1. Подобие. 4 июля

Определение. Две фигуры называются *подобными*, если существуют такие число $k > 0$ и соответствие между точками этих фигур, что для любых двух точек первой фигуры расстояние между ними в k раз меньше расстояния между соответствующими им точками.
Напоминание. Треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны если

(1) $\angle ABC = \angle A'B'C'$ и $AB/BC = A'B'/B'C'$;

(2) $\angle ABC = \angle A'B'C'$ и $\angle ACB = \angle A'C'B'$;

(3) $AB/A'B' = AC/A'C' = BC/B'C'$.

Утверждение. Многоугольники подобны тогда и только тогда, когда их стороны соответственно пропорциональны, а углы соответственно равны.

1. a) Докажите, что высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит его на два треугольника, подобных исходному. b) Докажите, что сумма квадратов коэффициентов подобия равна 1.

2. Вася из n одинаковых квадратов составил прямоугольник, и Петя из n одинаковых квадратов составил прямоугольник. При каких n можно утверждать, что прямоугольники Васи и Пети подобны?

3. Найдите площадь круга радиуса 10, если известно, что площадь круга радиуса 1 равна π.

4. Площадь поверхности некоторого шара равна 3. Найдите площадь поверхности вдвое большего шара.

5. Докажите, что существует шар, площадь поверхности которого, выраженная в квадратных сантиметрах, равна его объему, выраженному в кубических сантиметрах.

6. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана такая точка P, что $\angle PBC = \angle PDC$. Докажите, что $\angle PAD = \angle PCD$.

2. Вступительная олимпиада. 4 июля

1. Стадо молодняка состоит из бычков и телочек. Телочек в стаде 55% от его общей численности, а их общий вес составляет 45% общего веса стада. Во сколько раз средний вес бычка больше среднего веса телочки?

2. Вещественные числа a, b, c таковы, что $1 < a < b + c < a + 1$ и $b < c$. Докажите, что $b < a$.

3. Пусть $ABCD$ – равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC. На продолжении прямой DA за точку A отложили отрезок AE такой, что $AE = BC$. В каком отношении биссектриса угла DBE делит отрезок DE?

4. На столе лежит куча из n ($n > 1$) бейджей. Ниночка и Танечка по очереди (начинает Танечка) разбивают любую из имеющихся куч на 2 или 3 меньших. Проигрывает не имеющая хода. Кто выиграет при правильной игре? (Ответ может зависеть от n).

5. В треугольник вписана окружность. Через точки касания со сторонами проведены прямые, параллельные биссектрисам противоположных углов. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

6. Можно ли разбить числа от 1 до 1000 на три группы таким образом, чтобы в первой группе сумма чисел делилась на 1002, во второй группе — на 2003, а в третьей группе — на 3004?

7. Прямоугольник разбит на mn прямоугольников $m-1$ вертикальным разрезом и $n-1$ горизонтальным разрезом. Про каждый маленький прямоугольник (из этих mn) можно спросить его площадь. За какое наименьшее число вопросов можно гарантированно узнать площадь большого прямоугольника?

3. Многочлены. 5 июля

1. Найдите коэффициент многочлена $(x^8 + x^5 + 1)^{20}$ при a) x^{17}; b) x^{18}.

2. Разделите с остатком a) $x^2 - x + 1$ на $x - 2$; b) $x^6 + 1$ на $x^2 + x$; c) $x^n - 1$ на $x - 1$; d) $x^n + 1$ на $x + 1$.

3. Найдите все натуральные n, при которых число $2n^3 + 3n^2 + 4n + 3$ делится на число $n^2 + 1$.

4. Докажите, что при любых целых неотрицательных l, m, n многочлен $x^{3l+2} + x^{3m+1} + x^{3n}$ делится на $x^2 + x + 1$.

5. Многочлен f дает остаток 2 при делении на $x - 2$ и остаток 5 при делении на $x-3$. Какой остаток многочлен f будет давать при делении на $(x-2)(x-3)$?

6. Теорема Безу. Значение многочлена в точке $c \in \mathbb{R}$ совпадает с остатком от деления его на многочлен $x - c$.

7. Многочлен делится на $x - c$ тогда и только тогда, когда c является его корнем.

8. Пусть $c_1, \ldots, c_k$ — различные вещественные числа. Докажите, что многочлен f делится на произведение $(x - c_1) \cdot \ldots \cdot (x - c_k)$ тогда и только тогда, когда все c_i являются корнями f.

9. Докажите, что если значения многочленов f и g совпадают во всех точках, то есть $f(c) = g(c)$ для любого $c \in \mathbb{R}$, то многочлены f и g совпадают.

10. Докажите, что для любых натуральных чисел n и k (где $n > k$) существует натуральное число, которое при делении на числа $1, 2, \ldots, n$ дает ровно k различных остатков.

Задачи для самостоятельного решения.

Определение. *Кратностью* корня c многочлена f называется наибольшее целое k такое, что f делится на $(x-c)^k$. Обозначение: $\mathrm{mult}_f(c)$.

11. Докажите, что a) $\mathrm{mult}_{f+g}(c) \geqslant \min(\mathrm{mult}_f(c), \mathrm{mult}_g(c))$;
b) $\mathrm{mult}_{fg}(c) = \mathrm{mult}_f(c) + \mathrm{mult}_g(c)$.

12. Докажите, что число корней многочлена (с учетом кратности) не превосходит его степени.

4. Векторы. 5 июля

0. Упростите выражение a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{BD}$;
b) $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{YN} + \overrightarrow{BX} - \overrightarrow{TZ} + \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{YZ}$.

1. Докажите, что a) если M — середина отрезка AB, то для любой точки O плоскости выполняется равенство $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$;
b) если M делит отрезок AB в отношении $m : n$, то для любой точки O плоскости выполняется равенство $\overrightarrow{OM} = \dfrac{n}{m+n} \cdot \overrightarrow{OA} + \dfrac{m}{m+n} \cdot \overrightarrow{OB}$.

2. Докажите, что a) точка X принадлежит прямой AB тогда и только тогда, когда существует такое t, что для любой точки O плоскости $\overrightarrow{OX} = t \cdot \overrightarrow{OA} + (1-t) \cdot \overrightarrow{OB}$;
b) точка X принадлежит отрезку AB тогда и только тогда, когда существует такое t, $0 < t < 1$, что для любой точки O плоскости $\overrightarrow{OX} = t \cdot \overrightarrow{OA} + (1-t) \cdot \overrightarrow{OB}$.

3. Докажите, что сумма векторов, идущих из центра правильного n-угольника в его вершины, равна $\overrightarrow{0}$.

4. Докажите, что если векторы $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}$ и $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}$ перпендикулярны, то $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{c}|$.

5. В четырехугольнике $ABCD$ точка M — середина BC, N — середина AD. Докажите, что $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}$.

6. Пусть $\overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{e_2}$ — два неколлинеарных вектора. Докажите, что любой вектор $\overrightarrow{c}$ можно единственным образом представить в виде $\overrightarrow{c} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2}$, где α и β — вещественные числа.

7. На прямой лежит одиннадцать точек $M_1, \ldots, M_{11}$. Вне прямой дана точка F. Можно ли на отрезках $FM_1, \ldots, FM_{11}$ расставить стрелки так, чтобы сумма всех полученных векторов была равна $\overrightarrow{0}$?

8. a) Докажите, что из медиан треугольника можно составить треугольник.
b) Докажите, что это можно сделать при помощи параллельных переносов медиан.
c) Пусть сумма некоторых n векторов равна $\overrightarrow{0}$. Докажите, что из них можно сложить выпуклый многоугольник.

9. Докажите, что на сторонах и диагоналях нечетноугольника можно расставить стрелочки так, чтобы сумма всех полученных векторов была равна $\overrightarrow{0}$.

Задачи для самостоятельного решения.

10. Пусть M, N, P, Q — середины сторон AB, BC, CD и DE выпуклого пятиугольника $ABCDE$; F — середина MP, G — середина NQ. Докажите, что отрезок FG параллелен отрезку AE и имеет вчетверо меньшую длину.

11. У выпуклого пятиугольника отметили середины сторон, а потом стерли все, кроме отмеченных точек. Восстановите пятиугольник.

12. На окружности радиуса 1 с центром O отмечена $2n+1$ точка P_1, P_2, $\ldots$, P_{2n+1}, лежащих по одну сторону от некоторого диаметра. Докажите, что $\left|\overrightarrow{OP_1}+\ldots+\overrightarrow{OP_{2n+1}}\right| \geqslant 1$.

13. На плоскости дано 2000 векторов, причем среди них есть не коллинеарные. Известно, что сумма любых 1999 векторов коллинеарна с вектором, не включенным в сумму. Докажите, что сумма всех 2000 векторов равна нулевому вектору.

5. Разнобой. 5 июля

1. Каждому из 30 человек нравятся ровно m остальных. При каком наименьшем m можно гарантировать, что найдутся два человека, нравящихся друг другу?

2. Докажите, что при любом нечетном n, большем 3, число $2^{n!}-1$ делится на n^3-4n.

3. Дана шоколадка 700×2014 (700 — высота, 2014 — ширина). Два человека играют в следующую игру. Ход состоит в том, что можно взять любой отдельный кусок шоколадки (в начале игры такой кусок всего один) и выгрызть из него кусок в форме прямоугольника, причем первому игроку разрешается съедать только прямоугольники, у которых высота больше либо равна ширины, а второму — у которых меньше либо равна ширины. Выигрывает тот, кто доест последний кусочек. Кто выиграет при правильной игре?

4. Окружность, построенная на высоте AD прямоугольного треугольника ABC как на диаметре, пересекает катет AB в точке K, а катет AC — в точке M. Отрезок KM пересекает высоту AD в точке L. Известно, что $\frac{AK}{AL}=\frac{AL}{AM}$. Найдите острые углы треугольника ABC.

5. Назовем натуральное число n “крокодилом”, если любое натуральное число, меньшее n, можно представить в виде суммы нескольких различных делителей n. Докажите, что произведение двух крокодилов — крокодил.

6. На доске написано несколько натуральных чисел. Разрешается стереть с

доски два числа и записать вместо них их НОД и НОК. Докажите, что когда–нибудь числа на доске перестанут меняться.

7. Существуют ли 100 попарно различных натуральных чисел, таких, что при любом разбиении их на две непустые группы сумма чисел в одной группе делится на сумму чисел в другой?

8. Доска $m \times n$ (числа $m+1$ и $n+1$ взаимно просты) покрашена шахматным образом. Во всех белых клетках расставлены числа. В чёрных клетках надо расставить мины (в каждую клетку — любое целое неотрицательное количество) так, чтобы количество мин в соседях каждой белой клетки было равно числу, записанному в ней. Докажите, что это можно сделать не более, чем одним способом.

6. Пути и циклы. 6 июля

Определение. *Эйлеров путь* в графе G — это путь, проходящий по каждому ребру ровно один раз. *Эйлеров цикл* в графе G — это цикл, проходящий по каждому ребру ровно один раз.

Разумеется, эйлеров путь и цикл в графе могут иметь самопересечения по вершинам.

1. Пусть G — связный граф. Докажите, что
a) эйлеров цикл в графе G существует тогда и только тогда, когда в G степени всех вершин четные;
b) ребра графа G можно разбить на не более, чем k путей и циклов тогда и только тогда, когда в графе не более, чем $2k$ вершин нечетной степени.

Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, множество ребер — через $E(G)$, для количества вершин и ребер будем использовать обозначения $v(G)$ и $e(G)$ соответственно. Через $d_G(x)$ мы обозначаем степень вершины x в графе G. Через $\delta(G)$ мы обозначаем минимальную степень вершины графа G. Длина пути и цикла в графе всегда измеряется в ребрах.

Путь (и, аналогично, цикл) называется *простым*, если он не имеет самопересечений по вершинам. Во всех следующих задачах пути и циклы — простые.

2. Пусть $\delta(G) \geqslant 2$. Докажите, что:
a) в графе G есть простой путь длины хотя бы $\delta(G)$;
b) в графе G есть простой цикл длины хотя бы $\delta(G)+1$.

3. Пусть $e(G) \geqslant t \cdot v(G)$, $t \in \mathbb{N}$.
a) Докажите, что существует такой подграф H графа G, что $\delta(H) \geqslant t+1$.
b) Докажите, что в графе G есть простой путь длины хотя бы $t+1$ и простой цикл длины хотя бы $t+2$.

4. Пусть $n > 2$, $a_1, \ldots, a_n$ — максимальный путь в графе G, причем $d_G(a_1) + d_G(a_n) \geqslant n$. Докажите, что в графе есть цикл длины n.

5. a) В графе для любых двух несмежных вершин u, $v \in V(G)$ выполняется $d_G(u) + d_G(v) \geqslant v(G) - 1$. Докажите, что в графе G есть гамильтонов путь.
b) Докажите, что если $\delta(G) \geqslant \frac{v(G)-1}{2}$, то в графе G есть гамильтонов путь.

6. a) Для любых двух несмежных вершин u, $v \in V(G)$ выполняется $d_G(u) + d_G(v) \geqslant v(G)$. Докажите, что в графе G есть гамильтонов цикл.
b) Докажите, что если $\delta(G) \geqslant \frac{v(G)}{2}$, то в графе G есть гамильтонов цикл.

7. Пусть $ab \notin E(G)$, $d_G(a) + d_G(b) \geqslant v(G)$, а в графе $G + ab$ есть гамильтонов цикл. Докажите, что в графе G также есть гамильтонов цикл.

8. Пусть $v(G) = n$, а $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_n$ — последовательность степеней вершин графа G. Пусть $d_i + d_{n-i} \geqslant n$ для каждого $i \in [1..n-1]$. Докажите, что в графе G есть гамильтонов цикл.

7. Разнобой. 6 июля

1. Найдите все такие пары натуральных чисел (a, b), что $a-b$ — простое число, а $a \cdot b$ — точный квадрат.

2. Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на сторонах BC, CA и AB соответственно, и делят их в отношении $1:2$ так, что A_1 ближе к точке B, B_1 ближе к C, C_1 — к A. Докажите, что из отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 можно составить треугольник.

3. В радужном городе 1000 жителей. Каждый вечер все жители города сообщают всем своим знакомым те новости, которые они знают. Известно, что любая новость рано или поздно становиться известна всем. Докажите, что можно выбрать 90 жителей и сообщить им некую новость так, что через 10 дней она станет известна всем жителям.

4. В трапеции $ABCD$ ($AB \| CD$) точки P и Q — середины диагоналей AC и BD соответственно. Известно, что $\angle PBA = \angle DBC$. Докажите, что $\angle QCB = \angle ACD$.

5. Пусть a — натуральное число. Докажите, что существует бесконечно много таких простых p, что при некоторых натуральных m и n числа $m^2 + 3$ и $n^3 - a$ делятся на p.

6. a) Как соединить 2014 города наименьшим числом авиалиний так, чтобы из любого города можно было попасть в любой другой, сделав не более двух пересадок? (Укажите все способы и докажите, что других нет.) b) Сколькими способами это можно сделать?

7. Существуют ли четыре квадратных трехчлена такие, что в каком бы порядке f_1, f_2, f_3, f_4 их не выписали, найдется такое вещественное число a, что $f_1(a) < f_2(a) < f_3(a) < f_4(a)$?

8. Для некоторого натурального m нашлось $4m$ таких строк одинаковой длины, составленных из нулей и единиц, что для любого $1 \leqslant k \leqslant 2m(4m-1)$ среди них найдутся две строки, отличающиеся ровно в k разрядах. Докажите, что m — точный квадрат.

8. Движения. 7 июля

0_1. Внутри прямоугольника $ABCD$ выбрана произвольная точка M. Докажите, что существует выпуклый четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, стороны которого равны соответственно отрезкам AM, BM, CM и DM.

0_2. В треугольник вписана окружность и проведены касательные, параллельные сторонам треугольника. Докажите, что противолежащие стороны образовавшегося шестиугольника попарно равны, а три большие диагонали пересекаются в одной точке.

0_3. На стороне CD квадрата $ABCD$ выбрана произвольная точка E и построен квадрат $DEFG$ (точки F и G лежат вне квадрата $ABCD$). Докажите, что отрезки AE и CG равны и перпендикулярны.

1. Докажите, что прямые, проведенные через середины сторон вписанного четырехугольника перпендикулярно противолежащим сторонам, пересекаются в одной точке.

2. Существует ли выпуклый четырехугольник, не имеющий ни центра симметрии, ни оси симметрии, который можно разрезать на два равных четырехугольника?

3. Правильный треугольник ABC вписан в окружность. На дуге AB, не содержащей точку C, выбрана точка M. Расстояния от точки M до вершин A и B равны соответственно a и b. Найдите CM.

4. Пусть T — такая точка плоскости, что сумма расстояний от нее до вершин данного остроугольного треугольника минимальна. Докажите, что все стороны треугольника видны из нее под углом $120°$. Эта точка называется **точкой Торричелли**.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle ABD = \angle CDB = 60°$, $\angle BCA = \angle CAD = 30°$. Найдите BD, если $AB = 2$.

Задачи для самостоятельного решения.

6. На катетах a и b прямоугольного треугольника выбираются точки P и Q, из которых опускаются перпендикуляры PK и QH на гипотенузу. Найдите наименьшее значение суммы $KP + PQ + QH$.

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB, BC и CD равны, M — середина AD, $\angle BMC = 90°$. Найдите угол между AC и BD.

9. Геометрия масс. 7 июля

Определение. Пусть M — некоторая точка плоскости и m — ненулевое число. *Материальной точкой* (M, m) называется пара точка M с числом m, причем число m называется *массой* материальной точки (M, m), а точка M — *носителем* этой материальной точки.
Определение. *Центром масс* системы материальных точек (M_1, m_1), (M_2, m_2), $\ldots$, (M_n, m_n) называется такая точка Z, для которой имеет место равенство $m_1 \cdot \overrightarrow{ZM_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{ZM_2} + \ldots + m_n \cdot \overrightarrow{ZM_n} = 0$.

1. Основная теорема. a) Если точка Z является центром масс системы материальных точек (M_1, m_1), (M_2, m_2), $\ldots$, (M_n, m_n), причем суммарная масса не равна нулю, то для любой точки O справедливо равенство

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{m_1 \cdot \overrightarrow{OM_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{OM_2} + \ldots + m_n \cdot \overrightarrow{OM_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

b) Обратно, если для некоторой точки O выполняется это равенство, то точка Z — центр масс данной системы материальных точек.

2. Докажите, что для конечной системы материальных точек с ненулевой суммой масс существует единственный центр масс.

Далее везде, говоря о системе материальных точек, мы будем предполагать, что сумма масс ее точек отлична от нуля.

3. Правило рычага. Центр масс Z двух материальных точек (M_1, m_1), (M_2, m_2) с неотрицательными массами расположен на отрезке M_1M_2, причем $m_1 \cdot |M_1Z| = m_2 \cdot |M_2Z|$.

4. Правило группировки. Пусть дана система материальных точек (M_1, m_1), (M_2, m_2), $\ldots$, (M_n, m_n) и пусть точка O — центр масс системы, состоящей из первых k материальных точек данной системы. Тогда центр масс данной системы совпадает с центром масс системы материальных точек

$$(O, m_1 + m_2 + \ldots + m_k),\ (M_{k+1}, m_{k+1}),\ \ldots,\ (M_n, m_n).$$

10. Разнобой. 7 июля

1. Натуральные числа m и n таковы, что $m^2 + n^2 + m \,\vdots\, mn$. Докажите, что m — квадрат натурального числа.

2. Пусть $f(x)$ — приведенный квадратный трехчлен, который имеет два различных действительных корня, из которых ровно один принадлежит отрезку $[0; 1]$. Докажите, что $f(f(0)) \leqslant 0$.

3. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка K. Отрезок CK пересекает медиану AM в точке P. Оказалось, что $BK = 2PM$. Докажите, что $AK = AP$.

4. Назовём *лесенкой* клетчатую фигуру, состоящую из всех клеток, расположенных в каком-нибудь квадрате с одной стороны от его диагонали. Можно ли какой-нибудь квадрат разбить на 2007 лесенок, каждая из которых содержит не менее 3 клеток?

11. Сильная связность ориентированных графов. 9 июля

Определение. Вершины a и b ориентированного графа G назовем *связанными*, если в графе G существуют пути из a в b и из b в a.
Определение. Ориентированный граф G называется *сильно связным*, если любые две его вершины связаны.

Таким образом, множество вершин $V(G)$ оказывается разбито на классы попарно связанных вершин, которые мы будем называть *компонентами сильной связности*.

Построим для нашего ориентированного графа G *граф компонент сильной связности* $\mathcal{C}(G)$, вершины которого соответствуют компонентам сильной связности ориентированного графа G. Проведем в графе $\mathcal{C}(G)$ ребро $V_i \to V_j$ тогда и только тогда, когда в графе G есть ребро, направленное от V_i к V_j.

Для любого подмножества $U \subset V(G)$ через $G(U)$ мы будем обозначать *индуцированный подграф* графа G на множестве вершин U (такой граф состоит из вершин множества U и всех ребер графа G между этими вершинами).

1. a) Докажите, что в графе $\mathcal{C}(G)$ нет циклов. b) Докажите, что для любой компоненты сильной связности V_i граф $G(V_i)$ на вершинах множества V_i с ребрами графа G между этими вершинами сильно связен.

Определение. Пусть V_i — компонента сильной связности ориентированного графа G. Назовем эту компоненту *промежуточной*, если в графе $\mathcal{C}(G)$ существует ребро, входящее в V_i, и существует ребро, выходящее из V_i. В противном случае назовем компоненту V_i *крайней*.

2. В ориентированном графе 200 вершин, из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро и в каждую вершину входит хотя бы одно ребро. Докажите, что можно добавить не более 100 новых ориентированных ребер так, чтобы этот граф стал сильно связным. (Между двумя вершинами может быть проведено несколько ребер.)

3. Пусть G связный ориентированный граф на n вершинах. Докажите, что a) Существует сильно связный остовный подграф графа G, в котором не более $2n - 2$ ребра.

b) Если в графе G между любыми двумя вершинами проведено не более одного ребра, то существует сильно связный остовный подграф графа G, в котором не более $2n-3$ ребра.
c) Для всех $n \geqslant 3$ постройте примеры графов, для которых оценки пунктов a) и b) являются точными.

