00.(3-). Точку внутри выпуклого четырехугольника соединили с точками на сторонах. Три из полученных четырехугольника оказались вписанными. Докажите, что и четвертый также вписанный.
01.(3+). $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

02.(3-). Докажите, что медианы делят треугольник на шесть равновеликих частей.
03.(3+). $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133.

04.(3-). Пусть AB — хорда окружности, ℓ — касательная к окружности (A — точка касания). Докажите, что каждый из двух углов между AB и ℓ измеряется половиной дуги окружности, заключенной внутри рассматриваемого угла.
05.(3+). $2^{3^n} + 1$ делится на 3^{n+1}.

06.(3-). Докажите, что площадь треугольника равна rp, где r — радиус вписанной окружности, p — его полупериметр.
07.(3+). Найдите все простые числа, которые нельзя представить в виде суммы двух составных.

08.(3-). В прямоугольном треугольнике медиана равна m и делит прямой угол в отношении $1:2$. Найдите площадь треугольника.
09.(3+). $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

10.(3-). Докажите, что сумма расстояний от любой точки основания равнобедренного треугольника до боковых сторон равна высоте этого треугольника, проведенной к боковой стороне.
11.(3+). $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133.

12.(3-). На стороне AB треугольника ABC взята точка M, а на стороне AC —точка N, причем $AM = 3MB$, $2AN = NC$. Найдите площадь четырехугольника $MBCN$, если площадь треугольника треугольника ABC равна S.
13.(3+). $2^{3^n} + 1$ делится на 3^{n+1}.

14.(3-). Докажите, что $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$.
15.(3+). На сторонах AB и AD ромба $ABCD$ взяты две точки M и N так, что прямые MC и NC делят ромб на три равновеликие части. Найти MN, если $BD = 3$.

16.(3-). Докажите, что $F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$.
17.(3+). В равнобочной трапеции $ABCD$ основание AD равно 12, основание BC равно 6, $AB = 5$. Через вершину B проведена прямая, делящая пополам диагональ AC и пересекающая AD в точке K. Найдите площадь треугольника BDK.

18.(3-). Докажите, что $F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$.
19.(3+). Пусть E и F — середины сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Найдите площадь четырехугольника, образованного прямыми AE, ED, BF и FC, если известно, что площадь $ABCD$ равна S.

20.(3-). Докажите, что $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.
21.(3+). Точка X расположена внутри параллелограмма $ABCD$. Докажите, что $S_{ABX} + S_{CDX} = S_{BCX} + S_{ADX}$.

22.(3-). Докажите, что $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} = \frac{n-1}{n}$.
23.(3+). В треугольнике ABC даны стороны $BC = 3$, $CA = 4$, $AB = 5$. Найдите отношение, в котором точка пересечения биссектрис делит биссектрису угла B.

24.(3-). Докажите, что

$$\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{(a+b)(a+2b)}+\ldots+\frac{1}{(a+(n-1)b)(a+nb)}=\frac{n}{a(a+nb)},$$

где a и b — произвольные числа.

25.(3+). На сторонах AB и AD ромба $ABCD$ взяты две точки M и N так, что прямые MC и NC делят ромб на три равновеликие части. Найти MN, если $BD=3$.

26.(3-). Докажите, что

$$\frac{m!}{0!}+\frac{(m+1)!}{1!}+\ldots+\frac{(m+n)!}{n!}=\frac{(m+n+1)!}{n!(m+1)},$$

где m, n =0, 1,. . .

27.(3+). В равнобочной трапеции $ABCD$ основание AD равно 12, основание BC равно 6, $AB=5$. Через вершину B проведена прямая, делящая пополам диагональ AC и пересекающая AD в точке K. Найдите площадь треугольника BDK.

28.(3-). Докажите, что

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}.$$

29.(3+). Пусть E и F — середины сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Найдите площадь четырехугольника, образованного прямыми AE, ED, BF и FC, если известно, что площадь $ABCD$ равна S.

