

Разнойбой–1.

1. В таблице размером 10×10 расставлены произвольные числа. Разрешено одновременно изменять знак у всех чисел какого-то одного столбца или у всех чисел какой-то одной строки. Докажите, такими операциями можно получить таблицу, у которой суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце неотрицательны.

2. Докажите, что для любого четного n число $20^n + 16^n - 3^n - 1$ делится на $323 (= 17 \cdot 19)$.

3. На доске написано число «2». Играют двое. За один ход разрешается к уже имеющемуся числу добавить любой его делитель, отличный от самого числа. Тот, кто первым получит число, большее 2014^{2014} (a) выигрывает; (b) проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

4. Белка прятала орехи. Известно, что от каждого тайника к следующему она пробегала не больше 3 м. Оказалось, что расстояние от первого тайника до последнего равно 100 м. Докажите, что найдутся два тайника, расстояние между которыми не меньше 22 метров и не больше 25 метров.

(a) Белка прыгает на прямой.

(b) Белка прыгает на плоскости.

5. На шахматной доске расставлено 10 королей. После нескольких ходов оказалось, что каждый король побывал на всех полях ровно по разу и вернулся на исходное поле. Докажите, что был момент, когда ни один из королей не стоял на своем исходном поле.