Линейные диофантовы уравнения.

Теорема. Пусть a и b – взаимно простые числа. Тогда

(a) уравнение $ax + by = c$ имеет бесконечно много целочисленных решений;

(b) все решения имеют вид $\begin{cases} x = x_0 + bt, \\ y = y_0 - at \end{cases}$, где t – произвольное целое число, а (x_0, y_0) – одно из решений уравнения $ax + by = c$.

Для того, чтобы решить в целых числах линейное уравнение $ax + by = c$ $(a, b \neq 0)$, необходимо действовать в соответствии со следующим **алгоритмом**:

1. Находим $d = \text{НОД}(a, b)$.
2. Проверяем, делится ли c на d. Если нет, то уравнение не имеет решений; если да, то делим обе части на d, переходя к равносильному уравнению $a'x + b'y = c'$ со взаимно простыми $a' = \frac{a}{d}$, и $b' = \frac{b}{d}$ и правой частью $c' = \frac{c}{d}$.
3. Находим частное решение (x_0, y_0) уравнения $a'x+b'y = c'$ (если получается — подбором, если нет — с помощью алгоритма Евклида).
4. Записываем решение уравнения $a'x + b'y = c'$ в виде $\begin{cases} x = x_0 + b't, \\ y = y_0 - a't \end{cases}$, $t \in \mathbb{Z}$.

1. Блоха прыгает по прямой, либо на 37 см влево, либо на 47 см вправо. За какое наименьшее число прыжков она может оказаться на 2 см правее исходной точки?

2. Две разметочные машины поехали по дороге в одном направлении. Одна ставит синие пометки через каждые 229 метров, а другая — красные через каждые 11111 метров. Докажите, что найдутся две пометки на расстоянии 1 метр, и при этом идет **(a)** сначала красная, потом синяя; **(b)** наоборот.

3. Света задумала натуральное число, умножила его на 54321, затем поделила с остатком на 2014 и получила в остатке 73. Могло ли такое произойти?

Для самостоятельного решения

4. В клетчатом прямоугольнике $m \times n$ провели диагональ. Сколько клеток она пересекла **(a)** если $(m, n) = 1$; **(b)** в общем случае?