30.(3-). $3^{2n+2}+8n-9$ делится на 16.

31.(3+). Точка X расположена внутри параллелограмма $ABCD$. Докажите, что $S_{ABX}+S_{CDX}=S_{BCX}+S_{ADX}$.

32.(3-). Доказать, что количество различных слов из n букв Л и П, в которых буквы Л не идут подряд друг за другом, равно F_{n+2}.

33.(3+). В треугольнике ABC даны стороны $BC=3$, $CA=4$, $AB=5$. Найдите отношение, в котором точка пересечения биссектрис делит биссектрису угла B.

34.(3-). Плоскость разрезана на части n прямыми, причём $n\geqslant 3$ и не все прямые проходят через одну точку. Доказать, что хотя бы одна из частей — треугольник.

35.(3+). На сторонах AB и AD ромба $ABCD$ взяты две точки M и N так, что прямые MC и NC делят ромб на три равновеликие части. Найти MN, если $BD=3$.

36.(3-). Докажите, что $1\cdot 1!+3\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$.

37.(3+). В равнобочной трапеции $ABCD$ основание AD равно 12, основание BC равно 6, $AB=5$. Через вершину B проведена прямая, делящая пополам диагональ AC и пересекающая AD в точке K. Найдите площадь треугольника BDK.

38.(3-). Докажите, что $2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^n=(n-1)2^{n+1}$.

39.(3+). Пусть E и F — середины сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Найдите площадь четырехугольника, образованного прямыми AE, ED, BF и FC, если известно, что площадь $ABCD$ равна S.

40.(3-). Докажите, что среди любых различных 2013 целых чисел можно выбрать такие три различных числа a, b и c, что число $a(b-c)$ делится на 2013.

41.(3+). Точка X расположена внутри параллелограмма $ABCD$. Докажите, что $S_{ABX}+S_{CDX}=S_{BCX}+S_{ADX}$.

Задачи на 4-.

42.(4-). Стороны двух углов пересекаются в точках A, B, C, D, биссектрисы их взаимно перпендикулярны. Докажите, что A, B, C, D — лежат на одной окружности.

43.(4-). Докажите, что если в графе есть цикл нечетной длины, то в нем есть простой цикл нечетной длины.

44.(4-). Есть 4 натуральных числа. Могут ли их попарные НОДы образовывать шесть последовательных чисел?

45.(4-). В треугольнике ABC из вершины A выходит прямая, делящая пополам медиану BD (точка D лежит на стороне AC). В каком отношении эта прямая делит сторону BC?

46.(4-). В треугольнике ABC сторона AB равна 3, а высота CD, опущенная на сторону AB, равна $\sqrt{3}$. Основание D высоты CD лежит на стороне AB, отрезок AD равен стороне BC. Найдите AC.

47.(4-). В выпуклом четырехугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных сторон равны 3 и пересекаются под углом $60°$. Найдите диагонали четырехугольника.

48.(4-). Докажите, что длина отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции равна полуразности оснований.

49.(4-). На доске выписано 100 различных чисел. Докажите, что среди них можно выбрать восемь чисел так, что их среднее арифметическое не будет равно среднему арифметическому никаких девяти из выписанных чисел.

50.(4-). Клетчатый квадрат 9×9 разбит на прямоугольники 1×3. У каждого из прямоугольников отмечена точка пересечения диагоналей. Докажите, что из отмеченных точек можно выбрать такие четыре, которые лежат на одной прямой.

51.(4-). Пусть каждое из натуральных чисел n, $n+1$, $n+2$ делится на квадрат любого своего простого делителя. Докажите, что число n делится на куб некоторого своего простого делителя.

52.(4-). В окружность вписан неправильный N—угольник, который при повороте окружности на ненулевой угол совмещается сам с собой. Докажите, что N число составное.