Определение. *Полный ориентированный граф* или *турнирный граф* — это ориентированный граф, в котором любые две вершины соединены ровно одним ориентированным ребром

4. a) Докажите, что компоненты сильной связности турнирного графа можно пронумеровать $G_1, \ldots, G_k$ так, чтобы для всех $i < j$ в $\mathcal{C}(G)$ было ребро $G_i \to G_j$.
b) В ориентированном графе нет циклов. Докажите, что его вершины можно пронумеровать $v_1, \ldots, v_k$ так, что каждое ребро ориентировано от вершины с меньшим номером к вершине с большим номером.

5. Докажите, что в сильно связном турнирном графе существует *гамильтонов цикл* (т. е. цикл, проходящий по каждой вершине ровно один раз).

6. a) Докажите, что в сильно связном турнирном графе с четырьмя и более вершинами существует вершина, удаление которой не нарушает сильной связности графа.
b) Докажите, что таких вершин хотя бы две.

7. Пусть G — сильно связный турнирный граф, $3 \leqslant k \leqslant v(G)$.
a) Докажите, что для любой вершины $v \in V(G)$ существует простой цикл длины k, проходящий через v.
b) Докажите, что в графе G существует хотя бы $v(G) - k + 1$ простых циклов длины k.

8. Пусть G — полный ориентированный граф с n вершинами. Докажите, что в нем существует такой гамильтонов путь $a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_n$, что его концы соединены ребром $a_1 \to a_n$
a) при четном n; b) при нечетном n, отличным от 3 и 5.
c) Найдите все полные ориентированные графы, для которых такого пути не существует.

12. Разнобой про массы и многочлены. 9 июля

1. Точки, разбивающие каждую из сторон четырехугольника на три равные части, соединены естественным образом. Докажите, что a) каждый из полученных отрезков также разбивается точками пересечения на три равные части;
b) площадь среднего четыреухгольника в девять раз меньше площади исходного.

2. Внутри треугольника ABC отметили точку O. Докажите, что точка O — центр масс системы (A, S_{BCO}), (B, S_{ACO}), (C, S_{ABO}).

3. Пусть M, N и P — точки, расположенные на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC и делящие эти стороны в одинаковых отношениях (т. е. $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA}$). Докажите, что точка пересечения медиан треугольника MNP совпадает с точкой пересечения медиан треугольника ABC.

Определение. Пусть $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ — два коллинеарных вектора. Тогда отношением $\frac{\overrightarrow{a}}{\overrightarrow{b}}$ называется число, которое при умножении на $\overrightarrow{b}$ дает $\overrightarrow{a}$.

4. Докажите при помощи масс **теорему Чевы**.

На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC или на их продолжениях отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 *конкурентны* (т. е. либо параллельны, либо пересекаются в одной точке) тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = 1.$$

5. Докажите при помощи масс **теорему Ван-Обеля**.

Чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке K. Докажите, что

$$\frac{AK}{KA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B}.$$

6. Пусть $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами, а $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь такая, что $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$. Докажите, что a) $p \mid a_0$; b) $q \mid a_n$.

7. Для многочлена $(3x^2 - 4x + 2)^{100}$ после раскрытия скобок найдите a) сумму коэффициентов; b) свободный член.

8. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что для любых целых a и b выполнено $P(a) - P(b) \vdots\ a - b$.

9. Многочлен f таков, что $f(7) = 11$, а $f(11) = 13$. Докажите, что хотя бы один из его коэффициентов — не целое число.

10. Докажите, что $\forall n \in \mathbb{N}$ есть унитарный многочлен f такой, что

$$f \in \mathbb{Z}[x] \colon \forall x \in \mathbb{Z} : \qquad f(x) \vdots\ n.$$

13. Квадратичные вычеты. 10 июля

Пусть $p > 2$ — простое число, a не делится на p. Рассмотрим сравнение

$$x^2 \equiv a \pmod p.$$

Если это сравнение имеет решение, то число a называется *квадратичным вычетом* по модулю p, в противном случае — *квадратичным невычетом* по модулю p. Достаточно часто слово “квадратичный” мы будем опускать.

0_1. Докажите, что по модулю p существует ровно $\frac{p-1}{2}$ квадратичных вычетов и столько же невычетов.

1. Докажите, что для данного модуля p
a) произведение двух квадратичных вычетов — вычет;
b) произведение вычета на невычет — невычет;
c) произведение двух невычетов — вычет.

2. a) Докажите, что если a — квадратичный вычет по модулю p, то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$. b) Докажите, что если a — квадратичный невычет по модулю p, то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$.
Указание: вспомните доказательство теоремы Вильсона.

Символом Лежандра называется выражение, обозначаемое $\left(\frac{a}{p}\right)$, равное 1, если a — квадратичный вычет по модулю p; и равное -1, если a — невычет по модулю p и 0, если a кратно p.

Из задачи **1.** следует, что $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right)$. Из задачи **2.** следует **критерий Эйлера**: $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$.

0_2. Докажите, что -1 является квадратичным вычетом по модулю простого числа $p > 2$ тогда и только тогда, когда $p \underset{4}{\equiv} 1$.

0_3. Пусть p — нечетное простое число, a, b, c — вычеты по модулю p, причем $a \not\vdots\ p$, а $D = b^2 - 4ac$. Докажите, что если D — квадратичный вычет по модулю p, то сравнение $ax^2+bx+c \underset{p}{\equiv} 0$ имеет два корня, если D — квадратичный невычет по модулю p, то сравнение $ax^2 + bx + c \underset{p}{\equiv} 0$ не имеет корней, а если $D \vdots\ p$, то это сравнение имеет один корень.

3. Простое число $p \underset{4}{\equiv} 3$, а целые числа x и y таковы, что $x^2+y^2 \vdots\ p$. Докажите, что x, $y \vdots\ p$.

4. Докажите, что сумма всех квадратичных вычетов по модулю p равна нулю.

5. Докажите, что уравнение $4xy - x - y = z^2$ a) не имеет решений в натуральных числах; b) имеет бесконечно много решений в целых числах.

6. Докажите, что простых чисел вида $4k + 1$ бесконечно много.

7. Пусть p — нечетное простое число, n — наименьший невычет по модулю p. Докажите, что $n < \sqrt{p} + 1$.

Задачи для самостоятельного решения.

8. Решите в целых числах уравнение $x^3 + 7 = y^2$.

9. Натуральные числа a и b таковы, что оба числа $15a + 16b$ и $16a - 15b$ являются квадратами натуральных чисел. Какое наименьшее значение может принимать меньший из этих двух квадратов?

14. Теорема Виета. 10 июля

Теорема Виета. Пусть у многочлена $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ имеется ровно n корней (с учетом кратности): x_1, x_2, $\ldots$, x_n. Тогда выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &:= x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\
\sigma_2 &:= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\
&\ldots \\
\sigma_n &:= x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}
\end{aligned}$$

Многочлены от n переменных, стоящие в левой части равенств, называются *основными симметрическими многочленами.*

1. Вещественные числа x, y и z таковы, что $x + y + z > 0$, $xy + yz + zx > 0$, $xyz > 0$. Докажите, что числа x, y и z положительны.

2. Известно, что $abc = 1$, $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Докажите, что одно из чисел a, b или c равно 1.

3. a) Многочлен $x^4 + ax^3 + 2x^2 + 3x - 1$ имеет корень, равный 1. Найдите сумму кубов остальных его корней. b) Разложите на множители выражение $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$. c) Пусть α, β и γ — корни многочлена $x^3 - 9x + 9$. Найдите значение выражения $\alpha^3 + 9\beta + 9\gamma$.

Задачи для самостоятельного решения.

4. Пусть $s_k := x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$. Докажите **тождество Ньютона**:
a) $s_k - s_{k-1}\sigma_1 + \ldots + (-1)^n s_{k-n}\sigma_n = 0$ при $k > n$;
b) $s_k - s_{k-1}\sigma_1 + \ldots + (-1)^{k-1}s_1\sigma_{k-1} + (-1)^k k\sigma_k = 0$ при $k \leqslant n$.

5. Пусть α, β и γ — корни многочлена $x^3 - 9x + 9$. Докажите, что $\alpha^2 + \alpha - 6$ равно β или γ.

15. Упражнения по неравенствам. 10 и 11 июля

На первом занятии у нас была лекция на которой с помощью линейных оценок мы доказали неравенство между средним арифметическим и средним степенным натуральной степени.

Для доказательства этого утверждения достаточно применить следующие соображения:
1) Так как неравенство однородно, то можно считать, что сумма $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна n и нам надо доказать, что сумма $x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k$ больше либо равна n.
2) Докажем произвольным доступным способом, что $x^k - kx + k - 1 \geqslant 0$
3) Сложив неравенство из пункта 2 по всем переменным x_i получим требуемое.

Из упражнения 13 мы вывели неравенство между средними степенными положительных рациональных степеней. С помощью индукции доказали неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим. Воссоединив все эти знания, мы получили неравенство между средними степенными произвольных рациональных степеней.

Упражнения 9, 10 и 11 вместе дают нам доказательство неравенства Коши-Буняковского-Шварца через линейные оценки. Кстати формулируется оно так:

0. (КБШ) Докажите, что для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ справедливо неравенство

$$\left(a_1^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + \cdots + b_n^2\right) \geqslant \left(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n\right)^2.$$

Упражнения:

1. Приведите пример двух неравенств $f_1 \geqslant 0$, $f_2 \geqslant 0$ таких, что в каждом из них равенство достигается, но при этом $f_1 + f_2 > 0$.

2. Числа x и y больше нуля, но меньше единицы. Докажите, что $\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} < 1$.

3. Докажите, что $7a + 5b \geqslant ab + 35$, если $a, b \in [5, 7]$.

4. Какое наименьшее значение может принимать выражение $ax + \frac{b}{x}$ при $x > 0$ $(a, b > 0)$?

5. a) Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$.
b) Найдите правильное значение константы M в неравенстве

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geqslant M(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n).$$

6. Найдите правильное значение константы M в неравенстве

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \leqslant M(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2).$$

7. a) Существует ли такое положительное c, что неравенство $x^3 + x \leqslant cx^2$ верно для всех положительных x?
b) Для любого положительного x верно неравенство $\alpha x^3 + \beta x + \gamma x^2 \leqslant 0$. Докажите, что α и β отрицательны. Как γ зависит от α и β?

8. a) $a^2 + 4b^2 + 9c^2 \geqslant (\alpha a + \beta b + \gamma c)^2$. Придумайте правильные α, β, γ для которых это неравенство верно.
b) $a^2+b^2 \geqslant (\alpha a+\beta b)^2$. Найдите все пары чисел α, β для которых это неравенство верно.

9. Придумайте такие α и β с суммой 1, что $\dfrac{a^2}{b} \geqslant \alpha a + \beta b$.

10. Выведите из упражнения 9 неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$

11. Выведите из предыдущего упражнения КБШ.

12. Предположим, что $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — положительные числа, удовлетворяющие условию

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

Докажите неравенство

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 + b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{2}.$$

13. Пусть $p \geqslant q$ натуральные числа. Докажите, что $(1 + qx)^p \geqslant (1 + px)^q$ для всех $x > -\frac{1}{p}$.

14. Пусть $a, b, c, d > 0$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + d} + \frac{c}{d + a} + \frac{d}{a + b} \geqslant 2.$$

15. Пусть $a, b, c, d > 0$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geqslant \frac{64}{a + b + c + d}.$$

16. Пусть x, y и z — неотрицательные числа. Докажите, что

$$xyz \geqslant (x + y - z)(y + z - x)(x + z - y).$$

17. Для положительных чисел x, y и z выполняется равенство $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant x + y + z.$$

18. Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ справедливо неравенство $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s - a_i} \geqslant \frac{n}{n-1}$, где $s = a_1 + \ldots + a_n$.

