Вступительная олимпиада. 4 июля.

Время работы 150 минут. Решать можно в любом порядке. Задачи записываем на листочках, на каждом листе пишем фамилию и «Лист 1 из 7, Лист 4 из 15 и прочее». Каждая новая задача должна быть четко отделена от предыдущей, желательно с новой страницы, еще желательнее на отдельном листе!

1. Стадо молодняка состоит из бычков и телочек. Телочек в стаде 55% от его общей численности, а их общий вес составляет 45% общего веса стада. Во сколько раз средний вес бычка больше среднего веса телочки?

2. Вещественные числа a, b, c таковы, что $1 < a < b+c < a+1$ и $b < c$. Докажите, что $b < a$.

3. Пусть $ABCD$ – равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC. На продолжении прямой DA за точку A отложили отрезок AE такой, что $AE = BC$. В каком отношении биссектриса угла DBE делит отрезок DE?

4. На столе лежит куча из n ($n > 1$) бейджей. Ниночка и Танечка по очереди (начинает Танечка) разбивают любую из имеющихся куч на 2 или 3 меньших. Проигрывает не имеющая хода. Кто выиграет при правильной игре? (Ответ может зависеть от n).

5. В треугольник вписана окружность. Через точки касания со сторонами проведены прямые, параллельные биссектрисам противоположных углов. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

6. Можно ли разбить числа от 1 до 1000 на три группы таким образом, чтобы в первой группе сумма чисел делилась на 1002, во второй группе — на 2003, а в третьей группе — на 3004?

7. Прямоугольник разбит на mn прямоугольников $m-1$ вертикальным разрезом и $n-1$ горизонтальным разрезом. Про каждый маленький прямоугольник (из этих mn) можно спросить его площадь. За какое наименьшее число вопросов можно гарантированно узнать площадь большого прямоугольника?

Подобие. 4 июля.

Определение. Две фигуры называются *подобными*, если существуют такие число $k > 0$ и соответствие между точками этих фигур, что для любых двух точек первой фигуры расстояние между ними в k раз меньше расстояния между соответствующими им точками.

Напоминание. Треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны если

(1) $\angle ABC = \angle A'B'C'$ и $AB/A'B' = BC/B'C'$;

(2) $\angle ABC = \angle A'B'C'$ и $\angle ACB = \angle A'C'B'$;

(3) $AB/A'B' = AC/A'C' = BC/B'C'$.

Утверждение. Многоугольники подобны тогда и только тогда, когда их стороны соответственно пропорциональны, а углы соответственно равны.

1. a) Докажите, что высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит его на два треугольника, подобных исходному. b) Докажите, что сумма квадратов коэффициентов подобия равна 1.

2. Вася из n одинаковых квадратов составил прямоугольник и Петя из n одинаковых квадратов составил прямоугольник. При каких n можно утверждать, что прямоугольники Васи и Пети подобны?

3. Найдите площадь круга радиуса 10, если известно, что площадь круга радиуса 1 равна π.

4. Площадь поверхности некоторого шара равна 3. Найдите площадь поверхности шара вдвое большего радиуса.

5. Докажите, что существует шар, площадь поверхности которого, выраженная в квадратных сантиметрах, равна его объему, выраженному в кубических сантиметрах.

6. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана такая точка P, что $\angle PBC = \angle PDC$. Докажите, что $\angle PAD = \angle PCD$.

7. Точка M — середина стороны AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Диагонали AC и BD пересекают отрезки DM и CM в точках P и Q соответственно. Оказалось, что $\angle PAM = \angle MDA$, а точка пересечения отрезков AQ и BP равноудалена от точек A и B. Докажите, что $\angle QBA = \angle MCB$.

Транснеравенство. 5 июля.

0. Есть три кучки монет: по 2, по 5 и по 10 рублей. Разрешается выбрать 7 монет из одной кучки, 5 монет из другой и 2 — из третьей на выбор. Как набрать наибольшую, а как наименьшую сумму денег?

1. Пусть $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$. Что больше: $a_1b_1 + a_2b_2$ или $a_1b_2 + a_2b_1$?

2. На доске a) 2×2 b) $n \times n$ расставлены не бьющие друг друга ладьи и в каждой клетке вписано произведение ее координат. Какова может быть максимальная сумма чисел под ладьями?

3. Транснеравенство. Даны два набора по n чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. Эти числа разбиваются на n пар так, что в каждой

паре одно число из первого набора, а другое — из второго: a_1 и b_{i_1}, a_2 и b_{i_2}, …, a_n и b_{i_n}. Затем числа в парах перемножают, и полученные произведения складывают: $V = a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + \ldots + a_nb_{i_n}$.

Оказывается, что наибольшее значение V равно $a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$, а наименьшее равно $a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1$. Докажите это.

4. Следующие множества чисел расположить так, чтобы полученные наборы были расположены: 1) одинаково; 2) противоположно с набором (a, b, c) $(a \geqslant b \geqslant c > 0)$.
a) $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$; b) (a^2, b^2, c^2); c) $(\frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c})$; d) (a^2b^2, b^2c^2, c^2a^2); e) $(\frac{c}{ab}, \frac{a}{bc}, \frac{b}{ac})$.

5. Для положительных a, b и c докажите с помощью транснеравенства, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 3$.

6. Докажите, что $a^3+b^3+c^3+d^3 \geqslant a^2b+b^2c+c^2d+d^2a$, при $a, b, c, d \geqslant 0$.

7. Докажите, что $2(a^3 + b^3 + c^3) \geqslant ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c)$, при $a, b, c \geqslant 0$.

8. Для положительных чисел x, y и z докажите, что

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geqslant \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}.$$

9. Докажите, что $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \geqslant a + b + c$, при $a, b, c > 0$.

10. Неравенство Чебышёва. Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. Докажите, что

$$n(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n) \geqslant (a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n).$$

Задачи для самостоятельного решения.

11. Докажите, что $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$, при $a, b, c > 0$.

12. Докажите, что для натуральных чисел a, b и c выполняется неравенство

$$a \cdot 2^a + b \cdot 2^b + c \cdot 2^c \geqslant a \cdot 2^b + b \cdot 2^c + c \cdot 2^a.$$

13. Пусть a, b и c — длины сторон треугольника; α, β и γ — величины противоположных углов. Докажите, что

$$a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c \cdot \gamma \geqslant 1/2(b \cdot \alpha + c \cdot \beta + a \cdot \gamma + c \cdot \alpha + a \cdot \beta + b \cdot \gamma).$$

14. Для произвольных вещественных чисел докажите неравенство

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n} \geqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^2$$

15. Для положительных a, b и c докажите, что

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^3 + b^3 + c^3} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Тригонометрия. 5 июля.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Пусть угол $A = \alpha$.

Определение. Косинусом угла α ($\cos\alpha$) называется отношение длин противолежащего ему катета и гипотенузы.

Определение. Синусом угла α ($\sin\alpha$) называется отношение длин прилежащего к нему катета и гипотенузы.

Определение. Тангенсом угла α ($\operatorname{tg}\alpha$) называется отношение длин прилежащего к нему катета и противолежащего ему.

1. Докажите, что значения $\cos\alpha$; $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ не зависят от выбора прямоугольного треугольника.

2. Выразите $\operatorname{tg}\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

3. Докажите *основное тригонометрическое тождество:*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

4. Докажите, что произведение длин проекций катетов прямоугольного треугольника на гипотенузу равно квадрату высоты этого треугольника, опущенной на гипотенузу.

5. Вычислите $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ для a) $\alpha = 30°$; b) $\alpha = 60°$; c) $\alpha = 45°$.

6. Докажите, что a) $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$; b) $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$.

7. Выразите следующие величины через $\sin\alpha$ и/или $\cos\alpha$ a) $\cos(\pi-\alpha)$; b) $\sin(\pi-\alpha)$. c) $\cos(\pi+\alpha)$; d) $\sin(\pi+\alpha)$; e) $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)$; f) $\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)$; g) $\sin(\alpha + 2\pi\cdot k)$, если $k \in \mathbb{Z}$.

8. Докажите, что площадь треугольника равна половине произведения двух сторон на синус угла между ними.

Задачи для самостоятельного решения.

9. В треугольнике ABC длины сторон BC и AC равны соответственно a и b, а $\angle ACB = \alpha$. Найдите длину стороны AB.

10. В равнобедренной трапеции длина диагонали равна 10, и эта диагональ образует с нижним основанием угол $\frac{3\pi}{10}$. Найдите площадь этой трапеции и длину ее средней линии.

11. В треугольнике ABC $AB = 4\sqrt{2}$, $BC = 7$, $AC = 5$. Найдите $\angle ABC$.

12. Из вершины B угла $\angle ABC < 180°$ внутрь угла проведен луч BD. Обозначим $\angle ABD = \alpha$ и $\angle DBC = \beta$. Докажите, что зная отношение синусов указанных углов можно однозначно установить положение луча BD.

13. Докажите, что в остроугольном треугольнике отношения сторон к синусам противолежащих им углов равны.

14. В a) выпуклом; b) невыпуклом четырехугольнике угол между диагоналями равен α, а диагонали равны d_1 и d_2. Найдите площадь четырехугольника.

15. Пятиугольная звезда образована продолжениями сторон выпуклого пятиугольника. Десять отрезков, составляющих контур звезды покрашены через один в коралловый и фисташковый цвета. Докажите, что произведение длин пяти коралловых отрезков равно произведению длин пяти фисташковых отрезков.

Множества. 6 июля.

Определение. Термин *множество* в математике означает совокупность (собрание, коллекцию) некоторых объектов, называемых *элементами* данного множества.

Обычно, задавая множество, его элементы отбирают из элементов некоторого большего универсального множества. Какое множество считается универсальным, обычно ясно из контекста. Если множество X принято за универсальное, то множество всех его элементов M, обладающих свойством C, записывают так:

$$\{M \in X \mid M \text{ обладает свойством } C\}.$$

1. Укажите подходящие универсальные множества и характеристические свойства для: a) отрезка $[-1; 1]$; b) множества $\{1, 3, 5, \ldots\}$; c) серединного перпендикуляра к отрезку AB; d) двух прямых, параллельных данной и отстоящих от нее на 1.

Определение. Если каждый элемент множества A является в то же время и элементом множества B, говорят, что множество A называется подмножеством множества B. ($A \subset B$).

2. Пусть A — множество однозначных натуральных чисел. Задайте указанием характеристического свойства его подмножество $\{2, 4, 6, 8\}$.

3. Докажите, что множество A тогда и только тогда является подмножеством множества B, когда каждый элемент, не принадлежащий B, не принадлежит A.

Определение. Множество называется пустым, если оно не содержит ни одного элемента.

4. Выпишите все подмножества множества $\{0, 1, 2\}$.

5. В множестве n элементов. Сколько у него различных подмножеств?

Определение. Два множества A и B считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов (то есть любой элемент множества A принадлежит и множеству B, и наоборот).

Определение. *Пересечением* множеств A и B называется множество тех элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B. Обозначение для пересечения множеств: $A \cap B$.

Определение. *Объединением* множеств A и B называется множество тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B. Обозначение для объединения множеств: $A \cup B$.

6. Пусть A — множество натуральных чисел, не превосходящих 1000 и делящихся на 4, B — множество натуральных чисел, не превосходящих 1000 и делящихся на 5. a) Сколько элементов в множестве A? b) $A \cap B$? c) $A \cup B$?

7. Докажите, что для любых трех множеств A, B и C выполняются равенства:

a) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
c) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
d) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Определение. *Разностью* множества A и B называется множество

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Определение. Зафиксируем универсальное множество X. *Дополнением* множества A до множества X называется множество

$$\overline{A} := X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\}.$$

8. Докажите, что для любых множеств A и B выполняются равенства:

a) $\overline{\overline{A}} = A$.
b) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.
c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
d) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

9. В зоопарке все большие, но не зеленые животные — бегемоты. Можно ли из этого сделать вывод, что:

a) если животное большое и зеленое, то это не бегемот?
b) если животное большое, но не бегемот, то оно зеленое?
c) все черные крокодилы — небольшие?
d) все большие крокодилы — зеленые?
e) все зеленые крокодилы — большие?
f) все бегемоты — большие?
g) все зеленые бегемоты — небольшие?

Векторы. 6 июля.

Определение. Вектором называется класс направленных отрезков.