53.(4-). На плоскости отмечены точки A, B, C, D, так, что точки C и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB. Точка M— середина CD. Докажите, что $S_{ABM} = \frac{1}{2}(S_{ACM} + S_{ADM})$.

54.(4-). В какое наибольшее число цветов можно раскрасить доску 8×8 так, чтобы каждая клетка граничила по стороне хотя бы с двумя клетками своего цвета?

55.(4-). Найдите все простые p такие, что $p^6 + 6$ — простое.

56.(4-,4). Диагонали выпуклого четырехугольника равны a и b, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны. Найдите площадь четырехугольника.

57.(4-,4). Две прямые, параллельные основаниям трапеции, делят каждую из боковых сторон на три равные части. Вся трапеция разделена ими на три части. Найти площадь средней части, если площади крайних S_1 и S_2.

58.(4-). Пусть p и $p+2$ — простые числа. Докажите, что число $2p(p+1)(p+2)$ является общим делителем чисел $p^{p+2} - p$ и $(p+2)^p - p - 2$. натуральном n.

59.(4-). Какое наименьшее значение может принимать величина $|11^k - 5^l|$ при натуральных k и l?

60.(4-). Докажите, что не существует такого натурального n, что числа от 1 до $2n$ разбиваются на пары с суммой — степенью двойки.

Задачи на 4.

61.(4). Пусть A_1, B_1, C_1 и D_1 — середины сторон CD, DA, AB, BC квадрата $ABCD$, площадь которого равна S. Найдите площадь четыреухгольника, образованного прямыми AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1.

62.(4). Докажите, что для любого n существует граф с $2n$ вершинами, степени которых равны 1, 1, 2, 2, 3, 3, $\ldots$, n, n.

63.(4). Существует ли треугольник, длины высот которого равны 4, 6, 12?

64.(4). В ряд стоит 2009 коробок, пронумерованных числами от 1 до 2009. В первой коробке лежит 2009 камней, а в остальных — пусто. За ход разрешается из непустой коробки достать несколько камней (может быть один или все, но не ноль) и положить в следующую по номеру коробку (если она есть). Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто из игроков (начинающий или его противник) имеет выигрышную стратегию?

65.(4). Докажите из комбинаторных соображений, что $C_n^k C_k^l = C_n^l C_{n-l}^{k-l}$.

66.(4). Докажите, что $n!$ не делится на 2^n.

67.(4). В фирме из 10 человек есть клуб любителей пива. По уставу в клубе должно быть не менее трех человек. На каждом собрании в клуб принимается один человек, либо из клуба исключается один человек. Нельзя возвращаться к набору участников, который уже раньше встречался. Может ли клуб пройти через все разрешенные уставом составы?

68.(4). В год выборов на Украине все города подняли над ратушами флаги – голубые либо оранжевые. Каждый день жители узнают цвета флагов у соседей в радиусе 100 км. Один из городов, где у большинства соседей флаги другого цвета, меняет свой флаг на этот другой цвет. Докажите, что со временем смены цвета флагов прекратятся.

69.(4). $a^{2\smile}ab + b^2$ и $b^2 + bc + c^2$ делятся на 101. Докажите, что и $a^3 + c^3$ делится на 101

70.(4). Докажите, что из связного графа с 100 вершинами и 199 ребрами можно выбросить ребра некоторого замкнутого цикла (вершины остаются) так, чтобы граф остался связным.

71.(4). Обозначи за c_m количество жителей в m–ом по населению доме. А за d_k– количество таких домов в которых живет не меньше k жителей. Докажите, что $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots = d_1 + d_2 + d_3 + \ldots$.

72.(4). На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке. M — середина дуги AB. Обозначим точки пересечения хорд MC и MD с хордой AB через E и K. Докажите, что $KECD$ — вписанный четырёхугольник.

73.(4). В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что если $A_1B_1 \parallel AB$ и $B_1C_1 \parallel BC$, то $A_1C_1 \parallel AC$.

