каждый из которых знаком не более чем с десятью участниками. Их расселили в 21 комнату. Докажите, что в какой-то из комнат нет ни одной пары знакомых.

2. Каждая сторона правильного треугольника поделена на 15 равных частей и через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. В результате этого получили разбиение треугольника на маленькие треугольнички. После этого в каждый из маленьких треугольничков записали $+1$ или -1. Известно, что число в каждом треугольничке равно произведению чисел в тех треугольничках, которые имеют с ним общую сторону. Докажите, что в каждом из маленьких треугольничков, прилегающих к серединам сторон большого треугольника, стоит число $+1$.

3. На шахматной доске 20×20 стоят несколько ладей, а на всех полях, которые ими не бьются, стоят кони. Никакие фигуры не бьют друг друга. Какое наименьшее количество ладей может быть на доске?

4. Написанное на доске число можно умножить или разделить на $\frac{5}{6}$ или $\frac{9}{10}$. Можно ли из 1 получить другое целое число?

5. Пусть a, b, c, d — вещественные числа, причем $a > b > c > d$. Докажите, что

$$c < \frac{cd - ab}{c - a + d - b} < b.$$

6. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведена биссектриса BL. Точка K на гипотенузе BC такова, что $\angle BLK = 90^\circ$. Оказалось, что $3CK = 2(BC - AB)$. Найдите $\angle C$.

7. В отрезке находится несколько меньших отрезков, покрывающих его. У каждого из них отбросили правую половину. Докажите, что оставшиеся половины покрывают не менее половины длины исходного отрезка.

8. В выпуклом шестиугольнике главные диагонали равны, и каждая из них делит его на две равновеликие части. Докажите, что длины его противоположных сторон равны.

9. Найдите все простые p такие, что оба числа $\frac{p+1}{2}$ и $\frac{p^2+1}{2}$ являются точными квадратами.

10. Красные, синие и зеленые дети встали в круг. Когда учительница попросила поднять руку красных детей, рядом с которыми стоит зеленый ребенок, руку подняли 20 человек. А когда она попросила поднять руку синих детей, рядом с которыми стоит зеленый ребенок, руку подняли 25 человек. Докажите, что рядом с кем-то из поднимавших руку стоит сразу два зеленых ребенка.

Раскраски графов и теорема Брукса. 19.07.2011

Определение 1. Раскраска вершин графа G в k цветов называется *правильной*, если любые две смежные вершины покрашены в разные цвета.

Наименьшее натуральное число k, такое, что существует правильная раскраска вершин графа G в k цветов называется *хроматическим числом* графа G и обозначается $\chi(G)$.

Определение 2. Через $\alpha(G)$ обозначается размер наибольшего *независимого* множества вершин графа G, то есть такого множества вершин, между которыми нет ни одного ребра.

Определение 3. Через $\delta(G)$ и $\Delta(G)$ обозначаются соответственно наименьшая и наибольшая из степеней вершин графа G.

Определение 4. Пусть v — вершина графа G. Через $G-v$ обозначается граф, получаемый из G удалением вершины v (и всех инцидентных ей ребер).

Определение 5. Через $\overline{G}$ обозначается *дополнение* графа G, то есть граф с тем же множеством вершин, что и G, в котором смежны те и только те пары вершин, которые не смежны в графе G.

1. Докажите, что для любого графа G на n вершинах выполняется неравенство $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq n$.

2. Вершины графа G нельзя правильным образом покрасить в d цветов. Докажите, что существует такой подграф H графа G, что $\delta(H) \geq d$.

3. Докажите, что $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n+1$, где n — количество вершин графа G.

4. В графе G v вершин и e ребер, его вершины можно правильным образом покрасить в k цветов. Докажите, что $k \geq \frac{v^2}{v^2-2e}$.

5. Пусть G — связный граф, $\Delta(G) = d \geq 3$. Докажите, что вершины G можно правильным образом раскрасить в d цветов, если

а) есть такая вершина v, что граф $G - v$ несвязен;

б) есть две такие вершины u и v, что граф $G - u - v$ несвязен;

в) есть три вершины u, v и w такие, что u смежна с v и w, вершины v и w несмежны и граф $G - v - w$ связен.