Определение. Изобразим два вектора направленными отрезками так, чтобы конец первого отрезка совпал с началом второго отрезка. Вектор из начала первого отрезка в конец второго отрезка есть сумма двух исходных векторов.

1. Правило параллелограмма. Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

2. В треугольнике (возможно, вырожденном) ABC проведена медиана AM. Выразите $\overrightarrow{AM}$ через $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

3. В треугольнике ABC медианы пересекаются в точке M. Докажите, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$.

4. На сторонах пятиугольника AB, BC, CD и DE пятиугольника $ABCDE$ отметили середины K, L, M и N соответственно. P и Q — середины отрезков KM и LN. Докажите, что $PQ \parallel AE$ и найдите отношение длин этих отрезков.

5. Пусть $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ — два параллелограмма с общей вершиной. Докажите, что один из векторов $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{DD_1}$ коллинеарен сумме двух других.

6. На плоскости дано несколько точек, некоторые из них соединены векторами. В каждую точку входит столько же векторов, сколько выходит из нее. Докажите, что сумма всех векторов равна нулю.

7. На сторонах 2015-угольника поставлены стрелки так, что сумма всех получившихся векторов, направленных по часовой стрелке, равна нулю. Докажите, что сумма всех остальных векторов тоже равна нулю.

8. Пусть O — центр правильного 2015-угольника $A_1A_2\ldots A_{2015}$. Докажите, что $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_{2015}} = \overrightarrow{0}$.

9. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отложен отрезок $AK = \frac{1}{5}AD$, а на диагонали AC — отрезок $AL = \frac{1}{6}AC$. Докажите, что точки B, L и K лежат на одной прямой.

10. Пусть H — ортоцентр произвольного треугольника ABC, а O — центр описанной окружности. Докажите, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Абака. 7 июля.

Комбинаторика

10. Сколько есть трёхзначных чисел, у которых сумма двух крайних цифр вдвое больше средней цифры?

20. Очень умные Петя и Вася выписывают четырёхзначные числа. Петя выписывает такие числа, у которых первая цифра равна сумме трёх других, а Вася такие, у которых последняя цифра равна сумме трёх других. Кто выпишет больше чисел и на сколько?

30. Иван Ильич купил четыре игрушки: самолёт, корабль, грузовик и подъёмный кран, чтобы подарить их трём своим внукам: Пете, Мише и Коле. Он хочет раздать все четыре игрушки и не хочет, чтобы кто-то из внуков остался без игрушки. Каким числом способов он может раздать игрушки?

40. Какое наименьшее число фишек надо поставить на поля клетчатой доски 9×9 так, чтобы на каждой вертикали, горизонтали или диагонали (диагональю считается любая прямая, параллельная любой большой диагонали) стояла хотя бы одна фишка?

50. Сколькими различными способами можно из клетчатой доски 6×6 вырезать два непересекающихся трёхклеточных «уголка»?

60. Множество A состоит из натуральных чисел, причем его наименьший элемент равен 1, а наибольший — 100. Любой элемент A (кроме 1) равен сумме двух (возможно, равных) чисел, являющихся элементами A. Найдите, какое наименьшее возможное число элементов в A.

Геометрия

10. Из куска проволоки согнули прямоугольник, у которого длина вдвое больше ширины. Затем разогнули проволоку и согнули из нее другой прямоугольник с длиной на 10% больше, чем раньше. На сколько процентов уменьшилась его ширина?

20. На клетчатой бумаге отмечены четыре узла сетки, образующие квадрат 4×4. Вася отметил ещё два узла и соедините их замкнутой ломаной так, чтобы получился шестиугольник (не обязательно выпуклый) наименьшей возможной площади. Чему равна эта площадь?

30. В треугольнике, углы которого относятся как $1 : 2 : 4$, провели все биссектрисы. Сколько равнобедренных треугольников можно выделить на получившемся чертеже?

40. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка K так, что угол $BAK = 24^\circ$. На отрезке AK выбрана точка M так, что угол $ABM = 90^\circ$, $AM = 2BK$. Найдите величину угла B.

50. В прямоугольном треугольнике ABC угол $C = 90°$, угол $B = 40°$. На сторонах AB и BC выбраны такие точки D и E соответственно, что $\angle EAD = 5°$ и $\angle ECD = 10°$. Найдите угол EDC.

60. Через каждую из трёх точек на плоскости проходит по 10 прямых. На какое наибольшее число частей могут разбить плоскость эти прямые?

Задачи на движение

10. Расстояние между двумя машинами, движущимися по шоссе, 100 км. Скорости машин 80 км/ч и 60 км/ч. Чему может быть равно расстояние между ними через час?

20. Поезд проходит через мост длиной 450 метров за 45 секунд, а мимо Вовочки — за 15 секунд. Определить длину и скорость поезда.

30. Дорога между двумя горными селами A и B идет то в гору, то под гору. Автобус, который развивает среднюю скорость 30 км/ч в гору и 60 км/ч под гору, проехал из A в B и обратно. Какова была его средняя скорость на всем пути?

40. По лыжне кольцевого маршрута бегут с постоянными скоростями Чебурашка и Крокодил Гена в одном направлении, а Старуха Шапокляк — в противоположном. Шапокляк встречается с Геной каждые две минуты, а с Чебурашкой — каждые 3 минуты. Через сколько минут Крокодил Гена обгоняет Чебурашку?

50. Спортсмены бегут колонной со скоростью 8 км/ч. Навстречу бежит тренер со скоростью 4 км/ч. Каждый спортсмен, поравнявшись с тренером, бежит назад со скоростью 6 км/ч. Во сколько раз изменится длина колонны, когда все спортсмены развернутся?

60. Винни-Пух и Пятачок сели за стол немного подкрепиться и начали одновременно есть мед из одного горшка. Если бы Винни-Пух ел со скоростью Пятачка, то процесс еды длился бы на 4 минуты дольше, а если бы, наоборот, Пятачок ел со скорость Винни-Пуха, то сократился бы на одну минуту. За какое время мед был полностью съеден?

Алгебра

10. Известно, что $a + b + c = 100$, а $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 0,1$. Найдите, чему может быть равно $\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a}$.

20. Известно, что $a^2 + b^2 = 3ab$ и $a > b > 0$. Вычислите $\frac{a+b}{a-b}$.

30. Найдите наибольшее натуральное число с неповторяющимися цифрами, делящееся на 99.

40. Найдите все трехзначные числа, равные сумме факториалов своих цифр.

50. Найдите все натуральные n, для которых существуют два подряд идущих натуральных числа, суммы цифр которых делятся на n.

60. Какое наименьшее натуральное число можно представить в виде $56^n - 5^m$, где n и m — натуральные числа?

Графы

10. Компания из нескольких друзей вела переписку так, что каждое письмо получали все, кроме отправителя. Каждый написал одно и то же количество писем, в результате чего всеми вместе было получено 440 писем. Сколько человек могло быть в этой компании?

20. 20 телефонов соединены проводами так, что каждый провод соединяет два телефона, каждая пара телефонов соединена не более чем одним проводом и от каждого телефона отходит не более двух проводов. Нужно закрасить провода (каждый провод целиком одной краской) так, чтобы от каждого телефона отходили провода разных цветов. Какого наименьшего числа красок достаточно для такой закраски?

30. На листе бумаги проведено 11 горизонтальных и 11 вертикальных прямых, точки пересечения которых называются «узлами», «звеном» мы будем называть отрезок прямой, соединяющий два соседних узла одной прямой. Какое наименьшее число звеньев надо стереть, чтобы после этого в каждом узле сходилось не более трёх звеньев?

40. Сеть метро имеет на каждой линии не менее 4 станций, из них не более трёх пересадочных. Ни на какой пересадочной станции не пересекаются более двух линий. Какое наибольшее число линий может иметь такая сеть, если с каждой станции на любую другую можно попасть, сделав не больше двух пересадок?

50. В классе учится 15 мальчиков и 15 девочек. В день 8 Марта некоторые мальчики позвонили некоторым девочкам и поздравили их с праздником (никакой мальчик не звонил одной и той же девочке дважды). Оказалось, что детей можно единственным образом разбить на 15 пар так, чтобы в каждой паре оказались мальчик с девочкой, которой он звонил. Какое наибольшее число звонков могло быть сделано?

60. Гидры состоят из голов и шей (каждая шея соединяет ровно две головы). Одним ударом меча можно снести все шеи, выходящие из какой-то головы A гидры. Но при этом из головы A мгновенно вырастает по одной шее во все головы, с которыми A не была соединена. Геракл побеждает гидру, если ему удастся разрубить ее на две несвязанные шеями части. Найдите наименьшее N, при котором Геракл сможет победить любую стошеюю гидру, нанеся не более, чем N ударов.

Вокруг шахматной доски

10. Каким наименьшим числом прямых можно разрезать все клетки шахматной доски 3×3?

20. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черных полях шахматной доски?

30. Какое наименьшее количество клеток нужно отметить на шахматной доске, чтобы

1) среди отмеченных клеток не было соседних (имеющих общую сторону или общую вершину),

2) добавление к этим клеткам любой одной клетки нарушало пункт 1?

40. Сколькими способами на доске 5×5 можно расположить 5 ферзей, чтобы они не били друг друга? Способы, отличающиеся поворотами и симметрией считаются различными.

50. Шахматную доску по границам клеток разрезали на различные прямоугольники. Какое наибольшее число прямоугольников могло получиться? Прямоугольники считаются одинаковыми, если их можно наложить друг на друга так, чтобы совпали цвета накладываемых клеток.

60. Сколько ладей может стоять на шахматной доске, если каждая бьёт одинаковое число ладей? Укажите все варианты.

Ответы к абаке можно найти на странице 50.

Формула включений-исключений. 7 июля.

1. Формула включений-исключений. В этой задаче через $|X|$ обозначается количество элементов множества X. Пусть A, B, C — конечные множества (то есть множества, состоящие из конечного числа элементов). Докажите, что

a) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$;

b) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

c) Используя результаты двух предыдущих пунктов, придумайте аналогичную формулу для четырех множеств.

d) Докажите общую формулу включений-исключений:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|.$$

2. Внутри фигуры площади 6 расположено три многоугольника площади не менее 3 каждый. Докажите, что существует два многоугольника,

площадь пересечения которых не менее 1.

3. Куб с ребром длины 20 разбит на 8 000 единичных кубиков, и в каждом кубике записано число. Известно, что в каждом столбике из 20 кубиков, параллельном ребру куба, сумма чисел равна 1 (рассматриваются столбики всех трёх направлений). В некотором кубике записано число 10. Через этот кубик проходит три слоя $1 \times 20 \times 20$, параллельных граням куба. Найдите сумму всех чисел вне этих слоев.

4. В группе из 50 ребят некоторые знают все буквы, кроме «р», которую просто пропускают при письме, а остальные знают все буквы, кроме «к», которую тоже пропускают. Однажды учитель попросил 10 учеников написать слово «кот», 18 других учеников — слово «рот», а остальных — слово «крот». При этом слова «кот» и «рот» оказались написанными по 15 раз. Сколько ребят написали своё слово верно? Ответ обоснуйте.

5. Каждая сторона в треугольнике ABC разделена на 8 равных отрезков. Сколько существует различных треугольников с вершинами в точках деления (точки A, B, C не могут быть вершинами треугольников), у которых ни одна сторона не параллельна ни одной из сторон треугольника ABC?

6. Рома провёл социальный опрос и выяснил про жителей своего подъезда, что: 25 из них играют в шахматы, 30 были в Архангельске, 28 летали на самолете. Среди летавших на самолете 18 играют в шахматы и 17 были в Архангельске. 16 жителей играют в шахматы и были в Архангельске, притом среди них 15 еще и летали на самолете. От управдома Рома узнал, что всего в подъезде живет 45 человек. Не врет ли управдом?

7. Обозначим $T(n) = 1+2+\ldots+n$. Пусть a, b, c — такие натуральные числа, что каждое из них не превосходит n, а их сумма не меньше $2n$. Не используя явную формулу для $T(n)$, доказать, что $T(n) = T(a) + T(b)+T(c)-T(a+b-n)-T(b+c-n)-T(a+c-n)+T(a+b+c-2n)$.

8. Сколько чисел от 1 до 1 000 000 не являются ни точным квадратом, ни точным кубом, ни точной четвертой степенью?

