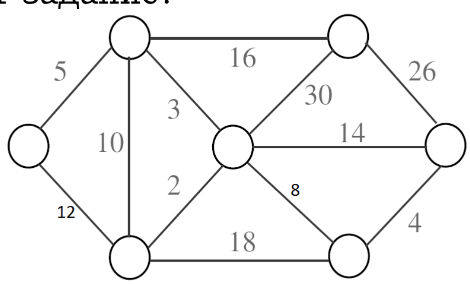
Графы. Алгоритм Краскала.

1. В одной малоизвестной стране n городов, некоторые из которых соединены дорогами, так, что из любого города можно добраться до любого другого, возможно, через другие города. В начале 2015 года выяснилось, что все дороги этой страны находятся в плачевном состоянии. Бригада ремонтников получила задание — отремонтировать некоторые дороги, так чтобы можно было добраться от любого города до любого по отремонтированным дорогам. Какое наименьшее количество дорог бригада должна восстановить?

Определение. *Остовное дерево* графа G — подграф-дерево, содержащий все вершины G.

2. Как только ремонтники из первой задачи узнали сколько дорог им придется восстановить, они задались вопросом сколько на это у них уйдет времени. Они раздобыли карту страны, где около каждой дороги было подписана её длина в километрах. На ремонт 1 км дорожного полотна бригаде требуется 1 день. За сколько дней они выполнят задание?



Определение. *Взвешенный граф* — граф, в котором каждому ребру сопоставлено число, называемое *весом ребра*.

Определение. *Минимальное остовное дерево (MST — minimal spanning tree)* — остовное дерево с минимальной суммой весов рёбер.

3. Пусть G — полный граф содержащий 2015 вершин, пронумерованных от 1 до 2015. Весом ребра считаем сумму номеров его концов.

(a) Найдите MST графа G.

(b) Докажите, что здесь MST ровно одно.

(c) Придумайте граф, в котором хотя бы два MST.

Хочется для любого графа находить какое-нибудь MST.

Определение. Множество рёбер назовём *хорошим*, если оно является подмножеством рёбер какого-нибудь MST.

Определение. Пусть A — хорошее множество. Ребро e называется *безопасным для* A, если $A \cup \{e\}$ — хорошее множество. Ребро e называется *почти безопасным для* A, если $A \cup \{e\}$ — не содержит циклов.

4. Пусть A — хорошее множество. Докажите, что наименьшее по весу почти безопасное для A ребро является безопасным для A.

Алгоритм Краскала.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_m$ — рёбра связного графа упорядоченные по неубыванию.

- Изначально X — пустое множество ребер.
- Рассматриваем i-ое ребро, если оно почти безопасное для множества X, то добавляем его к X и переходим к следующему ребру.
- X — множество рёбер MST графа G.

5. Докажите, что алгоритм Краскала находит минимальное остовное дерево.

Для самостоятельного решения

Алгоритм Прима.

- Изначально X — множество из любой одной вершины. А множество Y — пустое множество рёбер.
- Рассматриваем наименьшее по весу ребро, один из концов которого лежит в X, а второй не лежит в X. Добавляем его в Y, а вершину-конец ребра, не лежащий в X, добавляем в X.
- Y — множество рёбер MST графа.

6. Примените алгоритм Прима на графе из второй задачи два раза. Первый раз начните с левой вершины, а второй — с правой.

7. Докажите, что алгоритм Прима находит минимальное остовное дерево.