

Радикальная ось. 11 июля

1. На плоскости даны окружность S и точка P . Прямая, проведённая через точку P , пересекает окружность в точках A и B . Докажите, что произведение $PA \cdot PB$ не зависит от выбора прямой.

Определение. Величина $PA \cdot PB$, взятая со знаком плюс для точки P вне окружности и со знаком минус для точки P внутри окружности, называется степенью точки P относительно окружности S .

2. Докажите, что степень точки P относительно окружности S равна $d^2 - R^2$, где R — радиус S , d — расстояние от точки P до центра S .

3. На плоскости даны две неконцентрические окружности S_1 и S_2 . Докажите, что геометрическим местом точек, для которых степень относительно S_1 равна степени относительно S_2 , является прямая. Эта прямая называется радикальной осью. Эта прямая называется *радикальной осью*.

4. На плоскости даны три попарно пересекающиеся окружности. Через точки пересечения любых двух из них проведена прямая. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке или параллельны.

5. На плоскости даны две непересекающиеся окружности. Найдите ГМТ: центров окружностей, которые им обеим перпендикулярны.

6. а) Через точку P , лежащую на общей хорде AB двух пересекающихся окружностей, проведены хорда A_1B_1 первой окружности и хорда A_2B_2 второй окружности. Докажите, что четырёхугольник $A_1A_2B_1B_2$ вписанный.

б) *Теорема о бабочке.* Через середину P хорды AB окружности проведены секущие A_1A_2 и B_1B_2 . Хорды A_1B_1 и A_2B_2 пересекают хорду AB в точках M и N . Докажите, что $PM = PN$. (Указание: сделайте осевую симметрию с центром в точке P .)

7. Дана окружность S и точки P и K вне её. Через точку P проводится секущая PAB (A и B — точки пересечения с окружностью). Построим описанную окружность треугольника KAB . Докажите, что все такие окружности имеют общую точку, отличную от K .

8. Через центр равностороннего треугольника ABC проведена прямая, пересекающая прямые AB , BC и CA в точках C_1 , A_1 и B_1 соответственно. Окружность с центром A_1 , проходящая через точку A , пересекает окружность с центром B_1 , проходящую через точку B , в точках K и L . Докажите, что C_1 — центр описанной окружности треугольника CKL .