

Дискретная непрерывность

1. Хоккейный матч «Динамо» – «Родина» закончился со счетом $8 : 5$ в пользу «Родины». Верно ли, что в ходе матча был момент, когда команда «Родина» уже забросила столько мячей, сколько еще оставалось забросить «Динамо» до конца матча?

2. Ожерелье сделано из 50 красных и 50 синих бусин. Докажите, что найдутся десять идущих подряд бусин, среди которых поровну синих и красных.

3. К числу можно за ход либо прибавить 1, либо отнять 8. Из 1 получили 100. Докажите, что когда-то было число 17.

4. Последовательность целых чисел 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 42, 63, 94, ... начинается с двойки, а каждое следующее число получается из предыдущего умножением на $3/2$ и округлением в меньшую сторону. Докажите, что в этой последовательности есть целое шестизначное число.

5. Журнал «Юный диверсант» выходит нерегулярно — два или три раза в год. На обложке стоит номер журнала и год выпуска: №1 — 2001, №2 — 2001, №3 — 2002, ... Докажите, что если редакцию не поймают, то рано или поздно выйдет номер, где два числа на обложке совпадут.

6. На плоскости отмечены 10000 точек. Докажите, что найдется не проходящая через эти точки прямая, по одну сторону которой лежит ровно 2015 отмеченных точек.

7. Докажите, что можно выбрать 2015 последовательных натуральных чисел, среди которых будет ровно 43 простых числа.

8. На плоскости даны n векторов, длина каждого не превосходит 1. Докажите, что можно выбрать α и повернуть все векторы на угол α (некоторые по часовой стрелке, а некоторые против) так, чтобы длина суммы векторов нового набора не превосходила 1.

Для самостоятельного решения

9. В некоторых клетках квадратной таблицы 50×50 расставлены числа $+1$ и -1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 100. Докажите, что в некотором квадрате 25×25 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 25.

10. На планете, имеющей форму шара, построены города, некоторые из которых соединены дорогами. Для каждого города G имеется «антигород» G^* , симметричный G относительно центра шара. Если города G и H соединены дорогой, то «антигорода» G^* и H^* также соединены дорогой. Дороги не пересекаются в точках, отличных от городов, и из любого города можно по дорогам добраться в любой. В городах, соединенных дорогой, количество жителей отличается не более чем на 1000. Докажите, что существует город, число жителей в котором отличается от числа жителей в «антигороде» не более чем на 1000.