16. Показатели. 11 июля

Определение. Говорят, что число a *принадлежит показателю* t (или t является *показателем* числа a) по модулю n, если t является наименьшим натуральным числом таким, что $a^t \equiv 1 \pmod{n}$.

Замечание. Теорема Эйлера (или здравый смысл) нам тонко намекает, что для любого a, взаимно простого с n, такое t существует. В случае, когда $(a, n) > 1$, такого t, очевидно, не существует.

0_1. Пусть a принадлежит показателю t по модулю n. Докажите, что числа $1 = a^0$, a^1, $\ldots$, a^{t-1} различны по модулю n.

0_2. Пусть a принадлежит показателю t по модулю n.
a) Докажите, что $a^d \equiv 1 \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда $d \vdots t$.
b) Докажите, что $a^d \equiv a^s \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда $d - s \vdots t$.
c) Докажите, что $\varphi(n)$ делится на t.

1. a) Докажите, что в разложении на простые сомножители числа $2^q - 1$, где q — простое, любое число будет давать остаток 1 по модулю q.
b) Выведите из этого, что простых чисел бесконечно много.

2. Докажите, что $\varphi(a^n - 1)$ делится на n для натуральных a и n.

3. Пусть p и q — простые, $q > 5$. Известно, что $2^p + 3^p$ делится на q. Докажите, что $q > 2p$.

4. Найдите все пары простых чисел (p, q) такие, что $5^p + 5^q \vdots pq$.

5. Найдите все натуральные n, для которых числа n и $2^n + 1$ имеют один и тот же набор простых делителей.

6. Докажите, что $2^n - 1$ не делится на n, при всех $n > 1$.

Задачи для самостоятельного решения.

7. Пусть $a > 1$, а $p > 2$ — простое.
a) Докажите, что простые нечетные делители $a^p - 1$ или сравнимы с 1 по модулю $2p$ или делят $a - 1$.
b) Докажите, что число $\dfrac{a^p - 1}{a - 1}$ имеет хотя бы один простой делитель, не делящий $a - 1$.
c) Докажите частный случай **теоремы Дирихле**: существует бесконечно много простых чисел, сравнимых с 1 по модулю $2p$.

17. Скалярное произведение. 11 июля

Определение. *Проекцией вектора* $\overrightarrow{AB}$ на прямую ℓ называется вектор $\mathrm{pr}_\ell \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$, где A_1 — проекция точки A, B_1 — проекция точки B на прямую ℓ.
Определение. *Скалярным произведением* двух ненулевых векторов $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ называется число $|\mathrm{pr}_{\overrightarrow{v}} \overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|$, если $\mathrm{pr}_{\overrightarrow{v}} \overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ одинаково направлены, $-|\mathrm{pr}_{\overrightarrow{v}} \overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|$, если они противоположно направлены.

В случае, если хотя бы один из векторов $\overrightarrow{u}$ или $\overrightarrow{v}$ равен $\overrightarrow{0}$, их скалярное произведение считается равным 0. Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$

обозначается через $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ или $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.

0_1. Докажите, что площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\alpha$.

0_2. Теорема синусов. Для треугольника ABC докажите, что

$$\frac{AB}{\sin\angle ACB} = \frac{BC}{\sin\angle BAC} = \frac{CA}{\sin\angle CBA} = 2R.$$

0_3. Теорема косинусов. Для произвольных точек A, B, C докажите равенство $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC$.

1. Для произвольных точек пространства A, B, C и D докажите формулу $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

2. Точки A, B и C не лежат на одной прямой. Найдите геометрическое место точек M таких, что

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}.$$

3. Правильный многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ вписан в окружность радиуса R с центром в O; X — произвольная точка. Докажите, что $|A_1X|^2 + \ldots + |A_nX|^2 = n(R^2 + d^2)$, где $d = |OX|$.

4. Вещественные числа a, b, c и d таковы, что $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ и $ac + bd = 0$. Найдите $ab + cd$.

5. Пусть α, β и γ — углы остроугольного треугольника ABC. Докажите, что a) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \geqslant -\frac{3}{2}$; b) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \frac{3}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения.

6. Точки A, B, C, D таковы, что для любой точки M числа $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$ различны. Докажите, что $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$.

7. Даны точки A, B, C, D. Докажите, что

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \geqslant AC^2 + BD^2,$$

причем равенство достигается только если $ABCD$ — параллелограмм.

8. Точки P и Q — середины диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2.$$

18. Формула включений–исключений. 12 июля

Задачи для самостоятельного решения.

1. Пусть p, q — простые, a — натуральное. Имеется неограниченное количество бусинок a разных цветов. Найдите количество различных круглых бус из pq бусинок. Варианты, отличающиеся только поворотом, считаются одинаковыми.

2. В квадрат площади 5 помещено девять многоугольников, каждый площади 1. Докажите, что какие-то два из них имеют пересечение площади, не меньшей 1/9.

3. a) Найдите количество решений уравнения

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 27,$$

где $x_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

b) Найдите количество счастливых билетов. (Напомним, что шестизначный номер называется *счастливым билетом*, если сумма первых трех цифр равна сумме трех последних).

4. a) Выразите НОК(a, b, c) через a, b, c и НОД'ы подсистем этих чисел.

b) Выразите НОД(a, b, c) через a, b, c и НОК'и подсистем этих чисел.

c) Придумайте формулы, аналогичные формулам предыдущих пунктов, для n чисел.

19. Матбой–междусобой. Профи–8. 12 июля

1. Внутри квадрата со стороной 10 имеется закрашенный квадратик со стороной 1, стороны которого параллельны сторонам большого квадрата. За одну пробу про любой многоугольник можно узнать, какая доля его площади закрашена. Можно ли за две пробы наверняка определить местоположение закрашенного квадратика?

2. Положительные рационал ьные числа a, b и c удовлетворяют соотношению $a^2 + b^2 + 2abc + ab = abc^2$. Докажите, что $\sqrt{\frac{c-3}{c+1}}$ — рациональное число.

3. Дан ромб $ABCD$. На отрезках AC и BC отмечены такие точки M и $N \neq B$ соответственно, что $DM = MN$. Прямые AC и DN пересекаются в точке P, а прямые AB и DM — в точке R. Докажите, что $RP = PD$.

4. Конечное множество целых чисел называется плохим, если сумма его элементов равна 2010. Множество называется пальцатым, если все его подмножества не являются плохими. На какое наименьшее количество пальцатых подмножеств можно разбить множество $\{502, 503, 504, \ldots, 2009\}$?

5. Положительные числа a, b и c и некоторые числа x, y, z удовлетворяют условиям $cy + bz = a$, $cx + az = b$ и $bx + ay = c$. Докажите, что a, b и c являются сторонами треугольника тогда и только тогда, когда x, y и z по модулю меньше 1.

6. *Лучом* на клетчатой плоскости назовем клетки одного столбца или строки, идущие подряд, начиная с некоторой клетки. Можно ли из клетчатой плоскости вырезать один горизонтальный и один вертикальный луч так, чтобы начав с некоторой неудаленной клетки, обойти всю оставшуюся плоскость. Разрешает-

ся переходить из любой клетки плоскости на любую соседнюю по горизонтали или по вертикали неудаленную клетку, которая не была пройдена ранее.

7. На плоскости даны три точки. Из них выбираются любые две, строится серединный перпендикуляр к отрезку, их соединяющему, и все точки отражаются симметрично относительно этой прямой; затем из всех точек (старых и новых) снова выбирают какие-то две точки и весь процесс повторяют. Так делается бесконечно много раз. Докажите, что в плоскости найдется такая прямая, что все полученные точки будут лежать по одну сторону от нее.

8. Существуют ли два различных, не кратных десяти, 239–значных числа таких, что одно из них является точным квадратом, второе точным кубом, а кроме того они отличаются лишь перестановкой цифр.

9. Через точку P на стороне AC треугольника ABC проведена прямая, параллельная медиане AM, которая пересекает сторону BC в точке E, и прямая, параллельная медиане CN, которая пересекает сторону AB в точке F. Докажите, что медианы AM и CN разбивают отрезок EF на три равные части.

10. Последовательность $\{a_i\}$ задается следующим образом: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ при $n \geqslant 2$. Докажите, что $a_{2n-1} - (-1)^n$ делится на a_n.

20. Радикальное. 14 июля

0_1. Точка X лежит внутри окружности. Секущая, проведенная из точки X, пересекает окружность в точках A и B. Докажите, что $XA \cdot XB$ не зависит от выбора секущей.

Определение. Это число, взятое со знаком “минус” называется *степенью точки* X.

0_2. Точка X лежит вне окружности. Докажите то же утверждение, что и в упражнении 1.

Определение. Это число называется *степенью точки* X.

0_3. Пусть расстояние от точки X до центра O окружности радиуса r равно d. Докажите, что степень точки X относительно этой окружности равна $d^2 - r^2$.

1. На прямой ℓ отмечены две точки — A и B. Кроме того, дано некоторое фиксированное вещественное число c.

a) Докажите, что на прямой AB существует ровно одна такая точка X, что $AX^2 - BX^2 = c$.

b) Докажите, что геометрическое место точек Y на плоскости, для которых $AY^2 - BY^2 = c$ — это прямая, перпендикулярная прямой ℓ.

2. Даны две неконцентрические окружности (т.е. с разными центрами). Найдите ГМТ на плоскости, степени которых относительно этих окружностей оди-

наковы.

Определение. Это ГМТ называется *радикальной осью* двух окружностей.

3. Даны три окружности, центры которых не совпадают и не лежат на одной прямой. Найдите ГМТ на плоскости, степени которых относительно этих окружностей одинаковы.

Определение. Это ГМТ называется *радикальным центром* трех окружностей.

4. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC, пусть O — центр описанной окружности. Докажите, что прямые A_1B_1 и CO перпендикулярны.

5. Докажите понятно каким способом, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

6. Две окружности пересекаются в точках A и B. Докажите, что прямая AB делит отрезок общей касательной к окружностям пополам.

Задачи для самостоятельного решения.

7. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны точки X, Y, Z, T и U, V соответственно. Оказалось, что четырехугольники $XYZT$, $ZTVU$ и $XYVU$ вписанные. Докажите, что шестигольник $XYZTUV$ тоже вписанный.

8. Окружность ω касается сторон AB, BC треугольника ABC в точках X и Y соответственно и его описанной окружности в точке P. Прямые PX и PY вторично пересекают описанную окружность треугольника в точках M и N. Докажите, что прямая MN делит отрезки BX и BY пополам.

21. Лемма Холла, двудольные графы. 14 июля

1. На вечере ни один мальчик не танцевал со всеми девочками, а каждая девочка танцевала хотя бы с одним мальчиком. Докажите, что существует 2 мальчика и 2 девочки такие, что первый танцевал с первой, второй — со второй, а первый со второй и второй с первой не танцевали.

2. Лемма о девушках. Дано n юношей и несколько девушек. Известно, что для любого $k \leqslant n$ и любой группы из k юношей есть не менее k девушек, каждая из которых знакома хотя бы с одним из этих k мальчиков. Докажите, что все юноши могут выбрать по невесте из числа своих знакомых.

А если сформулировать по-научному про двудольный граф, то получится **лемма Холла**.