Теорема (R. L. Brooks, 1941)**.** *Пусть $d \geq 3$, а G — связный граф, отличный от полного графа на $d+1$ вершине, $\Delta(G) \leq d$. Тогда $\chi(G) \leq d$.*

6. Докажите теорему Брукса а) при помощи задачи 5; б) при помощи метода чередующихся цепей.

Геометрия: разные полезные факты. 19.07.2011

1. Пусть X — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B треугольника ABC на биссектрису угла A. Докажите, что точка X а) лежит на средней линии, параллельной стороне AC, или на ее продолжении; б) лежит на прямой, соединяющей точки касания вписанной окружности со сторонами BC и AC.

2. а) Найдите центр гомотетии, переводящей треугольник в его серединный треугольник (т.е. треугольник, образованный серединами сторон). б) (**Прямая Эйлера**) При помощи пункта а) докажите, что точка пересечения медиан треугольника лежит на одной прямой с ортоцентром и центром описанной окружности. В каком отношении она делит соединяющий их отрезок?

3. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1 и высоты AA_2, BB_2, CC_2. Пусть точка H — ортоцентр треугольника ABC и точки A_3, B_3, C_3 — середины отрезков AH, BH и CH соответственно. а) (**Окружность девяти точек**) Докажите, что точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 лежат на одной окружности. б) Докажите, что центр окружности девяти точек лежит на прямой Эйлера и делит отрезок OH (где O — центр описанной окружности) на две равные части.

4. Докажите, что середина дуги AC описанной окружности треугольника ABC, содержащая вершину B, равноудалена от точек A, C, I_a и I_c (где I_a и I_c — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC и AB соответственно).

5. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке D. Точка E диаметрально противоположна точке D. Пусть F — точка пересечения прямых AE и BC. Докажите, что $BD = FC$.

6. (Теорема о трех колпаках) Общие внешние касательные к парам окружностей S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_1 пересекаются в точках A, B и C соответственно. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

7. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC, CA и AB соответственно, а точки I_A, I_B, I_C — центры соответствующих вневписанных окружностей. Докажите, что прямые I_AA_1, I_BB_1, I_CC_1 пересекаются в одной точке.

Числовой разнобой. 20.07.2011

1. Докажите, что не существует целых $n > 1$ таких, что n делит $2^n - 1$.

2. Пусть $p = 3k + 2 \in \mathbb{P}$. а) Докажите, что сравнение $x^3 \equiv 1 \pmod p$ имеет единственное решение. б) Докажите, что для любого вычета a сравнение $x^3 \equiv a \pmod p$ имеет единственное решение.

3. Пусть $p = 3k + 1 \in \mathbb{P}$. а) Докажите, что сравнение $x^3 \equiv 1 \pmod p$ имеет три решения. б) Докажите, что для любого ненулевого вычета a сравнение $x^3 \equiv a \pmod p$ либо не имеет решений, либо имеет три решения. в) Найдите количество таких ненулевых вычетов a, для которых сравнение $x^3 \equiv a \pmod p$ имеет решение.

4. Докажите, что если p нечетное простое и p делит $m^p + n^p$, то тогда и p^2 делит $m^p + n^p$.

5. Докажите, что число $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n+1}$ не является натуральным ни при каком натуральном n.

6. Многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами таков, что при каждом целом n число $f(n)$ делится на одно из двух целых чисел a или b. Докажите, что либо при каждом целом n число $f(n)$ делится на a, либо при каждом целом n число $f(n)$ делится на b.

7. Найдите все такие n, что существует m при котором $m^2 + 9$ делится на $2^n - 1$.

Геометрия масс. 20.07.2011

Определение. *Материальной точкой (м.т.)* называется упорядоченная пара mM, где M — некоторая точка плоскости и m — ненулевое число. Число m называется *массой* материальной точки mM, а сама точка M — *носителем* этой м.т.

Центром масс материальных точек $m_1M_1, m_2M_2, \ldots, m_nM_n$ называется такая точка Z, для которой имеет место равенство $m_1\overline{ZM_1} + m_2\overline{ZM_2} + \ldots + m_n\overline{ZM_n} = \overline{0}$.

