Матбой века

1. Назовём натуральное число *маленьким*, если оно не превосходит 100. Каждому множеству, составленному из 49 маленьких чисел, Алина ставит в соответствие некоторое маленькое число. Докажите, что Катя может так выбрать 50 маленьких чисел, что никакому множеству, состоящему из 49 из них, Алиной не сопоставлено оставшееся число.

2. Алина и Поля по очереди ставят фишки на клетки доски 101×101. Алина может поставить очередную фишку на любую свободную клетку, для которой суммарное количество фишек, уже стоящих в столбце и строке, содержащих эту клетку, чётно. Поля может поставить очередную фишку на любую свободную клетку, для которой это количество нечётно. Проигрывает та, которой некуда ходить. Кто выигрывает при правильной игре?

3. На сторонах BC, AC, AB треугольника ABC Алина выбрала точки A_1, B_1, C_1 соответственно, так, что $AC_1 = C_1B_1 = B_1A_1 = A_1C$. Докажите, что биссектриса угла B проходит через ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$.

4. Алина записала в ряд 201 число, каждое из которых равно $+1$ либо -1. Настя может назвать любые 99 мест ряда, и Алина сообщит ей произведение чисел, стоящих на этих местах. Может ли Настя определить произведение всех чисел, записанных Алиной, задав ей всего три вопроса?

5. Алина называет натуральное число *хорошим*, если оно содержит любой простой множитель не менее, чем во второй степени. Докажите, что существует бесконечно много пар последовательных натуральных чисел, каждое из которых является хорошим с точки зрения Алины.

6. Решите уравнение в натуральных числах: $n! + 1 = (m! - 1)^2$.

7. В треугольнике ABC угол $\angle A$ равен 60°. Точка T находится внутри треугольника, и $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120^\circ$. M – середина BC. Докажите, что $TA + TB + TC = 2AM$.

8. Докажите, что для любых положительных чисел x, y, z выполнено неравенство:

$$\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)\left(y^2 + \frac{3}{4}\right)\left(z^2 + \frac{3}{4}\right) \geq \sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}$$