3. Лемма Холла для арабских стран. Среди n юношей и нескольких девушек некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Каждый юноша

хочет жениться на m знакомых девушках. Докажите, что они могут это сделать тогда и только тогда, когда для любого набора из k юношей количество знакомых им в совокупности девушек не меньше km.

4. Даны k мальчиков и $2k-1$ конфета. Докажите, что можно дать каждому мальчику по конфете так, чтобы мальчику, которому не нравится его конфета, не нравились и конфеты остальных мальчиков.

5. Все вершины двудольного графа имеют степень k. Докажите, что их можно разбить на пары смежных.

6. Латинским называется прямоугольник $m \times n$, $m \leqslant n$, заполненный числами от 1 до n, такой, что в каждой строчке и в каждом столбце числа различны. Докажите, что любой латинский прямоугольник можно дополнить до латинского квадрата $n \times n$.

7. Пусть M — множество всех k-элементных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, 2k+1\}$. Существует ли биекция $f\colon M \to M$ такая, что $A \cap f(A) = \varnothing$?

Задачи для самостоятельного решения.

8. Каждый из двух равных квадратов разбит на 100 равновеликих частей. Докажите, что можно сложить эти квадраты в стопку и проткнуть в 100 точках так, чтобы каждая из 100 частей каждого из квадратов была проткнута.

9. В квадрате $n \times n$ стоят неотрицательные числа так, что в каждой строке и в каждом столбце сумма равна 1. Докажите, что в этот квадрат можно поставить n не бьющих друг друга ладей так, чтобы под каждой поставленной ладьей было положительное число.

22. Многочлены над $\mathbb{Z}_p$. 14 июля

Обозначим через $\mathbb{Z}_n$ множество вычетов по модулю n. Этот листочек посвящен многочленам, коэффициенты которых берутся из $\mathbb{Z}_n$, в особенности из $\mathbb{Z}_p$, где p — простое.

Всюду далее, если не оговорено обратное, считается, что p — простое.

0_1. a) Пусть f, $g \in \mathbb{Z}_p[x]$. Докажите, что $\deg fg = \deg f + \deg g$.
b) Приведите пример n и f, $g \in \mathbb{Z}_n[x]$, для которых утверждение пункта a) неверно.

0_2. Поймите, что для многочленов из $\mathbb{Z}_p[x]$ верны:
a) теорема о делении с остатком;
b) теорема Безу и следствие из нее (о том, когда c является корнем);
c) утверждение о том, что количество корней многочлена (даже с учетом кратности) не превосходит его степени.

1. a) Приведите пример ненулевого многочлена $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ такого, что $\forall c \in \mathbb{Z}_p$ выполнено $f(c) = 0$.

b) Что можно сказать о многочленах f и $g \in \mathbb{Z}_p[x]$, если $\forall c \in \mathbb{Z}_p$ выполнено $f(c) = g(c)$?
c) Пусть f, $g \in \mathbb{Z}_p[x]$ и $\deg f$, $\deg g \leqslant p-1$. Докажите, что если $\forall c \in \mathbb{Z}_p$ выполнено $f(c) = g(c)$, то $f \equiv g$.

2. Докажите, что любая функция $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ задается некоторым многочленом степени не выше $p-1$.

3. Докажите, что многочлен $(x^2-13)\cdot(x^2-17)\cdot(x^2-221)$ имеет корни по любому наперед заданному простому модулю p.

Задачи для самостоятельного решения.

4. Пусть $p \in \mathbb{P}$ и $f \in \mathbb{Z}[x]$. Оказалось, что $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и для любого натурального n остаток при делении $f(n)$ на p равен 0 или 1. Докажите, что $\deg f \geqslant p-1$.

5. Докажите, что если $p-1 \vdots m$, то многочлен $x^m - 1$ имеет ровно m корней по модулю p.

23. Лемма об уточнении показателя. 15 июля

Обозначение. Пусть p — простое. Обозначим через $v_p(x)$ наибольшее целое неотрицательное число α такое, что $x \vdots p^\alpha$, но $x \not\vdots\, p^{\alpha+1}$.
Пример. Поскольку $63 \vdots 3^2$, но $63 \not\vdots\, 3^3$, то $v_3(63) = 2$.
Пример. Пусть $p \neq q$ — простые числа. Тогда $v_p(p^\alpha q^\beta) = \alpha$.

Целью этого листочка будет доказать следующее утверждение:
Лемма об уточнении показателя. Пусть x и y — целые числа, p — такое простое число, что ни x, ни y не делится на p. Тогда
a) если $p \neq 2$ и $x - y \vdots p$, то $v_p(x^n - y^n) = v_p(x-y) + v_p(n)$.
b) если $p = 2$ и $x - y \vdots 4$, то $v_2(x^n - y^n) = v_2(x-y) + v_2(n)$.

Доказательство разобьем на несколько шагов:

1. Пусть x и y — целые числа, p — такое простое число, что ни x, ни y не делится на p, а $x - y \vdots p$. Тогда для любого натурального n, взаимно простого с p, выполнено $v_p(x^n - y^n) = v_p(x-y)$.

2. Пусть x и y — целые числа, p — такое нечетное простое число, что ни x, ни y не делится на p, а $x - y \vdots p$. Тогда $v_p(x^p - y^p) = v_p(x-y) + 1$.

3. Пусть x и y — нечетные целые числа, такие, что $x - y \vdots 4$. Тогда для любого натурального k выполнено $v_2(x^{2^k} - y^{2^k}) = v_2(x-y) + k$.

4. Докажите лемму об уточнении показателя.

Замечание. Тот факт, что $v_p(x^n - y^n) \geqslant v_p(x-y) + v_p(n)$ легко получить из доказательства пункта 2, используя индукцию по $v_p(n)$. Смысл леммы об уточнении показателя в том, чтобы заменить неравенство на равенство.

5. В какой степени 5 входит в разложение числа $3^{10000} - 2^{10000}$ на простые множители?

6. Докажите, что показатель числа 2 по модулю 3^n равен $\varphi(3^n)$.

7. Решите в натуральных числах уравнение $3^n = 2^n \cdot m + 1$.

8. Найдите все натуральные k такие, что произведение первых k простых чисел, уменьшенное на 1, является точной степенью натурального числа (большей, чем первая).

9. На доске написаны n цифр в ряд. Докажите, что к ним можно приписать несколько цифр слева и не более n цифр справа так, чтобы получилась степень двойки.

Задачи для самостоятельного решения.

10. *Радикалом* натурального числа N (обозначается $\mathrm{rad}(N)$) называется произведение всех простых делителей числа N, взятых по одному разу. Существует ли тройка попарно взаимно простых натуральных чисел A, B, C таких, что $A + B = C$ и $C > 1000 \cdot \mathrm{rad}(ABC)$?

11. Пусть a, $n > 1$ — натуральные числа. Докажите, что если для некоторого k число $(a-1)^k$ делится на n, то тогда на n делится и число $a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1$.

24. Композиции движений. 15 июля

Задачи для самостоятельного решения.

1. Докажите, что любое движение можно представить в виде композиции не более трех осевых симметрий.

2. На плоскости даны два равных, но по-разному ориентированных треугольника ABC и $A'B'C'$. Докажите, что середины отрезков AA', BB' и CC' лежат на одной прямой.

3. Точка M, лежащая внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$, такова, что $\angle AMB = \angle CMD = 120°$. Докажите, что найдется такая точка N, что треугольники BNC и AND — равносторонние.

4. a) Докажите, что композиция любого нечетного количества центральных симметрий является центральной симметрией.

b) Еще раз восстановите пятиугольник по серединам его сторон.

5. a) α, β и γ — величины углов треугольника ABC. Докажите, что $R_C^{2\gamma} \circ R_B^{2\beta} \circ R_A^{2\alpha}$ — тождественное преобразование. Верно ли обратное утверждение?

b) На сторонах произвольного треугольника вне его построены равносторонние треугольники. Докажите, что их центры также образуют равносторонний треугольник **(внешний треугольник Наполеона)**.

25. Разнобой. 15 июля

1. Пусть числа m_0, m_1, …, m_n попарно взаимно просты. Докажите, что существует число N такое, что $N \equiv 0 \pmod{m_i}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, и $N \equiv 1 \pmod{m_0}$. Выведите из этого китайскую теорему об остатках.

2. a) Сколько существует кубических вычетов по простому вида $3k+2$?
b) Сколько существует кубических вычетов по простому модулю вида $3k+1$?
c) А чему равна их сумма?

3. Пусть x_0, x_1, …, x_n — различные вещественные числа. a) Докажите, что существует многочлен $p(x)$ степени n такой, что $p(x_0) = 1$, а $p(x_i) = 0$ при всех $1 \leqslant i \leqslant n$. b) Докажите, что для любых c_i можно подобрать многочлен не выше n-ой степени такой, что $p(x_i) = c_i$ при всех i от 0 до n.

4. a) Докажите, что для неотрицательных a, b и c

$$a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 \geqslant a^2b^3c + b^2c^3a + c^2a^3b.$$

b) Докажите, что существуют такие α, β, γ с суммой 1 такие, что для любых неотрицательных a, b, c верно неравенство:

$$\alpha a^5b^2c + \beta b^5c^2a + \gamma c^5a^2b \geqslant a^4b^2c^2.$$

c) Докажите, что

$$a^5b^2c + b^5c^2a + c^5a^2b \geqslant a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2).$$

5. a) На доске $m \times n$ стоят ± 1. Разрешается изменить знаки у чисел в одном столбце или в одной строке. Сколько различных расстановок можно получить?
b) Докажите, что можно в таблице получить все $+1$ тогда и только тогда, когда в каждом квадратике 2×2 четное количество -1.

6. Дан граф. Будем рассматривать раскраски его ребер в красный и синий цвета такие, что из каждой вершины выходит четное число красных ребер. Докажите, что количество таких раскрасок является степенью двойки.

26. Комплексные числа, начала. 16 июля

0. Выполните действия: $\frac{(1+3i)(1-4i)+4+i}{2+i}$.

1. Докажите, что числа z и $\overline{z}$ одновременно либо являются, либо не являются корнями многочлена с вещественными коэффициентами.

2. a) Докажите, что $|zw| = |z| \cdot |w|$ для любых z и w.
b) Докажите, что если два натуральных числа представляются в виде суммы двух квадратов, то их произведение также представляется в виде суммы двух квадратов.

3. Вычислите $(1-\sqrt{3}i)^{2007}$.

4. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ — все корни степени k из единицы. Найдите $\varepsilon_1^n + \varepsilon_2^n + \ldots + \varepsilon_k^n$.

5. Пусть z_1, z_2, …, z_n — точки комплексной плоскости, являющиеся вершинами выпуклого n-угольника. Известно, что точка z удовлетворяет уравнению $\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \ldots + \frac{1}{z-z_n} = 0$. Докажите, что точка z лежит внутри этого n-угольника.

27. Первообразный корень. 16 июля

0_1. a) Пусть $n \vdots t$. Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих n, таких, что их наибольший общий делитель с n равен t?
b) Докажите, что $\sum_{t|n} \varphi(t) = n$, где сумма берется по всем делителям числа n.

Пусть p — простое. Обозначим через $\psi(t)$ количество вычетов по модулю p принадлежащих показателю t. В прошлый раз мы доказали, что если $p-1 \not\vdots\, t$, то $\psi(t) = 0$.

0_2. Докажите, что $\sum_{t|p-1} \psi(t) = p-1$, где сумма берется по всем делителям числа $p-1$.