74.(4). Докажите, что высоты AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC делят углы треугольника $A_1B_1C_1$ пополам.

75.(4). Две окружности касаются в точке K. Прямая, проходящая через точку K, пересекает эти окружности в точках A и B. Докажите, что касательные к окружностям, проведённые через точки A и B, параллельны.

76.(4). Пусть n — натуральное число такое, что $n + 1$ делится на 24. Докажите, что сумма всех натуральных делителей n делится на 24.

77.(4). Докажите, что $19 \cdot 8^n + 17$ составное при любом n.

78.(4). Докажите, что существует точный квадрат, начинающийся с любой наперед заданной последовательности цифр.

Задачи на 4+.

79.(4+). На плоскости отмечены 6000 точек, никакие три не лежат на одной прямой. Докажите, что можно построить 2000 непересекающихся треугольников с вершинами в этих точках.

80.(4+). За круглым столом сидят десять человек, перед каждым — несколько орехов. Всего орехов — сто. По общему сигналу каждый передает часть своих орехов соседу справа: половину — если у дающего было чётное число или один орех плюс половину остатка — если нечётное число. Такая операция проделывается второй раз, затем третий и так далее, до бесконечности. Докажите, что через некоторое время у всех станет по десять орехов.

81.(4+). В каждой клетке доски 8×8 поставлена стрелка, показывающая в одном из четырех направлений (вверх, вниз, вправо, влево). Фишка стоит в некоторой клетке и идет по стрелке. При этом стрелка в клетке поворачивается на 90° по часовой стрелке. Так она ходит, ходит, ходит. Докажите, что она рано или поздно упадет с доски.

82.(4+). Докажите, что из любых 2^{n+1} натуральных чисел можно выбрать ровно 2^n, сумма которых делится на 2^n.

83.(4+). Доказать, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

84.(4+). Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 - z^2 = 2009$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

85.(4+). Найдите все натуральные n такие, что n делится на $\varphi(n)$.

86.(4+). С натуральным числом A разрешается выполнять следующую операцию: разбить его на два натуральных слагаемых, больших 1, и заменить A на их произведение. Докажите, что из любого числа, большего 4, такими операциями можно получить точную степень десяти.

87.(4+). Через точку O проведены три одинаковые окружности с центрами O_1, O_2 и O_3. Они пересекаются вторично в точках A, B и C. Докажите, что O — ортоцентр треугольника ABC.

88.(4+). AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC, O — центр описанной окружности. Докажите, что прямые A_1B_1 и CO перпендикулярны.

89.(4+). В трех бочках содержатся в сумме 128 литров воды, причем в каждой — целое число литров воды. Разрешается выбрать две бочки и перелить из одной в другую столько, сколько там уже есть. Докажите, что можно собрать всю воду в одной бочке.

90.(4+). В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что точка, симметричная A_1 относительно прямой AC, лежит на прямой B_1C_1.

91.(4+). Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M; P — произвольная точка. Прямая ℓ_a проходит через точку A параллельно прямой PA_1; прямые ℓ_b и ℓ_c определяются аналогично. Докажите, что прямые ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c пересекаются в одной точке.

92.(4+). При простом $p > 3$, докажите, что $6^{p-2} + 3^{p-2} - 2^{p-2}$ делится на p.

93.(4+). Докажите формулу: $C_{2n}^n = C_{n-1}^0 C_{n+1}^n + C_{n-1}^1 C_{n+1}^{n-1} + \cdots + C_{n-1}^{n-1} C_{n+1}^1$.

94.(4+). Докажите, что при любом натуральном n число $(5n)!$ делится на $(n)!^5$.

Задачи на 5-.

95.(5-). В последовательности натуральных чисел каждый следующий член получается из предыдущего прибавлением наибольшего делителя, являющегосся точным квадратом (например, 24->24+4). Известно, что никакой из членов не делится на 100. Докажите, что лишь конечное число членов может делиться на 10.

