Решения вступительной олимпиады.[1]

1. *В избушке живут три медведя: Михаил Иванович, Настасья Петровна и их сын Мишутка. Михаил Иванович налил в тарелку 5 поварешек супа, а Настасья Петровна — 2 поварешки. Михаил Иванович съедает свою порцию за 6 минут, а Настасья Петровна — за 4 минуты. Если Мишутка будет есть суп вместе с папой, то папина порция будет съедена за 5 минут. За какое время будет съедена мамина порция, если Мишутка будет есть вместе с мамой?*

Решение: Через **пвм** будем обозначать единицу скорости поглощения еды, соответствующую съеданию одной поварёшки в минуту. Первая порция условий даёт нам, что скорость поглощения еды Михаилом Ивановичем равна $5/6$ **пвм**, а Настасьей Петровной — $1/2$ **пвм**. Далее нам сообщают, что суммарная скорость поглощения еды Михаилом Ивановичем и Мишуткой равна 1 **пвм**. Значит, Мишутка поглощает еду со скоростью $1/6$ **пвм**. Значит, суммарная скорость поглощения еды Мишуткой и Настасьей Петровной равна $2/3$ **пвм**. Поэтому они вместе съедят 4 поварёшки за 6 минут.

2. *Таня стоит на берегу речки. У неё есть два пустых кувшина: один – на 5 литров, а про второй Таня помнит лишь то, что он вмещает то ли 3, то ли 4 литра. Помогите Тане определить ёмкость второго кувшина. (Заглядывая в кувшин, нельзя понять, сколько в нём воды.)*

Решение: Столбец слева ответственен за развитие событий с ёмкостью второго кувшина 3 литра, справа — за развитие событий с ёмкостью второго кувшина 4 литра.

Результат	Действие	Результат
1: 3 л, 2: 0 л	Наполнить второй кувшин и перелить содержимое в первый	1: 4 л, 2: 0 л
1: 0 л, 2: 1 л	Наполнить второй кувшин, наполнить первый кувшин из второго, слить первый	1: 0 л, 2: 3 л
1: 1 л, 2: 3 л	Перелить содержимое второго кувшина в первый, наполнить второй	1: 3 л, 2: 4 л
1: 4 л, 2: 0 л	Наполнить первый кувшин из второго	1: 5 л, 2: 2 л

После выполнения предложенного алгоритма Таня может смекнуть, что если второй кувшин остался пуст, то второй кувшин имеет объём 3 л, если непуст — 4 л.

3. *Толя и Гриша живут в Дубае в высотном доме с одним подъездом, в котором на каждом этаже 10 квартир. Номер этажа Толи равен номеру квартиры Гриши. Может ли сумма номеров их квартир равняться 2014?*

Решение: Заметим, что номер квартиры человека, живущего на k-ом этаже этой квартиры, имеет вид $10(k-1)+r$, где $1 \leqslant r \leqslant 10$. Если через k мы обозначим номер квартиры Гриши, то получим, что сумма номеров квартир Толи и Гриши равна $11k+r-10$. Следовательно, остаток от деления суммы на 11 не может принимать значение 1. Нетрудно убедиться, что у числа 2014 он ровно такой. Поэтому, сумма номеров квартир не может быть равна 2014.

4. *Можно ли покрасить клетки таблицы 8×8 в 16 цветов (каждая клетка красится в один цвет) так, чтобы для любых различных двух цветов нашлись клетки, которые покрашены этими цветами и имеют общую сторону?*

Решение: Допустим, что можно. Тогда для каждой пары цветов мы можем найти пару соседних клеток, покрашенных в эту пару цветов. Ясно, что разным парам цветов мы сопоставили разные пары соседних клеток, поэтому пар соседних клеток должно быть не меньше, чем пар цветов. Проведём вычисления: мы имеем $16 \cdot 15/2 = 8 \cdot 15 = 8 \cdot 16 - 8$ пар цветов, тогда как в каждой линии (строке или столбце) есть 7 пар соседних клеток, следовательно, мы имеем $16 \cdot 7 = 8 \cdot 16 - 16$ пар соседних клеток. $8 \cdot 16 - 16 < 8 \cdot 16 - 8$, получили противоречие.

[1] Представленные решения не претендуют на роль единственно верных, самых коротких или исключительно красивых.

5. *В трапеции* $ABCD$ *с основаниями* AB *и* CD *отмечена точка* E *– середина* BC. *Оказалось, что* $\angle BAE + \angle EDC = 90^\circ, AB = 7, CD = 10$. *Найдите* AD.

Решение: Обозначим через F середину отрезка AD. Поскольку EF — средняя линия трапеции $ABCD$, она параллельна обоим её основаниям. Поэтому $\angle AED = \angle AEF + \angle DEF = \angle BAE + \angle CDE = 90^\circ$. Выходит, EF – медиана при прямом угле прямоугольного треугольника AED, следовательно, $EF = AD/2$. Но также $EF = (AB + CD)/2$. Значит, $AD = AB + CD = 17$.

Решение: Продлим DE до пересечения с прямой AB в точке K. $BE = CE, \angle BEK = \angle CED, \angle KBE = \angle DCE$, поэтому $\triangle BEK = \triangle CEK$, и в частности $KE = DE$ и $BK = CD$. Заметим, что $\angle AEK = 180^\circ - \angle EAK - \angle EKA = 180^\circ - \angle EAB - \angle EDC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Всё говорит в пользу того, что AE является одновременно и высотой, и медианой в треугольнике DAK. Поэтому $AD = AK = AB + BK = 10 + 7 = 17$.

6. *В отряде 101 боец. Каждый вечер трое из них выходят в дозор. При этом любая пара солдат не может ходить в дозор вместе более трех раз. Какое максимальное количество вечеров отряд может отправлять в дозор бойцов?*

Решение: Докажем, что не более, чем $(100 \cdot 101)/2$. Действительно, пусть количество проведённых дозоров равно k. Посчитаем количество пар (дозор; пара солдат, побывавших на этом дозоре). Во-первых, оно равно $3k$ — на каждом дозоре побывало ровно три пары солдат. Во-вторых, каждая пара побывала не более, чем на трёх дозорах, поэтому оно не превосходит $3 \cdot (100 \cdot 101)/2$. Поэтому $k \leqslant (100 \cdot 101)/2$.

Приведём пример, доставляющий точность оценки. Расставим бойцов по вершинам правильного 101-угольника. В дозор отправим ровно те тройки солдат, которые образуют равнобедренный треугольник. За каждую пару (дозор; пара солдат, побывавших на этом дозоре) проведём ребро между соответствующей парой солдат. Заметим, что каждая пара солдат будет соединена трижды, а именно, как левое ребро равнобедренного треугольника, как правое ребро, и как основание (в силу нечётности 101 и не кратности 3 все эти три тройки существуют и различны). Поэтому в этом примере $3k = 3 \cdot (100 \cdot 101)/2$.