9. Для натуральных a, b и c докажите равенство

$$[a,b,c] = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot (a,b,c)}{(a,b) \cdot (b,c) \cdot (a,c)}.$$

10. В классе 30 учеников. Сколькими способами они могут пересесть так, чтобы ни один не сел на свое место?

Задачи для самостоятельного решения.

11. Антон, Артем и Вера решили вместе 100 задач по математике. Каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу трудной, если ее решил только один человек, и легкой, если ее решили все трое. Насколько отличается количество трудных задач от количества легких?

12. Найдите количество чисел меньших и взаимно простых с числом $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m}$, где $\{p_i\}$ — простые числа.

13. На корабле служит k матросов. После увольнительной они возвращаются навеселе и занимают койки как придётся. Найти вероятность того, что наутро ни один из них не проснётся в своей койке.

14. Внутри фигуры площади 4 расположены 7 многоугольников площадью не менее 1. Докажите, что существует два многоугольника, площадь пересечения которых не менее $1/7$.

15. Сколькими способами можно расселить 15 гостей в четырех комнатах, если требуется, чтобы ни одна из комнат не осталась пустой?

Параллельный перенос и осевая симметрия. 7 июля.

Определение. *Параллельным переносом* на вектор $\overrightarrow{v}$ называется преобразование плоскости, при котором каждая точка A переходит в такую точку A', что $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{v}$.

1. По разные стороны от параллельных берегов реки расположены точки A и B. В каком месте следует построить мост CD, перпендикулярный берегам так, чтобы длина пути $ACDB$ была наименьшей?

2. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка M внутри него. Доказать, что существует выпуклый четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, стороны которого равны MA, MB, MC, MD.

3. Даны две параллельные прямые и точка между ними. Построить окружность, касающуюся данных прямых и проходящую через данную точку.

4. В данную окружность впишите прямоугольник, так чтобы две его стороны были равны и параллельны данному отрезку.

5. Дан прямоугольник $ABCD$, и во внешнюю сторону построен треугольник $\triangle ABE$. Докажите, что точка пересечения перпендикуляров, опущенных соответственно из точек C и D на AE и BE лежит на прямой, содержащей высоту треугольника $\triangle ABE$, опущенную из вершины E.

Определение. *Осевой симметрией* относительно прямой ℓ называется преобразование плоскости, при котором каждая точка A переходит в такую точку A', что $AA' \perp \ell$ и отрезок AA' делится прямой ℓ пополам.

6. Какое количество осей симметрии может быть у треугольника?

7. Четырехугольник имеет ось симметрии. Докажите, что он либо прямоугольник, либо равнобедренная трапеция, либо дельтоид.

8. Докажите, что композиция двух осевых симметрий с параллельнми осями является параллельным переносом.

9. Через точку M основания AB равнобедренного треугольника ABC проведена прямая, пересекающая его боковые стороны CA и CB (или их продолжения) в точках A_1 и B_1. Докажите, что $\frac{A_1A}{A_1M} = \frac{B_1B}{B_1M}$.

10. Дана прямая ℓ и точки A и B, лежащие от нее по одну сторону. Постройте на прямой ℓ такую точку X, чтоб $AX + BX = a$, где a — фиксированная величина.

11. Дан треугольник $\triangle ABC$. На биссектрисе внешнего угла B выбрана точка M отличная от B. Докажите, что $AM + MC > AB + BC$.

12. Докажите, что если плоская фигура имеет две оси симметрии, то они перпендикулярны.

13. Дан невыпуклый четырёхугольник периметра P. Докажите, что найдётся выпуклый четырёхугольник того же периметра, но большей площади.

14. На прямоугольном бильярдном столе лежит шар. Постройте траекторию, при движении по которой шар, отразившись от каждой стенки по одному разу, вернётся на исходное место.

Комплексные числа. 9 июля.

Определение. Комплексным числом называется пара вещественных чисел (a, b) с операциями сложения и умножения, определяющимися так:

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;

$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Свойства комплексных чисел

1. Существует нейтральный элемент, обозначающийся 0, такой что для любого комплексного z выполняется равенство $z + 0 = 0 + z = z$.

2. Коммутативность сложения: $z + w = w + z$.

3. Ассоциативность сложения: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.

4. Для любого числа z существует обратный элемент по сложению $-z$ такой, что $z + (-z) = 0$.

5. Существует нейтральный элемент относительно умножения 1, такой что $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$.

6. Коммутативность умножения: $z \cdot w = w \cdot z$.

7. Ассоциативность умножения $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$.

8. Для любого числа $z \neq 0$ существует обратный элемент по умножению z^{-1} такой, что $z \cdot z^{-1} = 1$.

9. Дистрибутивность: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

Задачи для самостоятельного решения.

10. Проверьте, что числа вида $(a, 0)$ можно рассматривать как вещественные числа.

В дальнейшем комплексное число $(a, 0)$ мы будем обозначать просто a.

11. Решите в комплексных числах уравнение $z^2 = (-1, 0)$.

Комплексное число $(0, 1)$ обозначается i и называется мнимой единицей. Соответственно, любое комплексное число $z = (a, b)$ можно представить в виде $a + bi$, где a и b вещественные. Число a называется вещественной частью z и обозначается $\mathrm{Re}(z)$. Число b (а вовсе не bi, как иногда наивно думают некоторые) называется мнимой частью z и обозначается $\mathrm{Im}(z)$. Заметим, что два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда у них равны вещественные и мнимые части. Комплексное число $\overline{z} = a - bi$ называется сопряжённым к числу $z = a + bi$.

12. Проверьте, что a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$; b) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$; c) $\overline{\overline{z}} = z$.

13. Вычислите a) $(1 + i)^4$; b) $\frac{3+7i}{1-3i}$; c) $\frac{(1+3i)(1-4i)+4+i}{2+i}$.

14. Решите уравнение: a) $x^2 = -1$; b) $x^2 + x + 1 = 0$; c) $x^2 = a$, $a \in \mathbb{R}$; d) $x^2 = 3 - 4i$; e) $x^2 = a + bi$.

15. Докажите, что $\mathrm{Re}(a\overline{b}) = \mathrm{Re}(\overline{a}b)$.

16. Докажите, что a) $z^2 + \overline{z}^2 \in \mathbb{R}$; b) $z^n + \overline{z}^n \in \mathbb{R}$.

17. Докажите, что если комплексное число z является корнем многочлена $f(x)$ с вещественными коэффициентами, то число $\overline{z}$ также является его корнем.

18. Вычислите

a) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$;

b) $C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n$;

c) найдите $(1 + i)^{100}$;

d) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots$;

e) $C_{4n}^0 + C_{4n}^4 + C_{4n}^8 + \ldots + C_{4n}^{4n}$.

Отображения множеств. 9 июля.

Определение. *Отображением* f из множества X в множество Y называется правило, по которому каждому элементу x множества X ставится в соответствие единственный элемент $f(x)$ множества Y. При этом если $f(x) = y$, то элемент y называется образом элемента x при отображении f, а элемент x называется прообразом элемента y при отображении f. Обозначения: $f\colon X \to Y$ — отображение, X — *область определения*, а Y — *область значений*.

1. Сколько всего существует отображений из множества с m элементами в множество с n элементами?

2. Какие из следующих правил задают отображения? Каковы области определения и значений этих отображений? a) абсцисса точки с заданными координатами; b) сумма цифр числа; c) остаток от деления на k; d) целая часть, дробная часть; e) характеристическая функция подмножества.

Определение. Пусть заданы отображения $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to C$. Определим *композицию* $h = g \circ f$ формулой $h(a) = g(f(a))$.

3. Докажите, что a) $f \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ f = f$; b) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, где id — тождественное отображение (переводит каждый элемент в себя).

Определение. Отображение $g\colon B \to A$ называется *обратным* к отображению $f\colon A \to B$, если $g \circ f = f \circ g = \mathrm{id}$.

4. Найдите обратные к следующим отображениям: a) $y = 3x + 2$; b) $y = (x + 1)/(x + 2)$.

Определение. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *сюръективным*, если для каждого $y \in Y$ существует хотя бы один элемент $x \in X$ такой, что $y = f(x)$.

Определение. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *инъективным*, если для каждого $y \in Y$ существует не более одного элемента $x \in X$ такого, что $y = f(x)$.

Определение. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *биективным*, если оно сюръективно и инъективно.

5. Докажите, что если $f\colon X \to Y$ биективно, то для него существует обратное отображение $f^{-1}\colon Y \to X$.

6. Верно ли, что a) если f и g биективны, то $g \circ f$ биективно; b) если $g \circ f$ биективно, то f и g биективны; c) если $g \circ f$ инъективно, то f инъективно; d) если $g \circ f$ сюръективно, то g сюръективно?

7. Установите биекцию между множествами натуральных и целых чисел.

8. Некоторое число делится на 2, но не делится на 4. Докажите, что количество четных делителей этого числа равно числу нечетных делителей этого числа.

Задачи для самостоятельного решения.

9. Счастливым билетом называется билет с шестизначным номером, у которого сумма первых трёх цифр равна сумме последних трёх цифр. Каких счастливых билетов больше: a) с суммой цифр в каждой части 15 или с суммой 12? b) с суммой 9 или с суммой 10?

10. Установите биективное соответствие между: a) точками отрезков длины 4 и длины 5; b) точками полуокружности без крайних точек и числовой прямой; c) точками интервала и точками отрезка.

11. Установите биекцию между клетками бесконечной (во все стороны) шахматной доски и натуральным рядом.

12. Докажите, что число имеет нечетное количество делителей тогда и только тогда, когда это число является полным квадратом.

13. Докажите, что среди чисел, меньших 10 000, чисел с суммой цифр 15 и с суммой цифр 21 поровну.

14. a) Четно или нечетно число счастливых билетов? b) Докажите, что счастливых билетов столько же, сколько билетов с суммой цифр 27.

15. Пусть $|A| = m$, $|B| = n$. Сколько среди отображений из A в B a) вложений; b) взаимно-однозначных соответствий?

Метод координат. 10 июля.

Расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$

$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Уравнение окружности с центром в точке $O(x_0; y_0)$ и радиуса R

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Координаты середины M отрезка AB, где $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, не лежащих на прямой, параллельной оси координат,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Все задачи листочка нужно решать методом координат.

1. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 45^\circ$ и высота BH делит сторону AC на отрезки 4 и 6, считая от вершины A. Найдите медиану AM.

2. Является ли отрезок AB, где $A(-1; \sqrt{5})$, $B(-5; -\sqrt{5})$, диаметром окружности $x^2 + 6x + y^2 = 0$?

3. Докажите, что в равнобедренной трапеции квадрат диагонали равен квадрату боковой стороны, сложенному с произведением оснований.

4. Дан треугольник ABC, в котором $AB = 1$, $BC = 2$, $\angle ABC = 120^\circ$. Докажите, что медиана BM перпендикулярна стороне AB.

5. Пусть $ABCD$ — прямоугольник. Докажите, что для любой точки M выполняется равенство $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

6. Дан квадрат $ABCD$ со стороной a. Найдите радиус окружности, проходящей через середину стороны AB, центр квадрата и вершину C.

7. Угол ABC — прямой, $AB = 4$, $BC = 3$. Найдите расстояние от точки B до точки K, лежащей на биссектрисе прямого угла, если точка K равноудалена от точек A и C.

8. Квадрат и прямоугольник одинакового периметра имеют общий угол. Докажите, что точка пересечения диагоналей прямоугольника лежит на диагонали квадрата.

9. Докажите, что ГМТ, сумма квадратов расстояний от которых до двух данных точек, удаленных друг от друга на расстояние $2b$, равна $2a^2$, есть окружность ($a > b$).

10. На плоскости даны прямая и не лежащая на ней точка. Найдите ГМТ, равноудаленных от данной прямой и данной точки.

11. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 4y = 26, \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 - 20x - 10y + 125} = 10. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения.

12. В квадрат $ABCD$ вписана окружность единичного радиуса. Докажите, что для любой точки M этой окружности выполнено равенство $MA^2 + MC^2 + MB^2 + MD^2 = 12$.

13. Боковые стороны трапеции перпендикулярны. Докажите, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов оснований.

14. Диаметры AB и CD окружности перпендикулярны. Хорда EA пересекает диаметр CD в точке K, хорда EC пересекает диаметр AB в точке L. Известно, что $CK = 2KD$. Докажите, что $AL = 3LB$.

15. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC построен квадрат $ABDE$ так, что вершина C находится вне квадрата. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = \sqrt{13}$, а расстояние от центра квадрата до вершины C равно 3.

16. В трапеции $ABCD$ основания AB и CD имеют соответственно длины 5 и 3. Боковая сторона AD перпендикулярна основанию. На основании CD, как на диаметре, построена окружность, которая пересекает диагонали AC и BD в точках F и E. Известно, что E — середина отрезка BD. Определите, в каком отношении точка F делит отрезок AC.

17. Точка $B \in AC$, причем $AB = 14$ см, $BC = 28$ см. На отрезках AB, BC, AC как на диаметрах, построены в одной полуплоскости с границей AC полуокружности. Найдите радиус окружности, касающейся всех трех полуокружностей.

Метод Штурма. 10 июля.

0. a) У прямоугольного треугольника гипотенуза равна 1. Какое наибольшее значение может принимать его площадь? b) Как представить данное положительное число в виде суммы трех положительных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим?

1. a) Как изменяется произведение двух чисел с постоянной суммой при их сближении?

b) Как изменяется сумма двух чисел с постоянным произведением при их сближении?

c) Как изменяется сумма квадратов двух чисел с постоянной суммой при их сближении?

d) Как изменяется сумма обратных величин двух чисел с постоянным произведением при их сближении?

Основная идея метода Штурма. *Измененять две переменные (из-за этого метод Штурма упрощает многие неравенства из нескольких переменных) так, чтобы из одной части неравенства получилась другая и вдобавок к этому всегда изменяемая часть изменялась в одну, нужную нам, сторону (или увеличивалась, или уменьшалась). Обычно этого удается достичь изменяя два числа с постоянной суммой или произведением.*

2. Докажите, что если произведение положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равно 1, то $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n$.

3. Докажите, что если сумма положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна 1, то $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant \frac{1}{n}$.

4. a) Когда произведение n неотрицательных чисел с постоянной суммой достигает наибольшего значения? b) Для неотрицательных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ докажите, что

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

5. Для неотрицательных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ докажите, что

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}.$$

6. Для неотрицательных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ докажите, что

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}.$$

7. Известно, что $0 \leqslant x \leqslant 1$. При каком значении x значение выражения $x(1-x)^{2014}$ максимально?

8. Известно, что $a + b + c + d = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{1+4a} + \sqrt{1+4b} + \sqrt{1+4c} + \sqrt{1+4d} \leqslant 4 \cdot \sqrt{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

9. a) Выясните, как ведет себя сумма $(a + 1/a)^2 + (b + 1/b)^2$ при сближении положительных чисел a и b. b) Докажите, что если сумма n положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна 1, то

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right)^2 + \ldots + \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)^2 \geqslant n\left(n + \frac{1}{n}\right)^2.$$

10. Для положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ докажите, что

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \cdot \ldots \cdot (1 + x_n) \geqslant \left(1 + \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}\right)^n.$$

11. Сумма пложительных чисел x, y и z равна 1. Докажите, что

$$0 \leqslant xy + yz + zx - 2xyz \leqslant 7/27.$$

12. Сумма положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна 1. Докажите, что

$$(1 + x_1)(2 + x_2) \cdot \ldots \cdot (n + x_n) \leqslant 2n!.$$

13. Докажите, что из всех выпуклых n-угольников, вписанных в данную окружность, правильный n-угольник имеет a) наибольшую площадь; b) наибольший периметр.

Перестановки. 11 июля.

Определение. *Перестановкой* на некотором конечном множестве M будем называть некоторый способ поменять элементы этого множества местами, то есть взаимно однозначное отображение $\pi\colon M \to M$ множества M на себя. *Тождественная перестановка* — та, которая ничего не переставляет.

Мы будем рассматривать только ситуацию, когда M состоит из натуральных чисел $1, 2, \ldots, n$. Множество всех перестановок множества M будем обозначать через S_n. Перестановке $\pi \in S_n$ мы сопоставим табличку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Определение. *Произведением* перестановок a и b называется их композиция как отображений и обозначается как $a \cdot b = a \circ b$.

Произведение перестановок выполняется, как и композиция отображений, справа налево

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Утверждение. В S_n есть единичный элемент e со свойством: $e \cdot x = x \cdot e = x$ для любого $x \in S_n$; для любого $x \in S_n$ есть $y \in S_n$, что $x \cdot y = y \cdot x = e$, и операция умножения ассоциативна.

1. Найдите произведения *a*) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; *c*) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Запишите все перестановки на множестве из трех элементов. Сколько существует перестановок на множестве из n элементов?

3. Для произвольной перестановки выпишите обратную к ней в явном виде.

4. Доказать, что при $n > 2$ множество S_n некоммутативно, то есть найти две такие перестановки a и b, что $a \cdot b \neq b \cdot a$.

Определение. Перестановка называется *циклической* (или просто циклом), если она сдвигает некоторые элементы по кругу, а остальные оставляет неподвижными. Два цикла называются *независимыми*, если никакой элемент не сдвигается и первой, и второй перестановкой одновременно. Цикл c для краткости принято обозначать строкой $c = (i_1 i_2 \ldots i_r)$, где $i_2 = c(i_1)$, $i_3 = c(i_2)$,..., $i_1 = c(i_r)$. Число r называется *длиной* цикла.

5. Докажите, что любая неединичная перестановка однозначно с точностью до перестановки множителей разлагается в произведение независимых циклов.

6. Докажите, что любой цикл является произведением циклов длины два.

Определение. Циклы длины два называются *транспозициями.*

7. Докажите, что каждая перестановка может быть представлена в виде произведения транспозиций. Единственно ли такое разложение? Верно ли, что любая перестановка представляется в виде произведения независимых транспозиций?

Определение. Транспозиция называется *элементарной*, если она меняет местами два элемента, которые стоят на соседних местах.

8. Разложите перестановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ в произведение элементарных транспозиций.

9. Докажите, что любую перестановку можно разложить в произведение элементарных транспозиций.

Задачи для самостоятельного решения.

10. Двадцать школьников решали 20 задач. Известно, что каждую из задач решили 2 школьника и каждый школьник решил по две задачи. Доказать, что можно так организовать разбор задач, что каждый школьник расскажет по одной задаче и каждая задача будет рассказана ровно один раз.

11. Оля написала на карточках числа от 1 до n и разложила карточки в некотором порядке. Она умеет менять местами две самые левые карточки, а также переставлять самую правую карточку в левый конец. Всегда ли она сможет выставить карточки в порядке возрастания?

12. В отряде восьмого класса разрешены только парные обмены задачами, и каждый ученик может совершить только один обмен в день. Докажите, что любой сложный обмен (при котором каждый ученик отдает одну задачу и получает одну задачу) можно совершить за два дня.

13. Пусть f — перестановка из n элементов. Пусть k — наименьшее число такое, что $f \circ f \circ \ldots \circ f$ (k раз) — тождественное отображение. Докажите, что a) $n!$; b) $[1, 2, \ldots, n]$ делится на k.

Поворот. 11 июля.

Определение. Поворотом вокруг точки O (называемой центром поворота) на угол α называется преобразование плоскости, которое каж-

дую точку M отображает на такую точку M_1, что $OM = OM_1$, и $\angle MOM_1 = \alpha$, причем вращение происходит против часовой стрелки.

1. Докажите, что композиция двух осевых симметрий является либо поворотом, либо параллельным переносом.

2. Докажите, что при повороте на угол α один из углов между прямой и ее образом равен углу α.

3. Пусть M и K — середины сторон CD и DE правильного шестиугольника $ABCDEF$.

a) Найдите угол между прямыми AM и BK.

b) Пусть AM пересекается с BK в точке N. Докажите, что площади треугольника ANB и четырехугольника $MDKN$ равны.

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены соответственно квадраты $ABPQ$ и $BCMN$, причем квадрат $ABPQ$ и треугольник ABC находятся в разных полуплоскостях от прямой AB, а квадрат $BCMN$ — в одной полуплоскости с этим треугольником относительно прямой BC. Докажите, что отрезки PN и AC равны и перпендикулярны.

5. Две равные окружности пересекаются в точках A и B. Доказать, что прямая, соединяющая произвольную точку одной окружности с ее образом при повороте около точки A, отображающем эту окружность на другую, проходит через точку B.

6. В окружность вписаны два равносторонних треугольника ABC и DEF, стороны которых пересекаются в шести точках: K, L, M, N, P и R так, что точки M и K лежат на отрезке AB, точки N и L — на отрезке BC, а точки P и R — на отрезке CA, причем именно в таком порядке. Докажите, что треугольники MNP и KLR равносторонние.

7. Точка B лежит между A и C. Правильные треугольники ABM и BCP построены в одной полуплоскости от прямой AB. Точки K и E — середины отрезков AP и MC. Доказать, что треугольник BKE правильный.

8. Постройте равносторонний треугольник с вершиной в данной точке так, чтобы вторая вершина принадлежала данной прямой, а третья — данной окружности.

9. На сторонах AB и AC треугольника ABC вне его построены квадраты $ABDE$ и $ACPQ$. Докажите, что медиана AK треугольника ABC перпендикулярна QE и $2AK = QE$.

Задачи для самостоятельного решения.

10. Шестиугольник $ABCDEF$ правильный, K и M — середины от-

резков BD и EF. Докажите, что треугольник AMK правильный.

11. На сторонах CB и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K так, что периметр треугольника CMK равен удвоенной стороне квадрата. Найдите величину угла MAK.

12. На стороне $CD = 1$ квадрата $ABCD$ во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник CND, а на диагонали AC — равносторонний треугольник AMC так, что точка D лежит внутри него. Найдите MN.

13. Внутри квадрата $ABCD$ взята произвольная точка P. Через вершины A, B, C, D проведены перпендикуляры к прямым PB, PC, PD, PA соответственно. Докажите, что эти перпендикуляры пересекаются в одной точке.

14. На сторонах AB и BC треугольника ABC вне его построены квадраты $ABMN$ и $BCPQ$. Доказать, что центры этих квадратов и середины отрезков AC и MQ являются вершинами квадрата.

Матбой. 12 июля.

1. Даны две окружности, каждая из которых проходит через центр другой. Через точку пересечения окружностей проведена прямая, пересекающая их вторично в точках M и N. Докажите, что угол между касательными к окружностям в точках M и N равен $60°$.

2. Какое наименьшее число королей можно расставить на белых полях шахматной доски 8×8 таким образом, чтобы они побили все свободные поля?

3. На тетрадный лист площади 1 Рома поставил пять клякс, площадь каждой из которых не меньше $\frac{1}{2}$. Докажите, что найдутся две кляксы, площадь общей части которых не меньше $\frac{3}{20}$.

4. Оля заменяет звездочки в выражении

$$\frac{\star}{2^1} + \frac{\star}{2^2} + \frac{\star}{2^3} + \ldots + \frac{\star}{2^{n-1}} + \frac{\star}{2^n}$$

числами 1, 2, …, n, используя каждое ровно один раз. Какое наибольшее целое число она может при этом получить?

5. Пусть M_1, M_2, …, M_6 — середины сторон A_1A_2, A_2A_3, …, A_6A_1 выпуклого шестиугольника $A_1A_2 \ldots A_6$. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны отрезкам M_1M_4, M_2M_5 и M_3M_6.

6. Решите в натуральных числах уравнение $(n+1)^n = 2n^k + 3n + 1$.

7. Северус Снейп решил переставить по-новому свои 26 склянок, стоящих в круглом подземелье Хогвартса. Однако он хочет, чтобы за один

раз менялись местами только две склянки, стоящие рядом, причём это не должны быть склянки, надписи на которых начинаются на соседние буквы алфавита. (Склянки подписаны словами, начинающимися на различные буквы латинского алфавита.) Кроме того, ему важно лишь взаимное расположение склянок, и два расположения, отличающиеся поворотом круга, он считает одинаковыми. Доказать, что как бы сначала ни стояли склянки, профессор может по этим правилам добиться любого нового их расположения.

8. Через точку A окружности с радиусом 10 проведены две взаимно перпендикулярные хорды AB и AC. Вычислите радиус окружности, касающейся данной окружности и построенных хорд, если $AB = 16$.

Перестановки-2. 14 июля.