1. Пусть $\psi(t) > 0$, то есть существует хотя бы один вычет a, принадлежащий показателю t. Докажите, что a^0, a^1, …, a^{t-1} — все корни многочлена $x^t - 1 \in \mathbb{Z}_p[x]$.

2. Докажите, что для всех делителей t числа $p-1$ выполнено a) $\psi(t) \leqslant \varphi(t)$; b) $\psi(t) = \varphi(t)$.

Определение. Вычет g называется *первообразным корнем* по модулю n, если он принадлежит показателю $\varphi(n)$ по модулю n.

Сейчас мы покажем, что первообразный корень существует по модулям 2, 4, p^k и $2p^k$ и только для них (p — любое нечетное простое).

3. Докажите, что первообразный корень не может существовать по модулям, отличным от 2, 4, p^k, $2p^k$, где p — нечетное простое.

0_3. Поймите, что по модулям 2 и 4 существует первообразный корень.

0_4. Поймите, что в задаче **2.** мы доказали, что по модулю p существует ровно $\varphi(p-1)$ первообразных корней.

4. a) Докажите, что если g — первообразный корень по модулю p, то либо g, либо $g+p$ является первообразным корнем по модулю p^k.
b) Докажите, что если g — первообразный корень по модулю p^k, то либо g, либо $g+p^k$ является первообразным корнем по модулю $2p^k$.

5. Пусть p — простое. Можно ли расставить по кругу числа 1, 2, …, $p-1$ так, чтобы для любых трех подряд идущих чисел a, b, c (именно в таком порядке)

число $b^2 - ac$ делилось бы на p?

Задачи для самостоятельного решения.

Определение. Обозначим через $\lambda(n)$ наименьшее натуральное число такое, что $x^{\lambda(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ для любого x, взаимно простого с n. $\lambda(n)$ называется *функцией Кармайкла.*

6. a) Решите в натуральных числах уравнение $\varphi(n) = \lambda(n)$.
b) Докажите, что при $k > 2$ выполнено $\lambda(2^k) = 2^{k-2}$.
c) Придумайте формулу для $\lambda(n)$, $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}$.
d) Докажите, что по модулю n существует вычет, принадлежащий показателю t тогда и только тогда, когда $\lambda(n) \vdots t$.

Определение. Число n называется *числом Кармайкла* или *псевдопростым числом*, если для любого целого a выполнено $a^n \equiv a \pmod{n}$.

0_5. Докажите, что 561 явлется числом Кармайкла.

7. Критерий Корсельта. Докажите, что составное число является числом Кармайкла тогда и только тогда, когда оно не делится ни на один квадрат простого числа и для каждого простого делителя p числа n число $n-1$ делится на $p-1$.

8. Пусть p — простое число, а числа k и $p-1$ взаимно просты. Докажите, что 1^k, 2^k, $\ldots$, p^k — полная система вычетов по модулю p

28. Направленные углы. 17 июля

Определение. *Направленным углом* между прямыми a и b называется угол, при повороте на который в положительном направлении прямая a переходит в прямую, параллельную b или совпадающую с b. Направленный угол между прямыми a и b обозначается $\angle(a, b)$. Он определен с точностью до кратного $180°$.

Свойства направленных углов:

1. Для любой прямой a выполнено $\angle(a, a) = 0$.
2. Для любых прямых a, b и c условия $\angle(a, b) = \angle(a, c)$ и $b \parallel c$ равносильны.
3. Для любых прямых a и b выполнено $\angle(a, b) = -\angle(b, a)$.
4. Для любых прямых a, b и c выполнено $\angle(a, b) + \angle(b, c) = \angle(a, c)$.

0_1. Точки A, B, C, D лежат на одной прямой либо на одной окружности тогда и только тогда, когда $\angle(AB, BC) = \angle(AD, DC)$;

0_2. Прямая ℓ, проходящая через точку A, является касательной к описанной окружности треугольника ABC тогда и только тогда, когда $\angle(AB, BC) = \angle(\ell, AC)$.

0_3. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $\angle(AB, BC) = \angle(A_1B_1, B_1C_1)$ и $\angle(BC, CA) = \angle(B_1C_1, C_1A_1)$. Тогда они подобны.

0_4. Если $AB = BC$, то $\angle(BA, AC) = \angle(AC, CB)$ и наоборот.

0_5. Докажите, что $\angle(\ell_1, \ell_2) = \angle(\ell_2, \ell_1)$ тогда и только тогда, когда прямые ℓ_1 и ℓ_2 либо параллельны, либо перпендикулярны.

1. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $\angle(AB, BC) + \angle(CA, AO) = 90°$.

2. На стороне AB равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) выбрана точка D. Через точку D провели касательную к описанной окружности треугольника ADC. Она пересекла описанную окружность треугольника BDC в точке M. Докажите, что $BM \| AC$.

3. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Описанные окружности треугольников AB_1C_1 и BC_1A_1 вторично пересекаются в точке P. Докажите, что точки C, A_1, B_1 и P лежат на одной окружности.

4. Две окружности пересекаются в точках M и K. Через M и K проведены прямые AB и CD соответственно, пересекающие первую окружность в точках A и C, вторую — в точках B и D. Докажите, что AC параллельно BD.

5. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Прямая O_1A вторично пересекает вторую окружность в точке P. Докажите, что точки O_1, O_2, B и P лежат на одной окружности.

6. Прямая Симсона. Даны треугольник ABC и точка P. Пусть A_1, B_1 и C_1 — основания перпендикуляров, опущеных из точки P на прямые BC, AC и AB соответственно. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, тогда и только тогда, когда точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC.

7. a) **Точка Микеля.** На плоскости даны 4 прямые общего положения. Докажите, что описанные окружности четырех образованных ими треугольников имеют общую точку.

b) Точки A, B, C и D лежат на одной окружности. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые BC и DA — в точке F. Докажите, что точка Микеля прямых AB, BC, CD и DA лежит на прямой EF.

29. Матбой ПРОФИ-7—ПРОФИ-8. 17 июля

1. В графе без треугольников со 100 вершинами степени всех вершин больше 40. Докажите, что в этом графе нет циклов длины 5.

2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на стороне AB выбрана точка M, а на продолжении стороны AC — точка K такая, что $KM = MC$. Прямая, проходящая через точку B параллельно AC, пересекается с CM в точке P. Докажите, что прямая AP делит отрезок KM пополам.

3. Во всех клетках таблицы 2010×2010 расставлены натуральные числа. Разрешается прибавить по 1 к любым трем числам, стоящим в «уголке» из трёх клеток. Верно ли, что при любой начальной расстановке чисел можно сделать все числа в таблице кратными 10?

4. Дано несколько иррациональных чисел. Про любые два a и b из них известно, что хотя бы одно из чисел $\frac{a}{b+1}$ и $\frac{b}{a+1}$ рационально. При каком наибольшем количестве чисел это возможно?

5. Доску 30×30 разбили на 100 квадратов 3×3 и вырезали из каждого полученного квадрата центральную клетку. Какое наименьшее количество королей нужно поставить на полученную фигуру, чтобы они побили каждую её клетку? (Король бьёт клетку, на которой он стоит)

6. Найдите все такие простые p, что число $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ является квадратом целого числа.

7. Найдите все такие тройки (k, m, n) попарно взаимно простых натуральных чисел, что число

$$\Big(k+m+n\Big) \cdot \left(\frac{1}{k}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$$

является целым.

8. У папы есть картина, представляющая из себя белый клетчатый прямоугольник, в котором несколько клеток закрашены чёрным. Он хочет нарисовать копию этой картины на бесконечной белой клетчатой плоскости. В день папа закрашивает в чёрный цвет ровно две белых клеточки, а ночью его сынишка бессовестно перекрашивает одну чёрную клетку красной краской. Докажите, что папа сможет нарисовать копию картины (то есть из всей бесконечной клетчатой плоскости можно будет вырезать прямоугольник, на котором нарисовано в точности то же, что и на картине).

9. У ромашки $k > 60$ лепестков. Два козла ходят по очереди: каждый своим ходом отъедает у ромашки три любых лепестка. Каждый делает по 10 ходов. Первый козёл выигрывает, если в конце среди оставшихся лепестков есть два соседних. При каком наименьшем k у него есть выигрышная стратегия?

10. Через точку M — середину стороны AC треугольника ABC ($AB \neq BC$) — провели прямую, параллельную биссектрисе угла B. Она пересекла прямую BC в точке X, а прямую AB — в точке Y. Через точки X и Y провели прямые, перпендикулярные BC и AB соответственно. Докажите, что точка их пересечения равноудалена от вершин A и C.

30. Матбой ПРОФИ-8—ПРОФИ-9. 17 июля

1. Найдите наименьшее простое p такое, что $2^{120!}-1$ делится на p и не делится на p^2.

2. Каждые два города страны Гельбии соединены односторонним авиарейсом. Из каждого города можно добраться в любой другой, возможно, с пересадками. Региональные бароны хотят превратить страну в федерацию двух республик с общей столицей (в каждой республике должно быть хотя бы два города; каждый город, кроме столицы, будет принадлежать ровно одной из республик, а выбранная совместно столица — обеим). Оказалось, что при любом способе федерализации хотя бы в одной из республик найдутся два города, из одного из которых нельзя добраться до другого, не выезжая за пределы республики. Докажите, что города Гельбии можно занумеровать натуральными числами так, что все авиарейсы, кроме одного, будут вести из города с меньшим номером в город с большим номером.

3. Из чисел 1, 2, ..., 2010 некоторые 500 покрашены в белый цвет, а остальные — в голубой. Докажите, что количество последовательностей из 29 чисел одного цвета $(x_1, \ldots, x_{29})$, у которых сумма $x_1 + \ldots + x_{29}$ делится на 2010, не зависит от способа покраски. Напомним, что элементы в последовательности могут повторяться.

4. Точка P лежит на медиане AA' треугольника ABC. Прямая BP пересекает сторону AC в точке D, а прямая CP пересекает сторону AB в точке E. Докажите, что если радиусы вписанных окружностей треугольников BEP и CDP равны, то $AB = AC$.

5. Можно ли выбрать 4 различных числа a, b, c и d и отметить на плоскости 5 точек так, чтобы: 1) никакие три из них не лежали на одной прямой; 2) никакие четыре не лежали на одной окружности, 3) среди попарных расстояний 4 были равны a, 3 расстояния были равны b, 2 расстояния были равны c и одно расстояние было равно d?

6. Окружность ω описана около треугольника ABC. Точка P пробегает дугу BC окружности ω, не содержащую точку A. Точки S_1 и S_2 — центры вписанных окружностей треугольников PAB и PAC соответственно. Докажите, что окружности, описанные около треугольников PS_1S_2, при всех положениях точки P имеют общую точку.

7. В квадратной таблице $n \times n$ записаны числа так, что сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце меньше 1. Укажите наименьшее k, при котором для любой таблицы всегда можно увеличить k чисел так, чтобы суммы чисел в строках и столбцах стали равными 1.

8. Во всех клетках таблицы 2010×2010 расставлены натуральные числа. Разрешается прибавить по 1 к любым трем числам, стоящим в «уголке» из трёх клеток. Верно ли, что при любой начальной расстановке чисел можно сделать все числа в таблице кратными 10?

9. Произведение положительных чисел a, b и c равно 1. Докажите неравенство

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+a)(1+c)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\geqslant\frac{3}{4}.$$

10. Ненулевые целые числа a, b, c, d таковы, что

$$abcd\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^2=(a+b+c+d)^2.$$

Докажите, что число $a^2+b^2+c^2+d^2$ — составное.

