Спецкурс по многочленам и квадратным уравнениям

Теоретическая часть. 1

Многочленом степени n от переменной x называется выражение $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1x + a_0$, $a_n \neq 0$.

Квадратным трёхчленом, в свою очередь, называется выражение ax^2+bx+c, $a \neq 0$.

Квадратный трёхчлен называется *приведённым*, если коэффициент при x^2 в нём равен 1.

Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$.

Корнем уравнения называется число, при подстановке которого в уравнение, оно обращается в 0.

Многочлен $P(x)$ *делится* на многочлен $Q(x)$, если существует многочлен $R(x)$ такой, что $P(x) = Q(x) \cdot R(x)$

1. Докажите, что многочлен $x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ делится на многочлен $x^2 + 4x - 5$.

2. Теорема Безу. Докажите, что a - корень многочлена $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, тогда и только тогда, когда $P(x)$ делится на $(x - a)$.

3. Докажите, что если x_1 и x_2 - корни уравнения $x^2 + bx + c = 0$, то $x^2 + bx + c = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

4. Теорема Виета. Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ с корнями x_1 и x_2. Не используя формулу для корней квадратного уравнения, докажите, что

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}, \qquad \frac{x_1}{x_2} = \frac{c}{a}$$

Дискриминантом квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ называется выражение $b^2 - 4ac$.

5. Не используя формулу для корней квадратного уравнения, докажите, что $b^2 - 4ac = a^2 \cdot (x_1 - x_2)^2$, при условии, что у квадратного уравнения есть корни.

6. Докажите, что у квадратного уравнения 2 различных корня, если и только если $D > 0$; 2 совпадающих корня, если и только если $D = 0$; 0 корней, если и только если $D < 0$.

7. Докажите, что корни квадратного уравнения находятся по формуле:

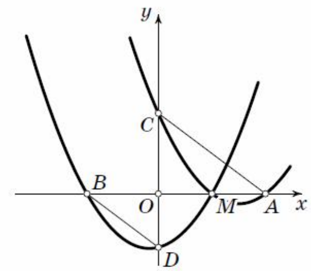
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Практическая часть.

8. Алёша написал на доске 5 целых чисел – коэффициенты и корни квадратного трёхчлена. Боря стёр одно из них. Остались числа 2, 3, 4, -5. Восстановите стёртое число.

9. Все коэффициенты квадратного трёхчлена – нечётные целые числа. Докажите, что у него нет корней вида $1/n$, где n – натуральное число.

10. Существуют ли такие три числа, что если их подставить в одном порядке в качестве коэффициентов квадратного трёхчлена, то он имеет два положительных корня, а если в другом - два отрицательных?



11. Даны два приведённых квадратных трёхчлена. График одного из них пересекает ось Ox в точках A и M, а ось Oy – в точке C. График другого пересекает ось Ox в точках B и M, а ось Oy – в точке D. (O – начало координат; точки расположены как на рисунке.) Докажите, что треугольники AOC и BOD подобны.

12. Один из корней уравнения $x^2 + ax + b = 0$ равен $1 + \sqrt{3}$. Найдите a и b, если известно, что они рациональны.

13. $P(x)$ и $Q(x)$ - приведённые квадратные трёхчлены, имещие по 2 различных корня. Оказалось, что сумма двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена $Q(x)$ в трёхчлен $P(x)$, равна сумме двух чисел, получаемых при подстановке корней трёхчлена $Q(x)$ в трёхчлен $P(x)$. Докажите, что дискриминанты трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны.

14. Дискриминанты трёх квадратных трёхчленов равны 1, 4 и 9. Докажите, что можно выбрать по одному корню каждого из них так, чтобы их сумма равнялась сумме оставшихся корней.

15. Докажите, что ни при каком целом a многочлен $3x^{2n} + ax^n + 2$ не делится на многочлен $2x^{2m} + ax^m + 3$. а