1. На книжной полке в библиотеке стоит собрание сочинений, состоящее из 2014 томов. В библиотеке работает комиссия. Если она обнаруживает пару томов на полке, расположенную так, что том с меньшим номером из этой пары стоит правее тома с большим номером, то за каждую такую пару библиотекарь получает выговор.

a) Сколько выговоров получит библиотекарь, если все тома будут расположены в обратном порядке?

b) При некоторой расстановке книг библиотекарь получил некоторое количество выговоров. Можно ли так переставить две книги, чтобы число выговоров увеличилось на 100?

c) Библиотекарю удалось расставить два экземпляра этого собрания сочинений в правильном порядке. В библиотеку забрались два хулигана. Каждый из них каждую секунду переставляет какие-нибудь две книги на своей полке. Может ли оказаться так, что у первого из них через 100 секунд книги будут расставлены точно так же, как у второго через 99 секунд?

d) Докажите, что книги можно расставить так, что библиотекарь получит ровно миллион выговоров.

Определение. Говорим, что в перестановке пара чисел i, j образует *инверсию*, если большее их этих чисел встречается раньше меньшего во второй строчке перестановки. Перестановка называется *чётной*, если число инверсий в ней чётно, и *нечётной* в противном случае.

2. Пусть a и b — циклические перестановки из 4 элементов, $a = (1234)$, $b = (143)$. Какие из следующих перестановок чётны, а какие нечётны:
a) a; b) b; c) $b^2 = b \cdot b$; d) $b^3 = b \cdot b \cdot b$; e) ab; f) ba?

3. Докажите, что умножение на транспозицию меняет чётность перестановки. Сохраняется или меняется чётность числа инверсий в перестановке при умножении на неё цикла длины 3; цикла длины 4; цикла длины n?

Определение. Перестановка называется *чётной*, если её можно представить в виде произведения чётного числа транспозиций, и *нечётной*, если её можно представить в виде произведения нечётного числа транспозиций.

4. Докажите, что второе определение чётности корректно и эквивалентно первому.

5. Докажите, что композиция перестановок одинаковой чётности есть чётная перестановка, а композиция перестановок разной чётности — нечётная.

6. Разрешается прыгать буквой через две соседние вправо или влево (например, из ИКС сделать КСИ). Можно ли с помощью таких операций превратить

a) ГОРБ в ГРОБ;

b) АВТОР в ОТВАР;

c) АПЕЛЬСИН в СПАНИЕЛЬ?

Задачи для самостоятельного решения.

7. Каких перестановок из n элементов больше: чётных или нечётных?

8. 123 машины стартовали из разных точек и целый день ездили по кругу. Вечером каждая оказалась на том же месте, откуда стартовала. Докажите, что было совершено чётное число обгонов.

9. Игра «15». В квадрат 4×4 кладут 15 фишек, на которых написаны числа от 1 до 15. Одна клетка при этом остаётся пустой. Можно двигать на пустую клетку соседнюю по стороне фишку. Докажите, что таким образом из первой конфигурации никак нельзя получить вторую.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

10. Докажите, что из любого расположения фишек можно, соблюдая правила игры, получить либо первую, либо вторую конфигурацию из предыдущей задачи.

Скалярное произведение векторов. 14 июля.

Определение. *Скалярным произведением* двух векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ называется произведение длины одного вектора на проекцию другого вектора на прямую, параллельную первому вектору (нулевой вектор считается параллельным любой прямой) и бозначается $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ или $\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle$.

Утверждение 1. Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно произведению их длин на косинус угла между ними. Скалярное произведение вектора на нулевой вектор равно нулю.

Утверждение 2. Свойства скалярного произведения

(1) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2$;

(2) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$;

(3) $(\lambda \cdot \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = \lambda \cdot (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})$;

(4) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}$;

(5) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$, где $|\overrightarrow{a}|, |\overrightarrow{b}| \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$.

Определение. Любая пара $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ неколлинеарных векторов на плоскости называется *базисом.*

Определение. Если $\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2}$, то базис называется *ортогональным.*

Определение. Если $\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2}$ и $|\overrightarrow{e_1}| = |\overrightarrow{e_2}| = 1$, то базис называется *ортонормированным.*

Утверждение 3. Если на плоскости задан базис $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, то всякий вектор $\overrightarrow{v}$ может быть разложен по этому базису единственным способом. То есть, для любого $\overrightarrow{v}$ существует пара вещественных чисел $(v_1; v_2)$ такая, что $\overrightarrow{v} = v_1\overrightarrow{e_1} + v_2\overrightarrow{e_2}$, причем такая пара единственна.

Определение. Коэффициенты в разложении вектора по базису $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ называются *координатами* вектора в базисе $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

1. Докажите, что если в ортонормированной системе координат даны два вектора $\overrightarrow{u}(u_1; u_2)$ и $\overrightarrow{v}(v_1; v_2)$, то $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1v_1 + u_2v_2$.

2. Выразите координаты вектора $\overrightarrow{v}$ в ортонормированном базисе $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ через скалярные произведения $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{e_1}$ и $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{e_2}$.

3. Вычислите $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AB}$, если $|AB| = 3$.

4. Даны векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Докажите, что вектор $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ тогда и только тогда, когда $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}|$.

5. Пусть $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$. Выразите $|\overrightarrow{c}|^2$ через $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Докажите теорему косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

6. Докажите что $\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$.

7. Докажите следующие формулы

a) $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$;

b) $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$;

c) $\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$.

8. Один из углов параллелограмма равен $45°$. Докажите, что сумма четвертых степеней двух его соседних сторон равна произведению квадратов диагоналей.

9. Найдите угол между ненулевыми векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$, если $|\overrightarrow{a}| = 2|\overrightarrow{b}|$ и вектор $2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}$.

10. Векторы $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ удовлетворяют условию $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$. Вычислите $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} + \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a}$, если $|\overrightarrow{a}| = 3$, $|\overrightarrow{b}| = 4$ и $|\overrightarrow{c}| = 5$.

Задачи для самостоятельного решения.

11. В треугольнике ABC проведены медианы AK, BE и CM. Докажите, что $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$.

12. В треугольнике ABC выполнено $AC^2 + BC^2 = 5AB^2$. Докажите, что медианы AK и BM перпендикулярны.

13. Докажите, что в четырёхугольнике диагонали перпендикулярны тогда и только тогда, когда равны суммы квадратов его противоположных сторон.

14. a) Докажите, что для любых четырёх точек плоскости A, B, C, H имеет место равенство $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BH} = 0$.

b) Докажите, что высоты в треугольнике пересекаются в одной точке.

15. Докажите, что для всякого треугольника ABC справедливо неравенство

$$\cos\angle A + \cos\angle B + \cos\angle C \leqslant \frac{3}{2}.$$

Тригонометрическая форма комплексных чисел. 15 июля.

Поскольку комплексное число представляет из себя пару вещественных чисел, ему можно взаимно однозначно сопоставить точку на декартовой плоскости с координатами $(\mathrm{Re}z; \mathrm{Im}z)$. *Расстояние от точки z до начала координат обозначается $|z|$ и называется модулем z.*

0. Докажите, что $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где φ — угол между отрезком,

соединяющим начало координат с точкой z и положительным направлением оси $\mathrm{Re}z$.

Такая форма записи комплексного числа называется *тригонометрической формой записи.*

1. Докажите, что a) $|z|^2 = z \cdot \overline{z} = (\mathrm{Re}z)^2 + (\mathrm{Im}z)^2$; b) $|\overline{z}| = |z|$; c) $|z| \cdot |w| = |z \cdot w|$; d) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$.

2. Докажите, что если два натуральных числа представляются в виде суммы двух квадратов, то их произведение также представляется в виде суммы двух квадратов.

3. Представьте в тригонометрической форме следующие комплексные числа: a) i; b) $1 + i$; c) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; d) $\sqrt{3} + i$; e) $\frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi}$.

4. Докажите, что при произведении комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются «по модулю 2π»:

Если $z = a(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = b(\cos\omega + i\sin\omega)$, то

$$zw = ab(\cos(\varphi + \omega) + i\sin(\varphi + \omega)).$$

5. Найдите представление z^{-1} в тригонометрической форме.

6. Формула Муавра. Докажите, что для любого целого n

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

7. Вычислите a) $(1 - \sqrt{3}i)^{2007}$; b) $(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)^{100}$; c) $(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)^{312}$.

Задачи для самостоятельного решения.

8. Решите в комплексных числах уравнение $z^n = 1$.

9. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ — все корни степени k из единицы. Найдите $\varepsilon_1^n + \varepsilon_2^n + \ldots + \varepsilon_k^n$.

10. Вычислите

a) $(1 + \cos\varphi + i\sin\varphi)^n$;

b) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos(n-1)\alpha$.

11. Докажите, что

a) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$;

b) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots = \sqrt{2^n}\sin(\pi\frac{n}{4})$.

12. Вычислите

a) $C_{100}^0 - C_{100}^2 + C_{100}^4 - \ldots + C_{100}^{100}$;

b) $C_{99}^1 - C_{99}^3 + C_{99}^5 - \ldots - C_{99}^{99}$.

Свойства движений. 15 июля.

Определение. *Движением* плоскости называется преобразование плоскости, сохраняющее расстояние.

0. Докажите, что всякое отображение плоскости, сохраняющее расстояние является движением.

1. Докажите, что a) композиция двух движений — движение; b) отображение, обратное к движению — тоже движение.

2. Найдите композицию: a) двух параллельных переносов; b) двух поворотов вокруг общего центра; c) двух центральных симметрий.

3. Докажите, что композиция трёх симметрий относительно параллельных прямых ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 есть осевая симметрия.

4. Докажите, что композиция симметрий относительно n параллельных прямых $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ есть: a) параллельный перенос, если n чётно; b) осевая симметрия, если n нечётно.

5. Докажите, что композиция двух поворотов на углы в сумме не кратные 360° является поворотом. В какой точке находится его центр и чему равен угол этого поворота? Рассмотрите случай, когда сумма углов кратна 360°.

Определение. Назовем треугольник ABC *положительно ориентированным (отрицательно ориентированным)*, если перемещение по его контуру $A \to B \to C \to A$ происходит против часовой стрелки (по часовой стрелке).

6. Сохраняют или меняют ориентацию треугольника перенос, поворот, осевая симметрия, композиция двух осевых симметрий, композиция осевой симметрии и переноса?

Можно показать, что всякое движение либо сохраняет направление ориентации всех треугольников, либо меняет его. В первом случае говорят, что оно сохраняет ориентацию плоскости, во втором — что оно меняет ориентацию плоскости.

7. Докажите, что композиция чётного числа осевых симметрий не может равняться композиции нечётного числа осевых симметрий.

Определение. Если движение представляется в виде композиции четного (нечетного) числа осевых симметрий, оно называется *четным (нечетным)*.

8. Объясните, почему определение корректно. ❀

9. Докажите, что движение сохраняет ориентацию плоскости тогда и только тогда, когда оно четное, и меняет ориентацию плоскости тогда и только тогда, когда оно нечетное.

10. Докажите, что a) если два движения совпадают в точках A и B, то они совпадают в каждой точке прямой AB; b) если два движения совпадают в трех точках, не лежащих на одной прямой, то они совпадают во всех точках плоскости.

Задачи для самостоятельного решения.

11. Даны прямая ℓ и точка O на ней. Докажите, что композиция поворота вокруг точки O на угол 2α и симметрии относительно прямой ℓ есть симметрия относительно прямой, проходящей через точку O и составляющей с прямой ℓ угол α.

12. Докажите, что не существует такого движения D, что $D \circ D$ — осевая симметрия.

13. Существует ли фигура, не имеющая ни осей симметрии, ни центров симметрии, но переходящая в себя при некотором повороте?

14. Существует ли фигура, имеющая ровно две оси симметрии, но не имеющая центра симметрии?

15. Существуют фигуры, имеющие бесконечное множество центров симметрии (например, полоса между двумя параллельными прямыми). Может ли фигура иметь более одного, но конечное число центров симметрии?

Неравенство Коши–Буняковского–Шварца. 16 июля.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ — вещественные числа. Тогда

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right) \geqslant \left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right)^2.$$

1. a) Докажите, что $\left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right) \geqslant \left(a_1b_1 + a_2b_2\right)^2$.

b) Раскрыв скобки и воспользовавшись пунктом a), докажите КБШ.

2. a) Докажите, что

$$\left(b_1^2 + \ldots + b_n^2\right)t^2 + 2\left(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n\right)t + \left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right) \geqslant 0.$$

b) Выведите из пункта a) КБШ.