31. Аффинные преобразования. 19 июля

1. Существует ли пятиугольник, отличный от правильного, в котором:
a) каждая диагональ параллельна противолежащей стороне;
b) точки попарного пересечения диагоналей образуют пятиугольник, подобный данному?

2. В трапеции $ABCD$ через вершины B и C меньшего основания провели прямые, соответственно параллельные CD и AB. Докажите, что:
a) точка пересечения этих прямых лежит на прямой, проходящей через середины оснований;
b) отрезок, соединяющий точки пересечения этих прямых с диагоналями трапеции, параллелен основаниям.

3. В параллелограмме $ABCD$ прямая, параллельная AB, пересекает сторону BC и диагональ AC в точках N и K соответственно. Докажите, что треугольники ADK и ABN равновелики.

4. Через точку P, лежащую внутри треугольника ABC, проведены три прямые, параллельные сторонам AB, BC и CA и пересекающие стороны BC, AC и AB соответственно в точках A', B' и C'. Докажите, что

$$\frac{PA'}{AB}+\frac{PB'}{BC}+\frac{PC'}{CA}=1.$$

5. Точки M и N — середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$ соответственно. Отрезки AM и BN пересекаются в точке P. Найдите, в каких отношениях точка P делит эти отрезки.

6. Каждая сторона треугольника разделена на три равные части и проведены все чевианы, соединяющие вершины с точками деления на противолежащей стороне. Докажите, что в шестиугольнике, образованном этими прямыми, большие диагонали пересекаются в одной точке.

7. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC выбраны точки K, N и P. Точки K', N' и P':

а) симметричны точкам K, N и P относительно середин этих сторон;
б) лежат на сторонах треугольника ABC так, что $KK' \parallel BC$, $NN' \parallel CA$ и $PP' \parallel AB$.
Докажите, что треугольники KNP и $K'N'P'$ равновелики.

32. Неприводимые многочлены и основная теорема алгебры. 19 июля

Определение. Пусть $f \in K[x]$, где K это $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{Z}_p$.
Многочлен f называется *неприводимым над* K, если f нельзя представить в виде произведения двух многочленов g, $h \in K[x]$ степени которых меньше, чем степень f.

1. a) Пусть $f = gh$, где f, g, $h \in \mathbb{Z}[x]$. Докажите, что если все коэффициенты f делятся на некоторое простое число p, то либо все коэффициенты g, либо все коэффициенты h делятся на p.
b) Докажите, что если многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$ неприводим над $\mathbb{Z}$, то он неприводим над $\mathbb{Q}$.

2. Критерий Эйзенштейна. Пусть все коэффициенты многочлена $f \in \mathbb{Z}[x]$, кроме старшего, делятся на простое число p и свободный член не делится на p^2. Докажите, что этот многочлен неприводим над $\mathbb{Z}$.

3. Докажите, что многочлен $x^{200}y^{200} + 1$ нельзя представить в виде произведения $p(x) \cdot q(y)$, где p, $q \in \mathbb{R}[x]$.

Основная теорема алгебры. (без доказательства) У многочлена $f \in \mathbb{C}[x]$ существует комплексный корень.

0. Докажите, что у многочлена $f \in \mathbb{C}[x]$ количество корней (с учетом кратности) совпадает с его степенью.

4. Докажите, что все неприводимые многочлены над $\mathbb{R}$ имеют степень не выше чем два.

5. Про многочлен $f \in \mathbb{R}[x]$ известно, что для любого $c \in \mathbb{R}$ выполнено $f(c) \geqslant 0$. Докажите, что существуют такие многочлены g, $h \in \mathbb{R}[x]$, что $f = g^2 + h^2$.

Задачи для самостоятельного решения.

6. Пусть p — простое. Докажите, что многочлен $x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+1$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

7. Существует ли многочлен $p \in \mathbb{R}[x]$ такой, что $p(x^2 + 1)$ делится на $p(x)$?

8. Пусть $f \in \mathbb{Z}[x]$ принимает целые значения ± 1 при двух различных целых значениях a, b. Докажите, что
a) если $|b - a| > 2$, то f не имеет рациональных корней;
b) если $|b - a| \leqslant 2$, то рациональным корнем f может быть лишь $(a + b)/2$.

33. Разнобой. 19 июля

1. Докажите, что если степень многочлена P меньше чем степень многочлена Q, то найдется такое число x_0, что для любого $x > x_0$ будет выполняться неравенство: $|P(x)| < |Q(x)|$.

2. Многочлены f и g с целыми коэффициентами таковы, что $f(k)$ делится на $g(k)$ для каждого целого k. Докажите, что f делится на g.

3. Теорема Менелая. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC, или на их продолжениях отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = -1.$$

4. Теорема Чева-Синус. В треугольнике проведены три чевианы из разных вершин, каждая из которых разбивает угол треугольника на два меньших угла. Обозначим полученные углы α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1, γ_2 именно в таком порядке по часовой стрелке. Докажите, что эти чевианы пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\sin\alpha_1 \cdot \sin\beta_1 \cdot \sin\gamma_1 = \sin\alpha_2 \cdot \sin\beta_2 \cdot \sin\gamma_2$.

5. Сумма положительных чисел $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant 1/2$. Докажите, что $(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n) \geqslant 1/2$.

6. Транснеравенство. Пусть $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$; $0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ и $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ — перестановка чисел 1, 2, …, n. Докажите, что

$$a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1 \leqslant a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + \ldots$$

$$\ldots + a_nb_{i_n} \leqslant a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n.$$

7. Пусть a, b, $c > -3/4$, а их сумма равна 1. Докажите, что

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leqslant \frac{9}{10}.$$

8. Для любых положительных чисел a, b, c докажите неравенство:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leqslant \frac{1}{abc}.$$

9. Дан многочлен $f(x)$ такой, что многочлен $f(x^n)$ делится на многочлен $x-1$. Докажите, что многочлен $f(x)$ также делится на многочлен $x-1$.

34. Раскраски вершин графов. 20 июля

Будем обозначать через $\Delta(G)$ и $\delta(G)$ максимальную и минимальную степень вершины графа G соответсвенно.

Определение. 1) Раскраска вершин графа G в k цветов называется *правильной*, если любые две смежные вершины покрашены в разные цвета.
2) Через $\chi(G)$ обозначим *хроматическое число* графа G — наименьшее такое натуральное число, что существует правильная раскраска вершин графа G в такое количество цветов.

1. Пусть G — связный граф, $\Delta(G) = d$ и в графе G есть вершина степени менее d. Докажите, что $\chi(G) \leqslant d$ (то есть, вершины графа G можно правильным образом раскрасить в d цветов).

2. Вершины графа G нельзя правильным образом покрасить в d цветов. Тогда существует такой подграф H графа G, что $\delta(H) \geqslant d$.

3. a) Докажите, что из графа G можно удалить не более, чем $\frac{1}{n}$ часть его ребер так, чтобы полученный граф имел правильную раскраску вершин в n цветов.
b) Докажите, что из графа G можно удалить несколько ребер так, чтобы полученный граф имел правильную раскраску вершин в n цветов и степень каждой вершины уменьшилась не более, чем в $\frac{n-1}{n}$ раз.

Главной целью нашего занятия является доказательство теоремы Брукса.

Теорема Брукса. Пусть $d \geqslant 3$, а G — связный граф, отличный от полного графа на $d+1$ вершине, $\Delta(G) \leqslant d$. Тогда $\chi(G) \leqslant d$.

При $\Delta(G) = 2$ вопрос о существовании правильной раскраски вершин связного графа G в два цвета очевиден. Такой граф G — либо P_n (путь из n вершин), либо C_n (цикл из n вершин). В первом случае легко видеть, что $\chi(P_n) = 2$, а во втором случае $\chi(C_{2k}) = 2$ и $\chi(C_{2k+1}) = 3$.

4. Пусть G — связный граф, $\Delta(G) = d \geqslant 3$. Докажите, что вершины G можно правильным образом раскрасить в d цветов, если
a) есть такая вершина a, что граф $G - a$ несвязен;
b) есть две такие вершины a и b, что граф $G - a - b$ несвязен;
c) есть три вершины u, v и w такие, что u смежна с v и w, вершины v и w несмежны и граф $G - v - w$ связен.

5. Докажите теорему Брукса.

6. Через $\overline{G}$ будем обозначать *дополнение* графа G, то есть, граф на тех же вершинах с ребрами, которых нет в графе G. Докажите, что $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant n+1$, где n — количество вершин графа G.

7. В графе G любые два нечетных цикла имеют общую вершину. Докажите, что $\chi(G) \leqslant 5$.

35. Комплексные числа в геометрии. 21 июля

На занятии мы обсудили как задать на комплексной плоскости следующие объекты: точка, вектор, прямая, окружность. И узнали критерии: равенства отрезков, равенства углов, принадлежности трех точек одной прямой, принадлежность четырех точек одной окружности.

Также обсудили как удобно задавать координаты точек в разных ситуациях и решили некоторые задачи.

36. Разнобой. 21 июля

1. Докажите линейность ориентированной площади.

2. Докажите, что многочлен $(x^2-x+1)^{2014}+(x^2+x+1)^{2014}$ после раскрытия скобок не содержит нечетных степеней x.

3. Пусть f и g – два многочлена с вещественными коэффициентами. Оказалось, что они принимают целые значения в одних и тех же точках (то есть если $f(a)$ целое, то и $g(a)$ целое и наоборот). Докажите, что $f(x)\pm g(x)=c$, то есть либо сумма, либо разность многочленов тождественно равна константе.

4. Докажите, что если у многоугольника есть несколько осей симметрии, то все они пересекаются в одной точке.

5. Докажите, что если число 2^n+1 — простое ($n>1$), то 3 является его первообразным корнем.

6. a) На прямой даны несколько отрезков, любые два из которых имеют общую точку. Докажите, что все отрезки имеют общую точку.
b) На плоскости даны несколько прямоугольников, у которых стороны параллельны двум заданным взаимно перпендикулярным прямым. При этом любые два прямоугольника имеют общую точку. Доказать, что и все эти прямоугольники имеют общую точку.

7. Пусть a, b, c, $d>0$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\geqslant\frac{2}{3}.$$

8. Даны попарно различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите, что $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

9. *Идеалом* в кольце многочленов $\mathbb{R}[x]$ называется множество $I\subset\mathbb{R}[x]$ такое, что выполнены два условия:
1. $\forall a,\, b\in I$ выполнено $a+b\in I$;
2. $\forall a\in I,\, c\in\mathbb{R}[x]$ выполнено $ca\in I$.
a) Пусть I — идеал. Докажите, что существует такой многочлен h, что

$I = h \cdot \mathbb{R}[x]$.
b) Пусть f, $g \in \mathbb{R}[x]$. Докажите, что множество линейных комбинаций $\{fp + gq\}$, где p и q могут быть любыми многочленами, является идеалом.
c) Докажите, используя результаты двух предыдущих пунктов, что наибольший общий делитель двух многочленов представляется в виде линейной комбинации.

37. Десятичные дроби. 22 июля

Здесь и далее, число b — знаменатель дроби, а a —числитель.

1. Докажите, что дробь является конечной тогда и только тогда, когда b имеет вид $2^n 5^m$.

В дальнейшем считаем, что $b \neq 2^n 5^m$.