96.(5-). Дан граф с n вершинами. Докажите, что можно задать ориентацию на его ребрах таким образом, чтоб модуль разности между количествами входящих и выходящих ребер для каждой вершины не превышал единицы.

97.(5-). Докажите, что площадь выпуклого пятиугольника с вершинами в узлах целочисленной решетки хотя бы 5/2.

98.(5-). Одно и то же нечетное натуральное число разделили с остатком на каждое из чисел 2, 3, 4, ..., 1 000 000. Все полученные остатки оказались различными, при этом один из них равен нулю. Докажите, что нулевой остаток получился при делении на число, большее 1000.

99.(5-). На сколько нулей заканчивается число $11^{100}-1$?

100.(5-). На доске написаны два различных натуральных числа a и b . Меньшее из них стирают, и вместо него пишут число $\frac{ab}{|a-b|}$ (которое может уже оказаться нецелым). С полученной парой чисел делают ту же операцию и т.д. Докажите, что в некоторый момент на доске окажутся два равных натуральных числа.

101.(5-). Докажите, что в равнобедренном треугольнике с углом при вершине 20° боковая сторона меньше утроенного основания но больше удвоенного.

102.(5-). Клетки прямоугольника 99×101 раскрашены в красный и синий цвета. Докажите, что найдется клетка, для которой в содержащих ее строке и столбце найдется еще хотя бы 99 клеток того же цвета.

103.(5-). Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Диагонали AD, BE и CF являются диаметрами этой окружности. Докажите, что площадь шестиугольника $ABCDEF$ равна удвоенной площади треугольника ACE.

Задачи на 5.

104.(5). Обозначим через $S(n)$ сумму цифр числа n. Докажите, что существует бесконечно много чисел n, таких, что $S(2^n) > S(2^{n+1})$.

105.(5). Все простые делители натурального числа n меньше 100. Докажите, что у числа n существует такой делитель d, что $d^2 \leqslant n < 100d^2$.

106.(5). Внутри данного треугольника ABC найдите такую точку O, что площади треугольников BOL, COM и AON равны (точки L, M и N лежат на сторонах AB, BC и CA, причем $OL \parallel BC$, $OM \parallel AC$, $ON \parallel AB$).

107.(5). На сторонах единичного квадрата отмечены четыре точки, по одной на каждой стороне. Докажите, что периметр образованного ими четырехугольника больше $2\sqrt{2}$.

108.(5). Внутри квадрата отметили несколько точек и соединили их отрезками между собой и с вершинами квадрата так, чтобы отрезки не пересекались друг с другом (нигде кроме концов). В результате квадрат разделился на треугольники так, что все отмеченные точки оказались вершинами треугольников, и ни одна не попала на стороны треугольников. Для каждой отмеченной точки и для каждой вершины квадрата подсчитали число проведенных из нее отрезков. Могло ли так случиться, что все эти числа оказались четными?

109.(5). На окружности сидят 12 кузнечиков в различных точках. Эти точки делят окружность на 12 дуг. По сигналу кузнечики одновременно прыгают по часовой стрелке, каждый – из конца своей дуги в ее середину. Образуются новые 12 дуг, прыжки повторяются, и т. д. Может ли хотя бы один кузнечик вернуться в свою исходную точку после того, как им сделано 12 прыжков?

110.(5). Натуральное число x таково, что $x^2 + x + 1$ кратно простому числу $p > 3$. Докажите, что p дает остаток 1 от деления на 3.

Задачи на 5+.

111.(5+). Пусть H ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что прямые Эйлера треугольников AHB, BHC, CHA и ABC пересекаются в одной точке.

112.(5+). Ладья, шагая по одной клетке, за 64 хода обошла все клетки шахматной доски и вернулась на исходную клетку. Докажите, что число ходов по вертикали не равно числу ходов по горизонтали.

113.(5+). Докажите, что простых чисел вида $4k+1$ бесконечно много.