3. Докажите, что

$$\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

4. Докажите, что если $a + 2b + 3c \geqslant 14$, то $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 14$.

5. Докажите, что если $|a| \leqslant 1$ и $|b| \leqslant 1$, то $ab + \sqrt{\left(1 - a^2\right)\left(1 - b^2\right)} \leqslant 1$.

6. Для неотрицательных $b_1, b_2, \ldots, b_n$ докажите, что

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$

7. Докажите, что

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n} \geqslant \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^2.$$

8. Для положительных a, b и c докажите, что

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

9. Докажите, что если $a, b \geqslant c \geqslant 0$, то $\sqrt{ab} \geqslant \sqrt{c(b-c)}+\sqrt{c(a-c)}$.

10. Для положительных a, b, c и d докажите, что

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} \geqslant 2.$$

11. Для положительных x_1, x_2, $\ldots$, x_n, y_1, y_2, $\ldots$, y_n докажите, что

$$(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)\left(\frac{x_1}{y_1}+\ldots+\frac{x_n}{y_n}\right) \geqslant (x_1+x_2+\ldots+x_n)^2.$$

12. Докажите, что если $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=1$, то

$$a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_{n-1}a_n+a_na_1 \geqslant -1.$$

13. Докажите, что

$$\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)^3 \geqslant \left(|a_1^3|+|a_2^3|+\ldots+|a_n^3|\right)^2.$$

Теория чисел. 16 июля.

0. Докажите, что число $(3^n-1)^n-4$ делится на 3^n-4 при любом натуральном n.

1. Пусть p — простое число. Докажите, что

a) C_p^k делится на p при $k=1,2,\ldots,p-1$;

b) $(a+b)^p \equiv a^p+b^p \pmod p$ для любых целых чисел a и b;

c) $2^p \equiv 2 \pmod p$;

d) $a^p \equiv a$ для любого натурального a;

e) **Малая теорема Ферма.** $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ для любого целого числа a, не делящегося на p.

2. Найдите остатки от деления 100^{18}, 100^{21} и 100^{100} на 19.

3. Известно, что $a^{12}+b^{12}+c^{12}+d^{12}+e^{12}+f^{12}$ делится на 13. Докажите, что $abcdef$ делится на 13^6.

4. Докажите, что $3^{3000} - 1$ делится на 1001.

5. Пусть p и q — различные простые числа. Докажите, что

$$p^q + q^p \equiv p + q \pmod{pq}.$$

6. Докажите, что число $30^{239} + 239^{30}$ — составное.

7. Докажите, что если p — простое число, $p > 2$, то

a) В каждой строке таблицы умножения остатков по модулю p встречается ровно одна единица.

b) Единица может стоять на диагонали только в первой и последней строках.

c) Числа 2, 3, 4, ..., $p-3$, $p-2$ можно разбить на пары так, что произведение чисел в каждой паре будет сравнимо с единицей по модулю p.

d) **Теорема Вильсона.** $(p-1)! \equiv p-1 \pmod{p}$.

e) Докажите, что если $(n-1)!+1$ делится на n, то n — простое число.

8. Найдите остаток числа $(2p-1)!$ от деления на p^2, где число p простое.

9. Выведите из малой теоремы Ферма, что при натуральном a число a^2+1 не имеет a) простых; b) натуральных делителей вида $4k+3$.

10. Теорема Жирара. Докажите, что если число a^2+b^2 (a, b — целые) делится на простое число вида $4k+3$, то a и b также делятся на это простое число.

Задачи для самостоятельного решения.

11. Пусть p — простое число, большее 5. Докажите, что $11111\ldots11$ ($p-1$ единица) делится на p.

12. Докажите, что простых чисел вида $4k+1$ бесконечно много.

13. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трёх a) квадратов; b) кубов.

14. Теорема Клемента. Докажите, что числа p и $p+2$ являются простыми числами-близнецами тогда и только тогда, когда

$$4((p-1)!+1) + p \equiv 0 \pmod{p^2+2p}.$$

Матбой 7 – 8 классы. 17 июля.

1. В квадрате со стороной 1 лежат пять непересекающихся квадратов со сторонами, параллельными сторонам большого квадрата. Докажите, что сумма их периметров не превосходит 10.

2. В некотором клубе состоит 100 джентльменов, у каждого из которых не более трёх знакомых в этом клубе. Среди любых четырёх

джентльменов какие-то двое незнакомы. Докажите, что из клуба можно исключить 33 джентльмена таким образом, чтобы из любых троих оставшихся в клубе джентльменов какие-то двое не были знакомы.

3. В Эрафии водятся Лазурные, Кристаллические, Ржавые и Сказочные драконы. Известно, что Лазурный сильнее Кристаллического, Кристаллический — Ржавого, а Ржавый — Сказочного. Два героя набрали себе по 100 драконов каждый. Если первый будет составлять пары сражающихся драконов, то сможет гарантировать себе n побед. Столько же побед сможет гарантировать себе второй герой, если составлять пары будет он. Найдите наибольшее значение n.

4. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде $p(q-r)$, где p, q, r — простые числа.

5. Известно, что a, b и $(a+b)/(a-b)$ — целые числа, а дробь a/b несократима. Докажите, что либо $ab+1$, либо $4ab+1$ — квадрат целого числа.

6. Клетки таблицы 100×100 покрашены в красный и синий цвет. Известно, что если в строке есть хотя бы одна синяя клетка, то ровно половина клеток этой строки — красные, а если в столбце есть хотя бы одна красная клетка, то ровно половина клеток этого столбца — синие. Докажите, что количество синих клеток в таблице равно количеству красных.

7. Когда в остроугольном треугольнике ABC провели высоты AD и BE, оказалось, что $S_{BDE} \leqslant S_{DEA} \leqslant S_{EAB} \leqslant S_{ABD}$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

8. Существует ли четырехугольник у которого можно изменить положение любой вершины, оставив три другие на месте, так, чтобы получившиеся четыре точки служили бы вершинами четырехугольника, равного исходному?

Матбой 8 – 9 классы. 17 июля.

1. В шахматном турнире 30 игроков играют в один круг. У какого наибольшего числа шахматистов после окончания турнира могло оказаться ровно 5 очков? (Победа — 1 очко, ничья — 0,5 очка, поражение — 0.)

2. Докажите неравенство $a^2+b^2+c^2+2abc<2$; если a, b, c — стороны треугольника с периметром 2.

3. В клетках таблицы 100×100 расставлены ненулевые целые числа. Если в какую-нибудь клетку доски поставить ладью, то сумма чисел, стоящих в клетках, которые она бьет, в k раз больше числа, на котором

ладья стоит. При этом k принимает одно и то же значение для всех клеток таблицы. Найдите все возможные значения k.

4. Имеются натуральные числа от 1 до 1000. Сколько чисел из этого набора могут быть представлены в виде разности квадратов двух натуральных чисел?

5. В треугольнике ABC угол B равен $60°$. Биссектрисы AK и CE пересекаются в точке O. Докажите, что $OK = OE$.

6. Известно, что $(a, b, c) = 1$ и $1/a - 1/b = 1/c$. Докажите, что abc — точный квадрат.

7. Петя и Вася играют на графе в такую игру. Петя встаёт в одну из вершин, после чего Вася встаёт в какую-нибудь другую вершину. После этого они распределяют между собой остальные вершины по правилу: вершину забирает тот, кому нужно пройти меньшее количество ребер графа, чтобы оказаться в ней. Если эти количества равны, то вершина не достаётся никому. Существует ли граф, играя на котором, Вася может гарантированно получить в конце игры более половины вершин графа?

8. В треугольнике ABC на продолжении стороны CB за точку B отложили точку D такую, что $AB = BD$. Пусть M — середина стороны AC. Биссектриса угла ABC пересекается с прямой DM в точке P. Докажите, что угол BAP равен углу ACB.

Направленные углы. 17 июля.

Определение. *Направленным углом* между прямыми a и b называется угол, при повороте на который в положительном направлении прямая a переходит в прямую, параллельную b или совпадающую с b. Направленный угол между прямыми a и b обозначается $\angle(a, b)$. Он определен с точностью до кратного $180°$.

Свойства направленных углов.

1. Для любой прямой a выполнено $\angle(a, a) = 0$.
2. Для любых прямых a, b и c условия ($\angle(a, b) = \angle(a, c)$ и $b \parallel c$) равносильны.
3. Для любых прямых a и b выполнено $\angle(a, b) = -\angle(b, a)$.
4. Для любых прямых a, b и c выполнено $\angle(a, b) + \angle(b, c) = \angle(a, c)$.

Теорема.

1. Точки A, B, C, D лежат на одной прямой либо на одной окружности тогда и только тогда, когда $\angle(AB, BC) = \angle(AD, DC)$;

2. Прямая ℓ, проходящая через точку A, является касательной к описанной окружности треугольника ABC тогда и только тогда, когда $\angle(AB, BC) = \angle(\ell, AC) = \angle(AA, AC)$.

0. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $\angle(AB, BC) = \angle(A_1B_1, B_1C_1)$ и $\angle(BC, CA) = \angle(B_1C_1, C_1A_1)$. Тогда они подобны.

0′. Если $AB = BC$, то $\angle(BA, AC) = \angle(AC, CB)$ и наоборот.

1. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $\angle(AB, BC) + \angle(CA, AO) = 90°$.

2. На стороне AB равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) выбрана точка D. Через точку D провели касательную к описанной окружности треугольника ADC. Она пересекла описанную окружность треугольника BDC в точке M. Докажите, что $BM \parallel AC$.

3. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Описанные окружности треугольников AB_1C_1 и BC_1A_1 вторично пересекаются в точке P. Докажите, что точки C, A_1, B_1 и P лежат на одной окружности.

4. Две окружности пересекаются в точках M и K. Через M и K проведены прямые AB и CD соответственно, пересекающие первую окружность в точках A и C, вторую в точках B и D. Докажите, что прямая AC параллельна прямой BD.

5. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Прямая O_1A вторично пересекает вторую окружность в точке P. Докажите, что точки O_1, O_2, B и P лежат на одной окружности.

6. Прямая Симсона. Даны треугольник ABC и точка P. Пусть A_1, B_1 и C_1 — основания перпендикуляров, опущеных из точки P на прямые BC, AC и AB соответственно. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, тогда и только тогда, когда точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC.

7. a) **Точка Микеля.** На плоскости даны 4 прямые общего положения. Докажите, что описанные окружности четырех образованных ими треугольников имеют общую точку.

b) Точки A, B, C, D лежат на одной окружности. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые BC и DA — в точке F. Докажите, что точка Микеля прямых AB, BC, CD и DA лежит на прямой EF.

Теорема Шаля. 19 июля.

1. Докажите, что a) если два движения совпадают в точках A и B, то они совпадают в каждой точке прямой AB; b) если два движения совпадают в трех точках, не лежащих на одной прямой, то они совпадают во всех точках плоскости.

2. Докажите, что a) всякий треугольник можно перевести во всякий равный ему композицией не более, чем трех осевых симметрий; b) всякое движение плоскости является композицией не более, чем трех осевых симметрий.

3. Докажите, что композиция осевой симметрии с осью ℓ и переноса на вектор $\overrightarrow{p} \perp \ell$, является осевой симметрией с осью $m \parallel \ell$.

4. Докажите, что всякое движение, сохраняющее ориентацию плоскости, является композицией двух осевых симметрий и, следовательно, переносом или поворотом.

5. Докажите, что всякий перенос можно представить в виде композиции двух осевых симметрий с параллельными осями, перпендикулярными направлению переноса, а всякий поворот — в виде композиции двух осевых симметрий с осями, пересекающимися в центре поворота, причем в качестве первой оси можно взять произвольную прямую, перпендикулярную вектору переноса (проходящую через центр поворота), а вторая прямая получается из нее переносом на половинный вектор (поворотом на половинный угол).

6. Докажите, что композиция осевой симметрии и переноса на ненулевой вектор, параллельный оси симметрии, не является ни переносом, ни поворотом, ни осевой симметрией.

Определение. Движение, описанное в задаче 6, называется *скользящей симметрией.*

7. Докажите, что композиция осевой симметрии и переноса на вектор, не перпендикулярный оси, есть скользящая симметрия.

8. Докажите, что композиция осевой симметрии и поворота есть осевая или скользящая симметрия.