Теорема 1 (Основная теорема). *Если точка Z служит центром масс системы м.т. m_1M_1, $m_2M_2, \ldots, m_nM_n$, причем $m_1 + m_2 + \ldots + m_n \neq 0$, то для любой точки O справедливо равенство*

$$\overline{OZ} = \frac{m_1\overline{OM_1} + m_2\overline{OM_2} + \ldots + m_n\overline{OM_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

Обратно, если хотя бы для одной точки O выполняется это равенство, то точка Z — центр масс данной системы м.т.

Следствие. *Для конечной системы м.т. с ненулевой суммой масс центр масс существует и определяется однозначно.*

Далее везде, говоря о системе материальных точек, будем предполагать, что сумма масс ее точек отлична от нуля.

Теорема 2 (Правило рычага)**.** *Центр масс Z двух м.т. m_1A и m_2B с неотрицательными массами расположен на отрезке AB, причем $m_1\,|AZ| = m_2\,|BZ|$.*

Теорема 3 (Правило группировки)**.** *Пусть в системе материальных точек $m_1M_1, m_2M_2, \ldots, m_nM_n$ отмечены k м.т. m_1M_1, m_2M_2, $\ldots$, m_kM_k и пусть C — центр масс отмеченных м.т. Тогда система m_1M_1, m_2M_2, $\ldots$, m_nM_n имеет тот же центр масс, что и система м.т. $(m_1 + m_2 + \ldots + m_k)C, m_{k+1}M_{k+1}, \ldots, m_nM_n$.*

1. Какие массы надо поместить в вершины треугольника со сторонами a, b, c и противолежащими им углами α, β, γ соответственно, чтобы центр масс полученной системы материальных точек оказался а) в точке пересечения биссектрис; б) в центре вневписанной окружности, касающейся стороны a; в) в ортоцентре этого треугольника.

2. а) (**Точка Жергонна.**) Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанной окружности с соответствующими сторонами, пересекаются в одной точке. Какие массы надо поместить в вершины треугольника для того, чтобы центр масс совпал с точкой Жергонна.

б) (**Точка Нагеля.**) Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания вневписанных окружностей с соответсвующими сторонами, пересекаются в одной точке. Какие массы надо поместить в вершины треугольника для того, чтобы центр масс совпал с точкой Нагеля.

в) Точки C_1, A_1, B_1 — середины сторон AB, BC, AC треугольника ABC. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ABC совпадает с точкой Нагеля треугольника $A_1B_1C_1$.

3. Пусть O — произвольная точка внутри треугольника ABC. Докажите, что $S_{BOC} \cdot \overline{OA} + S_{AOC} \cdot \overline{OB} + S_{AOB} \cdot \overline{OC} = \overline{0}$.

4. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA. Докажите, что точка пересечения отрезков KM и LN является серединой этих отрезков, а также и серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей AC и BD.

5. Женя, Митя и Сережа имеют равные массы. Они ползают по сторонам треугольника так, что их центр масс остается на месте. При этом Женя прополз по всей границе треугольника. Докажите, что их центр масс является точкой пересечения медиан треугольника.

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. 20.07.2011

1. (**Неравенство Коши-Буняковского-Шварца**) а) Докажите, что для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ справедливо неравенство

$$(a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n)^2.$$

б) Докажите, что для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и положительных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ справедливо неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + \ldots + b_n}.$$

в) При каких значениях переменных в неравенствах из предыдущих пунктов достигается равенство?

При помощи неравенства КБШ докажите следующие неравенства

2. (**Неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратичном.**) Пусть $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

3. Пусть $a, b, c > 0$. Тогда $\frac{a^2}{2a+b+c} + \frac{b^2}{a+2b+c} + \frac{c^2}{a+b+2c} \geq \frac{a+b+c}{4}$.

4. Пусть $a_1, \ldots, a_n > 0$. Тогда $\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_1} \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

5. а) Пусть $a, b, c > 0$. Тогда $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

б) Пусть $a, b, c, d > 0$. Тогда $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2$.

