

Неравенства о средних

1. Давным-давно в отряде восьмого класса было 70 человек. Приехав в лагерь, каждая девочка отправила смс каждому мальчику отряда. Какое наибольшее число смс могло быть отправлено?

Число $A = \frac{a+b}{2}$ называется *средним арифметическим* двух чисел a и b .

Для положительных a и b числа $G = \sqrt{ab}$, $H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ и $Q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ называются соответственно *средним геометрическим*, *гармоническим* и *квадратическим*.

2. Докажите, что $H \leq G \leq A \leq Q$.

3. (а) Докажите, что $x + \frac{1}{x} \geq 2$ при $x > 0$. (б) Какое наименьшее значение при $x > 0$ может принимать выражение $ax + \frac{b}{x}$, где $a, b > 0$?

4. Для положительных a, b, c докажите неравенства:

(а) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$;

(б) $(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$.

(с) $2a^5 + a^{-1} + a^{-9} \geq 4$;

5. Квадрат со стороной 1 разделили двумя отрезками, параллельными его сторонам, на четыре прямоугольника. Какое наибольшее значение может принимать произведение их площадей?

6. В трапеции с основаниями a и b проведите четыре секущие, параллельные основаниям: 1) проходящую через точку пересечения диагоналей; 2) разбивающую трапецию на две подобные трапеции; 3) среднюю линию трапеции; 4) разбивающую трапецию на две равновеликие трапеции. Проверьте, что их длины равны соответственно H, G, A, Q .

7. Докажите, что для любых положительных чисел a, b и c выполнено неравенство

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Для самостоятельного решения

8. Докажите, что при $a_1, \dots, a_n > 0$, таких, что $a_1 \cdots a_n = 1$ верно неравенство $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 2^n$.

9. Докажите, что $\sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a} \leq 12$.

10. Известно, что $x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x_n$. Докажите, что: (а) $x_0 + \frac{1}{x_0 - x_1} \geq x_1 + 2$;

(б) $x_0 + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \dots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq x_n + 2n$.

11. Докажите, что $x + y \geq \sqrt{xy} + (\sqrt{x} - \sqrt{y})\sqrt{(x + y)}$.

12. Александр Михайлович задумал сделать общелагерную коробку для "Героев Меча и Магии" максимальной вместимости с суммой ребер по трем измерениям, равной 3м. Какие параметры будет иметь такая коробка?