9. Докажите, что всякое движение, меняющее ориентацию плоскости, есть осевая или скользящая симметрия.

10. Теорема Шаля. Все движения плоскости — это переносы, повороты, осевые и скользящие симметрии.

Мультипликативные функции. 19 июля.

Определение. Функция $\theta(a)$, определенная для всех натуральных чисел a и не обращающаяся в нуль хотя бы при одном таком a, называется *мультипликативной*, если для любых взаимно простых $a, b \geqslant 1$ имеет место равенство $\theta(ab) = \theta(a)\theta(b)$.

0. Докажите, что $\theta(1) = 1$.

Пусть $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа a на простые множители.

1. a) Докажите, что функция $d(a)$ (число делителей числа a) является мультипликативной.

b) Докажите, что $d(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$.

2. Пусть $\theta(a)$ — мультипликативная функция. Докажите, что

$$\sum_{d|a} \theta(d) = (1 + \theta(p_1) + \ldots + \theta(p_1^{\alpha_1})) \cdot \ldots \cdot (1 + \theta(p_k) + \ldots + \theta(p_k^{\alpha_k}))\,,$$

где суммирование в левой части распространяется на все делители d числа a.

3. Для всякой мультипликативной функции $\theta(a)$ определим функцию

$$\Theta(a) = \sum_{d|a} \theta(d).$$

a) Докажите, что функция $\Theta(a)$ нетривиальна, то есть не обращается в нуль хотя бы при одном a;

b) пользуясь задачей 2, вычислите $\Theta(mn), \Theta(m), \Theta(n)$, где $(m, n) = 1$;

c) докажите, что функция $\Theta(a)$ также является мультипликативной.

Полагая $\theta(a) = a^s$, где s — произвольный параметр, получаем тождество

$$\sigma_s(a) = \sum_{d|a} d^s = (1 + p_1^s + p_1^{2s} + \ldots + p_1^{\alpha_1 s}) \cdot \ldots \cdot (1 + p_k^s + p_k^{2s} + \ldots + p_k^{\alpha_k s}).$$

4. Подобрав подходящие s, выведите для числа a формулу для

a) числа его делителей $d(a)$;

b) суммы его делителей $\sigma(a)$.

Докажите, что эти функции мультипликативны.

Определение. Функция Эйлера $\varphi(a)$ определяется для каждого натурального a как количество чисел ряда 0, 1, 2, …, $a - 1$, взаимно простых с a.

5. a) Найдите $\varphi(p)$, где p — простое;

b) найдите $\varphi(p^\alpha)$, где $\alpha \geqslant 2$;

c) докажите, что функция Эйлера мультипликативна;
d) докажите, что имеет место формула

$$\varphi(a) = a\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}) \cdot \ldots \cdot (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}).$$

Упражнение. Вычислите $\varphi(625)$, $d(72)$, $\sigma(100)$.

Задачи для самостоятельного решения.

6. Решите уравнения: a) $\varphi(5^x) = 100$; b) $\varphi(3^x 5^y) = 600$.

7. Для каких n возможны равенства:
a) $\varphi(n) = n - 1$;
b) $\varphi(2n) = 2\varphi(n)$;
c) $\varphi(n^k) = n^{k-1}\varphi(n)$.

8. Для любых m и n докажите, что $\varphi((m,n))\varphi([m,n]) = \varphi(m)\varphi(n)$.

9. Для любых m и n докажите, что $\varphi(mn)\varphi((m,n)) = \varphi(m)\varphi(n)(m,n)$.

10. Натуральное число называют совершенным, если оно равно сумме своих делителей, кроме самого этого числа. Например, число 28 — совершенное: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Докажите, что совершенное число не может быть полным квадратом.

11. Докажите, что если $2^k - 1 = p$ — некоторое простое число Мерсенна, то $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ — совершенное число.

12. Выпишем в ряд все правильные дроби с знаметелем n и сделаем все возможные сокращения. Например, для $n = 12$ получится следующий ряд чисел: $\frac{0}{1}; \frac{1}{12}; \frac{1}{6}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{5}{12}; \frac{1}{2}; \frac{7}{12}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{5}{6}; \frac{11}{12}$.

a) Сколько получится дробей со знаметелем d, если d — некоторый делитель числа n?

b) **Тождество Гаусса.** Докажите равенство $\sum\limits_{d|a} \varphi(d) = a$.

Комплексные числа в геометрии. 20 июля.

1. Постройте все точки, удовлетворяющие критерию:
a) $|z| = 2$; b) $arg(z) = \frac{\pi}{4}$; c) $\dfrac{z}{2+i} \in \mathbb{R}$.

2. Докажите, что четыре точки a, b, c и d являются вершинами параллелограмма тогда и только тогда, когда $a + c = b + d$.

3. Докажите, что три точки z_2, z_1 и z_0 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\dfrac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \dfrac{\overline{z_2} - \overline{z_0}}{\overline{z_1} - \overline{z_0}}$.

4. Докажите, что а) для точек a, b, c, и d, лежащих на окружности $z\overline{z} = 1$, прямые, проходящие через точки a и b, c и d, параллельны при $ab = cd$; b) эти прямые перпендикулярны при $ab + cd = 0$.

5. Напишите уравнение касательной к окружности $z\overline{z} = 1$ в точке p, лежащей на этой окружности.

6. Докажите, что касательные к окружности $z\overline{z} = 1$ в точках a и b пересекаются в точке $\frac{2ab}{a+b}$.

7. Докажите с помощью комплексных чисел, что если O — центр правильного n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$, то $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{0}$.

8. Докажите с помощью комплексных чисел, что сумма квадратов длин всех сторон и всех диагоналей правильного $n-$угольника равна n^2R^2, где R — радиус описанной окружности.

9. Докажите, что длина стороны правильного девятиугольника равна разности длин его наибольшей и наименьшей диагоналей.

Введение в теорию групп. 20 июля.

Определение. Пусть M — некоторое множество. Если каждой упорядоченной паре элементов a и b множества M поставлен в соответствие определённый элемент c этого же множества, то говорят, что на множестве M задана *бинарная операция* $\star$ ($a \star b = c$).

1. Множество M состоит из операций «переодевания носка»:
– оставить всё как есть;
– сними и надень на другую ногу;
– сними, выверни и надень на ту же ногу;
– сними, выверни и надень на другую ногу.

Изначально носок надет на одну ногу, а ног две. Докажите, что операция композиции (т.е. последовательного выполнения действий) является бинарной операцией на множестве M.

Определение. Пусть на множестве M задана бинарная операция $\star$. Множество M относительно данной операции $\star$ называется *группой*, если выполняются следующие условия:

G1. Операция $\star$ ассоциативна, то есть для произвольных элементов a, b и c из множества M верно равенство $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$.

G2. На множестве M существует нейтральный элемент e, относительно операции $\star$, то есть для произвольного элемента a из множества M верны равенства $a \star e = a$ и $e \star a = a$.

G3. Операция $\star$ обратима на множестве M, то есть для каждого элемента a из множества M найдётся элемент b из множества M такой,

что верны равенства $a \star b = e$ и $b \star a = e$.

2. Определите, какие из данных множеств являются группами относительно данной операции:

a) множество целых чисел с операцией сложения;

b) множество нечетных чисел с операцией сложения;

c) множество отображений $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ с операцией композиции отображений;

d) множество $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ с операцией сложения по модулю n;

e) множество $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ с операцией умножения по модулю n;

f) натуральные числа с операцией $a \star b = ab$;

g) множество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с ним, с операцией умножения по модулю n;

h) множество осевых симметрий и поворотов на плоскости с операцией композиции;

i) перестановки из n элеметов;

j) движения на плоскости.

3. Докажите, что в любой группе существует единственный нейтральный элемент.

4. Докажите, что для любого элемента a группы существует единственный обратный элемент (обозначается a^{-1}).

5. Доказать, что в произвольной группе $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Определение. Пусть M — группа с бинарной операцией $\star$. Подмножество K множества M называется *подгруппой* группы M, если оно само является группой относительно той же операции.

6. Верно ли, что: a) если H — подгруппа G, то e принадлежит H; b) объединение двух подгрупп — подгруппа; c) пересечение двух подгрупп — подгруппа?

7. Будет ли подмножество комплексных чисел с модулем, равным 1, относительно операции умножения, подгруппой группы комплексных чисел, отличных от нуля?

8. Перечислите все подгруппы группы целых чисел относительно операции сложения.

Теорема Лагранжа. 21 июля.

Определение. *Порядком* элемента a группы G называют наименьшее натуральное число n такое, что $a^n = e$. Если такого n не существует, то говорят, что порядок a равен нулю.

1. Найдите порядки всех элементов в группе

a) целые числа с операцией сложения;

b) $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ с операцией сложения по модулю p, где p — простое.

2. Докажите, что в конечной группе у любого элемента есть порядок, не равный нулю.

3. Пусть элемент a имеет порядок n. Докажите, что $a^m = e$ тогда и только тогда, когда m делится на n.

Определение. С каждой подгруппой H группы G можно связать множества $aH = \{ah \mid h \in H\}$, где $a \in G$, которые называются *левыми смежными классами* группы G по подгруппе H.

4. Выпишите все левые смежные классы группы G по подгруппе H:

a) G — целые числа по сложению, H — четные числа по сложению;

b) G — целые числа по сложению, $H = \{0\}$.

5. Рассмотрим левые смежные классы группы G по подгруппе H. Докажите, что

a) любой элемент a из группы G есть в классе aH.

b) Если левые смежные классы a_1H и a_2H пересекаются, то они совпадают.

c) Докажите, что $|H| = |aH|$ для любого элемента a из группы G.

6. Теорема Лагранжа. Докажите, что если H — подгруппа конечной группы G, то $|G|$ делится на $|H|$.

7. Докажите, что порядок любого элемента конечной группы H делит $|H|$.

Определение. *Показателем* целого числа a по модулю натурального числа n (при условии, что a и n взаимно просты) называется наименьшее натуральное t такое, что $a^t \equiv 1 \pmod{n}$.

8. a) Докажите, что $a^d \equiv 1 \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда $d \vdots t$.
b) Докажите, что $a^d \equiv a^s \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда $d - s \vdots t$.
c) Докажите, что $\varphi(n)$ делится на t.
d) **Теорема Эйлера.** Докажите, что $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Введение в теорию вероятности. 21 июля.

1. Какова вероятность того, что подброшенные вверх две правильные монеты упадут на одну и ту же сторону?

2. Бросили 2 игральных кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков равна 5?

3. Колоду из 36 карт хорошо перетасовали и вынули из нее одну карту. Найдите вероятности следующих событий

a) $A = \{$вытянули красную масть$\}$;

b) $B = \{$вытянули пику$\}$;
c) $C = \{$вытянули красную пику$\}$;
d) $D = \{$вытянули даму$\}$;
e) $E = \{$вытянули даму пик$\}$.

4. Наудачу выбрано двузначное число. Найдите вероятность того, что оно оказалось a) простым; b) составным; c) кратным пяти; d) взаимно простым с числом 100. (97 — 25-е простое число.)

Определение. *Суммой* событий A и B называется событие $A + B$, наступление которого означает наступление хотя бы одного из событий A и B.

Определение. Два события называются *совместными*, если они могут произойти одновременно при проведении опыта. В противном случае события называют несовместными.

5. События A и B несовместны. Докажите, что $p(A+B) = p(A)+p(B)$.

Определение. *Противоположным* к событию A называется такое событие, наступление которого означает, что событие A не произошло. Противоположное к A событие обозначается $\overline{A}$.

6. Докажите, что $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

7. Подбрасываются N игральных костей. Найдите вероятность события A, где $A = \{$хотя бы на одной из костей выпала единица$\}$.

Определение. *Произведением* AB событий A и B называется такое событие, которое наступает тогда и только тогда, когда происходит каждое из событий A и B.

8. Теорема о сумме вероятностей. Для любых событий A и B выполняется равенство $p(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB)$.

Определение. События A и B называются *независимыми*, если $p(AB) = p(A)p(B)$.

9. Из колоды наугад вытянули одну карту. Пусть $A = \{$вытянут туз$\}$, а $B = \{$вытянута карта бубновой масти$\}$. Являются ли эти два события независимыми?

10. Рассмотрим бросание двух игральных костей и такие три события: $A = \{$выпала хотя бы одна пятерка$\}$, $B = \{$сумма очков равна 11$\}$, $C = \{$сумма очков равна 10$\}$. Являются ли независимыми события a) A и B; b) A и C; c) B и C.