6. Пусть $x_1, \ldots, x_n > 0$ и $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Тогда

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)^2 + \ldots + \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)^2 \geq \frac{(n^2+1)^2}{n}.$$

7. Пусть $a, b, c > 0$ и $abc = 1$. Докажите неравенство $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$.

Массы-2. Теоремы Чевы, Менелая и Ван-Обеля. 21.07.2011

1. Докажите при помощи масс **теорему Ван-Обеля**.

Чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке K. Докажите, что $\frac{AK}{KA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B}$.

2. Докажите при помощи масс **теорему Чевы**.

На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC, или на их продолжениях отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 *конкурентны* (т. е. либо параллельны, либо пересекаются в одной точке) тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = 1.$$

3. Докажите при помощи масс **теорему Менелая**.

На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC, или на их продолжениях отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = -1.$$

4. На биссектрисе угла A неравнобедренного треугольника ABC выбрана точка K. Прямые BK и CK пересекают стороны AC и AB в точках L и M. Докажите, что прямая LM проходит через основание биссектрисы внешнего угла A треугольника.

5. (Прямая Гаусса.) Прямая пересекает стороны AB, BC и продолжение стороны AC треугольника ABC в точках D, E и F соответственно. Докажите, что середины отрезков CD, AE и BF лежат на одной прямой.

6. Старый пират зарыл клад на острове среди 20 деревьев. После этого он написал завещание, в котором указал, как искать клад: надо встать к первому дереву, пройти половину расстояния до второго дерева, затем повернуть к третьему и пройти треть расстояния до него, затем повернуть к четвертому и пройти четверть расстояния до него, и т.д., наконец, повернуть к двадцатому и пройти двадцатую часть расстояния до него. К сожалению, пират забыл указать, как занумерованы деревья! Сколько разных ям придется выкопать потомкам пирата, чтобы все-таки найти клад?

Транснеравенство. 21.07.2011

1. (Транснеравенство.) а) Пусть $0 < a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n; 0 < b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ и $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ — перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$. Докажите, что $a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1 \le a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + \ldots + a_nb_{i_n} \le a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$.

б) Пусть $0 < a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n; 0 < b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n; \ldots; 0 < \ell_1 \le \ell_2 \le \ldots \le \ell_n$ и $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, …, $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ — перестановки чисел $1, 2, \ldots, n$. Докажите, что $a_1b_{i_1}\ldots\ell_{j_1} + a_2b_{i_2}\ldots\ell_{j_2} + \ldots + a_nb_{i_n}\ldots\ell_{j_n} \le a_1b_1\ldots\ell_1 + a_2b_2\ldots\ell_2 + \ldots + a_nb_n\ldots\ell_n$.

2. Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}$. Докажите неравенство $a^4 + b^4 + c^4 \ge a^3b + b^3c + c^3a$.

3. (Неравенство Чебышёва.) Докажите, что для чисел $0 < a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$, $0 < b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ выполнено неравенство

$$(a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_n) \le n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n).$$

4. Пусть a, b, c — стороны и α, β, γ — противолежащие им углы треугольника. Докажите, что

$$\alpha a + \beta b + \gamma c \ge \frac{1}{2}(\alpha b + \beta c + \gamma a + \alpha c + \beta a + \gamma b).$$

5. а) Пусть $a, b, c > 0$. Докажите, что $a^3b+b^3c+c^3a \ge a^2bc+b^2ac+c^2ab$. б) Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите, что $a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \ge 0$.

6. Пусть $a_1, \ldots, a_n > 0$. Докажите неравенство

$$\sum_{i<j} \sqrt{a_ia_j} \le \frac{n-1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

7. Вещественные числа a, b и c не меньше 1. Докажите неравенство

$$\frac{1+ab}{b+c} + \frac{1+bc}{c+a} + \frac{1+ca}{a+b} \geq 3.$$

Десятичные дроби. 21.07.2011

Мы будем изучать разложение положительного рационального числа $\frac{a}{b}$ в периодическую десятичную дробь. Легко видеть, что достаточно рассмотреть случай $0 < a < b$ и $(a, b) = 1$.