Вспомним **алгоритм деления столбиком**.
При правильном взгляде на вещи он состоит в следующем. Полагаем $r_0 = a$ и считаем рекуррентно $10 \cdot r_{i-1} = bq_i + r_i$ (деление с остатком). При этом q_i – i-тая цифра после запятой в равенстве $\frac{a}{b} = 0, q_1 q_2 q_3 \ldots$.

2. a) Докажите, что при делении в столбик получается периодическая дробь с периодом не более $b - 1$; b) и даже сумма длин периода и предпериода не более $b - 1$.

Еще одно понимание алгоритма деления столбиком состоит в следующем. Делим с остатком: $a \cdot 10^k = bQ_k + r_k$. Тогда Q_k — число, образованное первыми k цифрами после запятой, r_k — то же самое, что ранее (тем самым r_k оказывается остатком при делении $a \cdot 10^k$ на b).

3. a) Докажите, что если $(b, 10) = 1$, то $(r_i, b) = 1$. b) Докажите, что длина периода не превосходит $\varphi(b)$.

4. Докажите, что если $(b, 10) = 1$, то зацикливание происходит без предпериода. При этом длина периода не зависит от a и равна наименьшему t, для которого $10^t - 1 \vdots b$.

5. Пусть наименьший период некоторой последовательности равен l, а L — некоторый другой период. Докажите, что $L \vdots l$.

6. Докажите, что дробь $0, RTTT\ldots$ (R — из k цифр, T — из t цифр) равна $\frac{R}{10^k} + \frac{T}{10^k(10^t-1)}$.

7. Докажите, что если $(b, 10) \neq 1$, то в десятичной записи $\frac{a}{b}$ обязательно есть предпериод.

8. Пусть $a < b$, $(a, b) = 1$, $b = 2^x \cdot 5^y \cdot b'$, $l = \max\{x, y\}$. Докажите, что период дроби $\frac{a}{b}$ равен периоду дроби $\frac{1}{b'}$, а предпериод в точности равен l, и не может быть меньше.

9. Каково наибольшее значение длины предпериода среди всех несократимых дробей со знаменателем не превосходящим 2008?

10. Приведите пример дробей с предпериодами, при сложении которых предпериод исчезает, а период меньше, чем оба периода слагаемых.

11. Докажите, что период суммы (разности) двух дробей является делителем НОКа периодов, а предпериод не превосходит максимума периодов.

Задачи для самостоятельного решения.

12. Пусть $p > 5$ — простое число. Известно, что длина наименьшего периода десятичной записи дроби $1/p$ равна $2n$. Докажите, что если этот период разбить на два n-значных куска, то сумма чисел в этих кусках равна $99\ldots9$ (n девяток). Например, $1/7 = 0.(142857)$, $142 + 857 = 999$.

38. Заключительная олимпиада. 23 июля

1. В клубе встретились 20 джентльменов. Некоторые были в шляпах, а некоторые — нет. Время от времени один из джентльменов снимал с себя шляпу и надевал ее на одного из тех, у кого в этот момент шляпы не было. В конце 10 джентльменов подсчитали, что каждый из них отдавал шляпу больше раз, чем получал. Сколько джентльменов пришли в шляпах?

2. 2013 натуральных чисел расставили по кругу. Оказалось, что каждое число является либо НОДом, либо НОКом своих соседей. Какое наибольшее количество попарно различных чисел может быть среди этих 2013?

3. 40 членов жюри выбирают из 30 задач одну. Они договорились выбрать задачу, которую умеют решать не менее половины членов жюри, но не все. Каждый из членов жюри решил ровно 26 задач, причем любые два члена жюри решили разные наборы задач. Докажите, что они смогут найти подходящую задачу.

4. На стороне AC треугольника ABC отмечены точки D и E, а на отрезке BE точка F. Оказалось, что $AC = BD$ и $2\angle ACF = \angle ADB$, $2\angle CAF = \angle CDB$. Докажите, что $AD = CE$.

5. Десятичная запись квадрата натурального числа состоит из одной двойки и $k - 1$ единицы. Докажите, что k не делится на 11.

6. В Эрмитаже в галерее героев войны 1812 г. висит 5 рядов по 19 портретов героев. Каждый портрет может висеть лицом к стене или к посетителям. Двое смотрителей играют в игру. За один ход можно перевернуть любые 4 портрета. Проигрывает тот смотритель, после хода которого получится расположение портретов, уже встречавшееся в ходе игры (возможно, в исходный момент). Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его партнер?

7. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D. Произвольный луч ℓ, выходящий из вершины B, пересекает отрезок AC в точке K, а описанную окружность треугольника ABC — в точке L. Докажите, что описанная окружность треугольника DKL проходит через фиксированную точку, отличную от D и не зависящую от выбора луча ℓ.

8. В связном графе $n \geqslant 3$ вершин. При удалении всех ребер любого цикла граф становится несвязным. Какое максимальное количество ребер может быть в таком графе?

39. Вопросы к зачету. 27 июля.

Теория чисел

1. Квадратичные вычеты: определение, количество, связь с произведением. Символ Лежандра. Критерий Эйлера.

2. Показатели: основные свойства.

3. Лемма об уточнении показателя.

4. Первообразный корень: определение, существование по модулю p.

5. Первообразный корень: определение, существование по модулям 2, 4, p^k, $2p^k$, отсутствие по любому другому модулю.

6. Первообразный корень: функция Кармайкла, формула, существование вычета, принадлежащего показателю t по модулю n.

7. Десятичные дроби.

Неравенства

8. Неравенство между средним степенным натуральной степени и средним арифметическим.

9. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

10. Неравенство Бернулли для рационального показателя.

11. Неравенство о средних степенных для произвольных рациональных степеней.

12. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца, эквивалентные переформулировки.

13. Транснеравенство.

Многочлены

14. Многочлены над $\mathbb{R}$: формальное и функциональное равенство многочленов над $\mathbb{R}$.

15. Многочлены над $\mathbb{Z}_p$: формальное и функциональное равенство многочленов над $\mathbb{Z}_p$.

16. Теорема Виета.

17. Неприводимость: единственность разложения на неприводимые многочлены в $\mathbb{R}[x]$.

18. Идеалы. Существование линейного представления НОД многочленов через идеалы.

19. Критерий Эйзенштейна.

20. Основная теорема алгебры (формулировка). Многочлены, неприводимые над $\mathbb{R}$.

21. Интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона.

Комплексные числа

22. Комплексные числа: определение, арифметические операции и их свойства, комплексное сопряжение.

23. Комплексная плоскость. Модуль, аргумент и тригонометрическая форма комплексного числа. Корни n-ой степени из единицы.

24. Преобразования плоскости и их запись на комплексной плоскостью.

25. Задание на комплексной плоскости прямых и окружностей.

26. Критерий принадлежности четырех точек на комплексной плоскости одной окружности.

27. Теорема Птолемея: доказательство через комплексную плоскость.

28. Прямая Симсона: доказательство через комплексную плоскость.

Геометрия

29. Векторы: определения, простейшие свойства и операции.

30. Геометрия масс: основные определения (материальная точка, центр масс системы материальных точек). Существование и единственность центра масс системы материальных точек.

31. Геометрия масс: правило рычага и правило группировки.

32. Теорема Чевы.

33. Теорема Чевы-синус.

34. Теорема Менелая.

35. Теорема Ван-Обеля.

36. Скалярное произведение векторов: определение, основные свойства. Теорема косинусов.

37. Теорема синусов.

38. Радикальная ось и радикальный центр.

39. Направленные углы: определение, основные свойства и классические утверждения.

40. Прямая Симсона: доказательство через направленные углы.

41. Точка Микеля.

42. Движения: основные движения, их композиции. Теорема Шаля.

43. Ориентированная площадь: определение, основные свойства.

44. Аффинные преобразования: инварианты аффинных преобразований, существование аффинного преобразования, заданного образами трех неколлинеарных точек.

Графы

45. Эйлеров путь/цикл. Критерий эйлеровости графа.

46. Гамильтонов путь. Достаточные условия существование в графе гамильтонова пути.

47. Гамильтонов цикл. Достаточные условия существование в графе гамильтонова цикла.

48. Сильная связность ориентированных графов: основные определения и свойства.

49. Турнирные графы. Существование гамильтонова цикла в сильно связном турнирном графе.

50. Лемма Холла.

51. Лемма Холла для арабских стран.

52. Хроматическое число графа. Покраска графа в случае наличия вершины степени меньшей, чем максимальная.

53. Теорема Брукса.

Разное

54. Характеристические функции: определение, основные свойства. Формула включений-исключений.

55. Формула включений-исключений: формулировка. Неравенства в формуле включений-исключений.

Избранные задачи

1. Пусть p — нечетное простое число, a, b, c — вычеты по модулю p, причем $a \not\vdots\ p$, а $D = b^2 - 4ac$. Докажите, что если D — квадратичный вычет по модулю p, то сравнение $ax^2+bx+c \underset{p}{\equiv} 0$ имеет два корня, если D — квадратичный невычет по модулю p, то сравнение $ax^2 + bx + c \underset{p}{\equiv} 0$ не имеет корней, а если $D \vdots\ p$, то это сравнение имеет один корень.

2. Простое число $p \underset{4}{\equiv} 3$, а целые числа x и y таковы, что $x^2+y^2 \vdots\ p$. Докажите, что x, $y \vdots\ p$.

3. Докажите, что если многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$ неприводим над $\mathbb{Z}$, то он неприводим над $\mathbb{Q}$.

4. Про многочлен $f \in \mathbb{R}[x]$ известно, что для любого $c \in \mathbb{R}$ выполнено $f(c) \geqslant 0$. Докажите, что существуют такие многочлены g, $h \in \mathbb{R}[x]$, что $f = g^2 + h^2$.

5. На сторонах произвольного треугольника вне его построены равносторонние треугольники. Докажите, что их центры также образуют равносторонний треугольник **(внешний треугольник Наполеона)**.

6. Предположим, что a_1, a_2, $\ldots$, a_n и b_1, b_2, $\ldots$, b_n — положительные числа, удовлетворяющие условию

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

Докажите неравенство

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 + b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_n + b_n} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{2}.$$

7. Пусть a, b, c, $d > 0$. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b + 2c + 3d} + \frac{b}{c + 2d + 3a} + \frac{c}{d + 2a + 3b} + \frac{d}{a + 2b + 3c} \geqslant \frac{2}{3}.$$

8. Пусть сумма некоторых n векторов равна $\overrightarrow{0}$. Докажите, что из них можно сложить выпуклый многоугольник.

9. Докажите, что существуют такие α, β, γ с суммой 1 такие, что для любых неотрицательных a, b, c верно неравенство:

$$\alpha a^5 b^2 c + \beta b^5 c^2 a + \gamma c^5 a^2 b \geqslant a^4 b^2 c^2.$$

10. Докажите, что если степень многочлена P меньше чем степень многочлена Q, то найдется такое число x_0, что для любого $x > x_0$ будет выполняться неравенство: $|P(x)| < |Q(x)|$.

11. Все вершины двудольного графа имеют степень k. Докажите, что их можно разбить на пары смежных.

12. Каждый из двух равных квадратов разбит на 100 равновеликих частей. Докажите, что можно сложить эти квадраты в стопку и проткнуть в 100 точках так, чтобы каждая из 100 частей каждого из квадратов была проткнута.

13. На прямой даны несколько отрезков, любые два из которых имеют общую точку. Докажите, что все отрезки имеют общую точку.