Заключительная олимпиада. 24 июля
Довывод

1. Рыбаки ловили рыбу два дня. В первый день каждый рыбак поймал столько рыб, сколько все остальные вместе во второй день. Докажите, что все рыбаки поймали поровну рыб.

2. 49 точек на окружности занумерованы (возможно, в беспорядке) нечетными числами 3, 5, 7, ..., 99. Если один номер делится на другой, точки соединяются хордой. Докажите, что найдутся хорды, которые пересекаются (внутри круга).

3. A, B и C - последовательные вершины правильного n-угольника, длина стороны которого равна 1. Диагонали многоугольника, выходящие из вершины B, делят треугольник ABC на $n-2$ треугольника. Докажите, что в каждом из них длина одной стороны равна произведению длин двух других сторон.

4. Положительные числа a, b, c, не превосходящие 1, таковы, что $ab + ac + bc = 1$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2$

5. Дано целое число $n > 0$. Имеются чашечные весы и n гирь, веса которых равны $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Все n гирь выкладываются одна за другой на чаши весов, то есть на каждом из n шагов выбирается гиря, которая еще не выложена на весы, и добавляется либо на левую, либо на правую чашу весов; при этом гири выкладываются так, чтобы ни в какой момент правая чаша не была тяжелее левой. Найдите количество способов выполнить такую последовательность шагов.

Вывод

6. Обозначим через $p(n, k)$ количество делителей числа n не меньших чем k. Чему равна сумма $p(1001, 1) + p(1002, 2) + \ldots + p(2000, 1000)$?

7. Вневписанная окружность треугольника ABC касается его стороны BC в точке P, а продолжений сторон AB и AC — в точках Q и R соответственно. Докажите, что если середина PQ лежит на описанной окружности треугольника ABC, то и середина PR тоже лежит на этой описанной окружности.

8. Существует ли такая сетка из параллелограммов на плоскости в вершинах которой можно нарисовать правильный пятиугольник?