1. Докажите, что число $\frac{a}{b}$ может быть представлено в виде конечной десятичной дроби тогда и только тогда, когда b имеет вид $2^n 5^m$.

Алгоритм деления столбиком при правильном взгляде на вещи состоит в следующем. Полагаем $r_0 = a$ и считаем рекуррентно $10 \cdot r_{i-1} = bq_i + r_i$ (деление с остатком). При этом q_i — i-тая цифра после запятой в равенстве $\frac{a}{b} = 0, q_1 q_2 q_3 \ldots$.

2. Докажите, что а) если в разложение числа b входит простой делитель, отличный от 2 и 5, то число $\frac{a}{b}$ может быть записано в виде периодической десятичной дроби, причем ее период содержит менее b цифр; б) сумма длин периода и предпериода также меньше b; в) если $(b, 10) = 1$, то период чистый (то есть начинается сразу после запятой).

Еще одно понимание алгоритма деления столбиком состоит в следующем. Делим с остатком: $a \cdot 10^k = bQ_k + r_k$. Тогда Q_k – число, образованное первыми k цифрами после запятой, r_k – то же самое, что ранее (тем самым r_k оказывается остатком при делении $a \cdot 10^k$ на b).

3. Пусть $(b, 10) = 1$. Докажите, что тогда длина периода не зависит от a и равна наименьшему t, для которого $10^t - 1 \,\vdots\, b$.

4. а) Дана бесконечная чисто периодическая десятичная дробь $\overline{0,(b_1 b_2 \ldots b_\ell)}$ (после запятой бесконечно повторяется последовательность цифр $\overline{b_1 b_2 \ldots b_\ell}$). Докажите, что ее можно представить как отношение двух натуральных чисел $\frac{a}{b}$, где $b \mid \underbrace{99\ldots9}_{\ell}$. б) Дана бесконечная периодическая десятичная дробь $\overline{0, c_1 c_2 \ldots c_m (b_1 b_2 \ldots b_\ell)}$. Докажите, что ее можно представить как отношение двух натуральных чисел $\frac{a}{b}$, где $b \mid \underbrace{99\ldots9}_{\ell}\underbrace{0\ldots0}_{m}$.

5. Пусть $(b, 10) \neq 1$. Докажите, что в десятичной записи числа $\frac{a}{b}$ обязательно есть предпериод, причем его длина равна наибольшему из показателей, с которыми 2 и 5 входят в каноническое разложение числа b на простые множители.

6. Число $\frac{1}{2011}$ представили в виде периодической десятичной дроби. Докажите, что в (наименьшем) периоде этой дроби не более 215 семерок.

7. Сумма и произведение двух чисто периодических десятичных дробей — чисто периодические дроби с периодом T . Докажите, что исходные дроби имеют периоды не больше T.

Раскраски графов-2.
Хроматический многочлен и реберные раскраски. 22.07.2011

1. а) Найдите количество правильных раскрасок вершин дерева на n вершинах в k цветов.

Известно, что для любого $k \in \mathbb{N}$ количество правильных раскрасок вершин в k цветов у графа T и у n-вершинного дерева — одинаковы. б) Докажите, что у графа T ровно n вершин. в) Докажите, что T — дерево.

Определение 1. Обозначим через $\chi_G(k)$ количество правильных раскрасок вершин графа G в k цветов.

Определение 2. Пусть uv — ребро графа G. Через $G - uv$ обозначается граф, полученный из G удалением ребра uv, а через $G \cdot uv$ — граф, полученный из G стягиванием ребра uv (то есть вершины u и v заменяются на новую вершину, смежную с теми и только теми из оставшихся вершин графа G, которые были смежны хотя бы с одной из вершин u и v).

2. Выразите $\chi_G(k)$ через $\chi_{G-uv}(k)$ и $\chi_{G\cdot uv}(k)$.

3. а) Докажите, что $\chi_G(k)$ — многочлен от k. Этот многочлен называется *хроматическим многочленом* графа G.

б) Докажите, что знаки коэффициентов этого многочлена чередуются (то есть, старший коэффициент не меньше нуля, следующий — не больше нуля, потом опять не меньше нуля, и так далее).