Задачи для самостоятельного решения.

11. Биатлонист должен поразить три мишени пятью выстрелами. a) Пусть вероятность попадания выстрела в цель равна $\frac{1}{2}$. Какова вероятность того, что биатлонист не побежит штрафные круги? b) Ответьте

на тот же вопрос, если вероятность попадания выстрела в цель равна $\frac{k+1}{2k}$?

12. В жюри из трех человек два члена независимо друг от друга принимают правильное решение с вероятностью p, а третий для вынесения решения бросает монетку. Решение принимается большинством голосов. Жюри из одного человека принимает верное решение с вероятностью p. Какое из двух жюри выносит справедливое решение с большей вероятностью?

13. Две урны содержат одно и то же число шаров, несколько черных и несколько белых каждая. Из них извлекается по n ($n \geqslant 3$) шаров с возвращением (то есть после вытаскивания шара он снова возвращается в урну). Найдите число n и содержимое обеих урн, если вероятность того, что из первой урны были извлечены только белые шары, равна вероятности того, что все шары, извлеченные из второй урны — одного цвета.

Комплексные числа в геометрии-2. 22 июля.

1. a) Докажите, что векторы, соответствующие комплексным числам a и b ортогональны тогда и только тогда, когда $a\overline{b} + \overline{a}b = 0$.

b) Докажите, что скалярное произведение векторов, соответствующих комплексным числам a и b, равно $(a\overline{b} + \overline{a}b)/2$.

2. a) Докажите, что точки a, b, 0 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $a\overline{b} - \overline{a}b = 0$. b) Площадь треугольника $ab0$ равна $\pm(a\overline{b} - \overline{a}b)/(4i)$.

3. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD четырёхугольника (возможно, самопересекающегося) $ABCD$. Доказать, что $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2$.

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены (наружу) два квадрата. Ближайшие к точке B вершины этих квадратов, не совпадающие с вершинами треугольника, обозначим за X и Y. Докажите с помощью комплексных чисел, что отрезок XY перпендикулярен медиане BM и в два раза длиннее ее.

5. Противоположные стороны AB и DC четырёхугольника $ABCD$ разделены точками M и N в отношении λ, считая от вершин A и D. Докажите, что отрезок MN делит среднюю линию четырёхугольника в том же отношении λ, и сам делится средней линией пополам.

6. a) Докажите, что точка пересечения медиан треугольника abc имеет комплексную координату $\frac{a+b+c}{3}$.

b) Докажите, что если a, b и c — различные точки единичной окружности, то прямая, проходящая через точки $a+b+c$ и a, перпендикулярна прямой, проходящей через точки b и c.

c) Докажите, что если начало координат помещено в центр описанной окружности треугольника abc, то его ортоцентр будет иметь комплексную координату $a+b+c$.

d) **Прямая Эйлера.** В любом треугольнике точка пересечения медиан M, ортоцентр H и центр описанной окружности O лежат на одной прямой и $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MH}$.

7. a) Докажите, что если точки a, b и c лежат на окружности с центром в 0, то комплексная координата основания перпендикуляра из c на прямую a, b может быть вычислена по формуле $\frac{1}{2}\left(a+b+c-\frac{ab}{c}\right)$.

b) **Прямая Симсона.** Ортогональные проекции точки, лежащей на описанной около треугольника окружности, на прямые, содержащие его стороны, лежат на одной прямой.

8. a) Докажите, что комплексная координата точки пересечения касательных к окружности с центром в 0 в точках a и b может быть найдена по формуле $2\frac{ab}{a+b}$.

b) **Теорема Ньютона.** В описанном около окружности четырехугольнике середины диагоналей и центр вписанной окружности лежат на одной прямой.

Условная вероятность. 22 июля.

1. В День Эратосфена водой обливались 41 из 50 школьников и 4 из 9 преподавателей. Какова вероятность того, что: a) случайно выбранный человек из всех 59 обливался водой; b) случайно выбранный человек из всех 59 окажется преподавателем; c) случайно выбранный преподаватель обливался водой; d) случайно выбранный человек окажется обливавшимся водой преподавателем; e) случайно выбранный обливавшийся водой человек окажется школьником?

Определение. Пусть A и B — случайные события, причем $p(B) \neq 0$. Величину $p(A|B) = \frac{p(AB)}{p(B)}$ будем называть *условной вероятностью* события A при гипотезе B. Эта величина характеризует вероятность наступления события A при условии, что событие B наступило.

2. Проверьте, что события A и B независимы в том и только в том случае, если наступление события B не меняет вероятности события A, то есть если $p(A|B) = p(A)$.

3. В первой урне находятся 3 белых и 2 черных шара, а во второй — 3 белых и 12 черных шаров. Из наугад выбранной урны выбирается случайным образом один шар. Какова вероятность события $A = \{\text{этот шар белый}\}$?

4. Формула полной вероятности. Пусть события H_1, H_2, ..., H_n образуют полную систему попарно несовместных событий. Для произвольного события A докажите следующее равенство

$$p(A) = p(A|H_1)p(H_1) + p(A|H_2)p(H_2) + \ldots + p(A|H_n)p(H_n).$$

5. Некий король велел своему придворному мудрецу разделить по двум урнам 6 шаров: 3 черных и 3 белых (ни одна урна не должна оказаться пустой). Палач наугад выберет одну из урн и вытащит из нее случайным образом один шар. Если этот шар окажется черным, мудреца казнят, иначе сохранят ему жизнь. Как мудрецу нужно разделить шары, чтобы обеспечить себе максимальную вероятность уцелеть?

6. Формула Байеса. Пусть события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную систему попарно несовместных событий. Для произвольного события A докажите, что вероятность события H_i при условии, что событие A произошло, определяется по формуле

$$p(H_i|A) = \frac{p(A|H_i)p(H_i)}{p(A|H_1)p(H_1) + p(A|H_2)p(H_2) + \ldots + p(A|H_n)p(H_n)}.$$

(В знаменателе стоит полная вероятность события A, а в числителе — одно из слагаемых.)

7. В 8-м классе ЛМШ учатся 18 девочек и 33 мальчик. Десяти девочкам и тридцати мальчикам достались билеты на дискотеку. Какова вероятность того, что потерянный кем-то из них билет был потерян мальчиком?

8. Ваши товарищи могут с равной вероятностью играть либо в игру с одной игральной костью, либо в игру с двумя игральными костями. В обеих играх считается количество выпавших очков. В какой-то момент игры вы услышали, что у них выпало 2 очка. Какова вероятность того, что они играют в игру с одной костью?

9. Аня, Белла и Варя претендуют на некий приз. Для того, чтобы выяснить, кому он достанется, они договорились бросать монетки и отдать приз тому, чья монета выпадет не той стороной, что у двух других. Если же все три монеты выпадут одинаково, то девочки повторят бросание. Какова вероятность того, что розыгрыш приза закончится не позднее третьего бросания, а приз достанется Ане?

Задачи для самостоятельного решения.

10. Школьник знает ответы на 15 из 20 вопросов зачета. В каждом билете содержится один вопрос, без правильного ответа на который получить зачет невозможно. В каком случае школьник имеет больше шансов получить зачет — если он тянет билет первым или если тянет билет вторым?

11. В турнире, проводимом по олимпийской системе, играют 8 игроков равной силы. Среди них две девочки и 6 мальчиков. Номера игроков определяются жеребьевкой. Какова вероятность того, что две девочки сыграют в турнире друг с другом?

12. Представим себе игральную кость в форме треугольной пирамиды, на трех гранях которой написано по одному из чисел 1, 2 и 3, а на четвертой — все три этих числа.
Пусть $A = \{$выпала грань на которой есть число 1$\}$, B и C — аналогичные для чисел 2 и 3 соответственно. Докажите, что $p(AB) = p(A)p(B)$, но $p(ABC) \neq p(A)p(B)p(C)$.

Заключительная олимпиада.

1. В клубе встретились 20 джентльменов. Некоторые были в шляпах, а некоторые — нет. Время от времени один из джентльменов снимал с себя шляпу и надевал ее на одного из тех, у кого в этот момент шляпы не было. В конце 10 джентльменов подсчитали, что каждый из них отдавал шляпу больше раз, чем получал. Сколько джентльменов пришли в шляпах?

2. 2013 натуральных чисел расставили по кругу. Оказалось, что каждое число является либо НОДом, либо НОКом своих соседей. Какое наибольшее количество попарно различных чисел может быть среди этих 2013?

3. 40 членов жюри выбирают из 30 задач одну. Они договорились выбрать задачу, которую умеют решать не менее половины членов жюри, но не все. Каждый из членов жюри решил ровно 26 задач, причем любые два члена жюри решили разные наборы задач. Докажите, что они смогут найти подходящую задачу.

4. На стороне AC треугольника ABC отмечены точки D и E, а на отрезке BE точка F. Оказалось, что $AC = BD$ и $2\angle ACF = \angle ADB$, $2\angle CAF = \angle CDB$. Докажите, что $AD = CE$.

5. Десятичная запись квадрата натурального числа состоит из одной двойки и $k-1$ единицы. Докажите, что k не делится на 11.

Выводная аудитория

6. В Эрмитаже в галерее героев войны 1812 г. висит 5 рядов по 19 портретов героев. Каждый портрет может висеть лицом к стене или к посетителям. Двое смотрителей играют в игру. За один ход можно перевернуть любые 4 портрета. Проигрывает тот смотритель, после хода которого получится расположение портретов, уже встречавшееся в ходе игры (возможно, в исходный момент). Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его партнер?

7. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D. Произвольный луч ℓ, выходящий из вершины B, пересекает отрезок AC в точке K, а описанную окружность треугольника ABC — в точке L. Докажите, что описанная окружность треугольника DKL проходит через фиксированную точку, отличную от D и не зависящую от выбора луча ℓ.

8. В связном графе $n \geq 3$ вершин. При удалении всех ребер любого цикла граф становится несвязным. Какое максимальное количество ребер может быть в таком графе?

Список вопросов к зачёту

Алгебра

1. Тригонометрия. Определения. Основное тригонометрическое тождество. Формулы приведения.

2. Тригонометрия. Формулы сложения аргументов.

3. Векторы. Определение. Свойства.

4. Метод координат. Уравнение прямой. Уравнение окружности.

5. Скалярное произведение векторов. Свойства скалярного произведения.

6. Вычисление скалярного произведения в координатах.

7. Комплексные числа. Алгебраическая форма.

8. Комплексные числа. Тригонометрическая форма. Формула Муавра.

9. Комплексные числа в геометрии. Движения в комплексных числах.

Теория чисел

1. Теорема Вильсона.

2. Доказательство малой теоремы Ферма через бином Ньютона.

3. Теорема Жирара.

4. Мультипликативные функции.

5. Функция Эйлера. Мультипликативность. Формула.

6. Группы. Определение. Примеры.

7. Группы. Подгруппы.

8. Смежные классы. Теорема Лагранжа.

9. Теорема Эйлера.

Неравенства

1. Транснеравенство. Неравенство Чебышёва.

2. Метод Штурма.

3. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца.

Комбинаторика

1. Множества. Определение. Примеры.

2. Отображения множеств. Определение. Примеры.

3. Инъекция. Сюръекция. Биекция.

4. Формула включений-исключений.

5. Перестановки. Определение. Разложение в произведение циклов.

6. Транспозиции. Разложение перестановки в произведение элементарных транспозиций.

7. Четные перестановки.

8. Комбинаторная вероятность.

9. Формула полной вероятности.

10. Формула Байеса.

Геометрия

1. Движения. Определение. Образы прямой и окружности при движении.

2. Параллельный перенос и осевая симметрия.

3. Поворот.

4. Представление движения как композиции симметрий.

5. Классификация движений.

6. Направленные углы. Определение. Свойства.

Ответы к абаке

шахи	5	$C_{15}^{35} \cdot C_{15}^{50}$	6	10	15	0,1;...;1,0	
Графы	5,2 или 11	3	14	10	101	11	
Ант	1	$\sqrt{2}$	0 целых 5168	14	Не квадратное 3	10	
Дивж	40, 80, 150, 540	55 м 12 м/с	40 км/ч	0 или	0	3\8	
Гео	50	0	2	8	28	328	
Комон	42	Цифры на 24	30	16	-	8	
	10	50	30	40	20	90	