

## Поворот.

**Определение.** Поворотом плоскости относительно точки  $O$  на заданный ориентированный угол величины  $\alpha$  называется преобразование, которое точку  $O$  отображает на себя, а всякую другую точку  $M$  переводит в такую точку  $M'$ , что  $OM' = OM$  и ориентированный угол  $МОМ'$  имеет величину  $\alpha$ .

1. Докажите, что при повороте (а) сохраняются расстояния: если точки  $A, B$  переходят в точки  $A', B'$  то  $AB = A'B'$ ; (б) прямые переходят в прямые; (с) параллельные прямые переходят в параллельные прямые; (д) ориентированный угол между лучом и его образом при повороте равен углу поворота.

2. Докажите, что правильный треугольник при повороте на  $60^\circ$  переходит в треугольник со сторонами, параллельными исходному.

*Часто образ точки можно найти следующим образом: представим точку как пересечение двух линий, найдем образ каждой из них – тогда образ точки есть пересечение образов этих линий.*

3. Через центр квадрата проведены две перпендикулярные прямые. Докажите, что точки их пересечения с квадратом образуют квадрат.

4. Вовнутрь невырожденного треугольника  $ABC$  построены правильные треугольники  $ABM$  и  $BCP$ .  $K, E$  – середины  $AP, MC$ . Докажите, что треугольник  $BKE$  правильный.

5. Внутри квадрата  $A_1A_2A_3A_4$  взята точка  $P$ . Из вершины  $A_1$  опущен перпендикуляр на  $A_2P$ , из  $A_2$  – на  $A_3P$ , из  $A_3$  – на  $A_4P$ , из  $A_4$  – на  $A_1P$ . Докажите, что все четыре перпендикуляра (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

6. Точка  $P$  лежит внутри равностороннего треугольника  $ABC$ . Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны отрезкам  $PA, PB$  и  $PC$ .

### Для самостоятельного решения

7. (Точка Торичелли) На сторонах треугольника  $ABC$  построены вне треугольника равносторонние треугольники  $BCA_1, CAB_1, ABC_1$  и проведены отрезки  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ . Докажите, что эти отрезки (а) равны между собой; (б) пересекаются в одной точке.

8. (Теорема Помпею) На дуге  $BC$  окружности, описанной около равностороннего треугольника  $ABC$ , взята произвольная точка  $M$ . Докажите, что  $AM = BM + CM$ .