в) Докажите, что старший коэффициент хроматического многочлена равен 1, а следующий равен $-e(G)$, где через $e(G)$ обозначено количество рёбер графа G.

Определение 3. Раскраска рёбер графа называется *правильной*, если любые два ребра, имеющие общий конец, покрашены в разные цвета.

4. Все вершины связного графа имеют степень 3, а ребра правильным образом покрашены в 3 цвета. Одно из ребер удалили. Докажите, что связность сохранилась.

5. Ребра графа раскрашены в $d > 1$ цветов так, что в любом пути из трех различных ребер (в том числе и в замкнутом) первое и последнее ребро покрашены в разные цвета. Докажите, что вершины этого графа можно правильным образом раскрасить а) в $d+1$ цвет; б) в d цветов.

6. Дан двудольный граф, степени всех вершин которого не превосходят d. Докажите, что его рёбра можно правильным образом покрасить в d цветов.

Разнобой-5. 22.07.2011

1. Докажите, что для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ справедливо неравенство

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

2. В марсианском алфавите k букв. Два слова называются похожими, если в них поровну букв и они отличаются ровно одной буквой (в одном разряде, например: ТРУКС и ТРИКС). Докажите, что все слова можно разбить на k групп так, чтобы в одной группе не было похожих слов.

3. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке X. Точка A' — середина этой стороны. Докажите, что прямая $A'I$ (где I — центр вписанной окружности) делит пополам отрезок AX.

4. $(d_1, d_2, \ldots, d_{2011})$ — перестановка множества $T = \{1, 2, \ldots, 2011\}$, являющаяся полным циклом. Найдите минимум выражения $\sum\limits_{k=1}^{2011} (d_k - k)^2$.

5. Центрально симметричная фигура на клетчатой бумаге состоит из n "уголков" четырех клеток и k прямоугольников размером 1×4. Докажите, что n четно.

6. Дано 39-значное натуральное число A. Докажите, что существует такое 20-значное число B, что ни одно 39-значное натуральное число, получающееся из A перестановкой его цифр, не делится на B.

Заключительная олимпиада. 24.07.2011

Довывод

1. Рыбаки ловили рыбу два дня. В первый день каждый рыбак поймал столько рыб, сколько все остальные вместе во второй день. Докажите, что все рыбаки поймали поровну рыб.

2. 49 точек на окружности занумерованы (возможно, в беспорядке) нечетными числами $3, 5, 7, \ldots, 99$. Если один номер делится на другой, точки соединяются хордой. Докажите, что найдутся хорды, которые пересекаются (внутри круга).

3. A, B и C — последовательные вершины правильного n-угольника, длина стороны которого равна 1. Диагонали многоугольника, выходящие из вершины B, делят треугольник ABC на $n-2$ треугольника. Докажите, что в каждом из них длина одной стороны равна произведению длин двух других сторон.

4. Положительные числа a, b, c, не превосходящие 1, таковы, что $ab + ac + bc = 1$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2$

5. Дано целое число $n > 0$. Имеются чашечные весы и n гирь, веса которых равны $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Все n гирь выкладываются одна за другой на чаши весов, то есть на каждом из n шагов выбирается гиря, которая еще не выложена на весы, и добавляется либо на левую, либо на правую чашу весов; при этом гири выкладываются так, чтобы ни в какой момент правая чаша не была тяжелее левой. Найдите количество способов выполнить такую последовательность шагов.

Вывод

6. Обозначим через $p(n, k)$ количество делителей числа n, не меньших, чем k. Чему равна сумма

$$p(1001, 1) + p(1002, 2) + p(1003, 3) + \ldots + p(2000, 1000)\,?$$

7. Вневписанная окружность треугольника ABC касается его стороны BC в точке P, а продолжений сторон AB и AC — в точках Q и R соответственно. Докажите, что если середина PQ лежит на описанной окружности треугольника ABC, то и середина PR тоже лежит на этой описанной окружности.

8. Существует ли такая сетка из равных параллелограммов на плоскости, в вершинах которой можно нарисовать правильный пятиугольник?