Жадный алгоритм

1. На столе лежат карточки со 100 последовательными числами. Двое игроков по очереди берут по карточке, пока не разберут все. Тот, у кого сумма меньше, выплачивает разность сумм противнику. Каков результат игры при наилучших действиях сторон?

2. На столе лежат несколько кусков шоколада, самый большой весит b. Петя начинает, и они с Васей по очереди съедают по куску, пока не съедят всё. Докажите, что при наилучших действиях Васи Петя сможет съесть больше Васи не более, чем на b.

3. $ABCD$ — квадрат со стороной 8. Разрешено делать шаги длины 1, не выходя за пределы квадрата. За какое наименьшее число шагов можно пройти из A в C?

4. За какое наименьшее число ходов конь может пройти из левого нижнего угла доски 100×100 в правый верхний?

5. На улице стоят дома, в которых $1, 2, 3, \ldots, 50$ этажей, и ещё один, самый высокий дом, в котором x этажей. Дома решили снести, причём каждый день можно снести не более 18 этажей (у каждого дома в день не более одного). Для каких x можно снести все дома за x дней?

6. Два мага сражаются друг с другом. Вначале они оба парят над морем на высоте 100 м. Маги по очереди применяют заклинания вида «уменьшить высоту парения над морем на a м у себя и на b м у соперника», где a, b — действительные числа, $0 < a < b$. Набор заклинаний у магов конечен и одинаков, их можно использовать в любом порядке и неоднократно. Маг выигрывает дуэль, если после чьего-либо хода его высота над морем будет положительна, а у соперника — нет. Существует ли такой набор заклинаний, что второй маг может гарантированно выиграть (как бы ни действовал первый)?

7. Покажите, что любое целое неотрицательное число n может быть представлено в виде

$$n = C_x^1 + C_y^2 + C_z^3,$$

где x, y, z — целые числа такие, что $0 \leq x < y < z$.

Для самостоятельного решения

8. Назовём треугольники сходными, если у них совпадают по длине по две стороны. За один ход можно заменить треугольник на сходный. За какое наименьшее число ходов можно из правильного треугольника со стороной 10 получить правильный треугольник со стороной 1?

9. **(a)** На каждом из полей верхней и нижней горизонтали шахматной доски стоит по фишке: внизу — белые, вверху — чёрные. За один ход разрешается передвинуть любую фишку на соседнюю свободную клетку по вертикали или горизонтали. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы все чёрные фишки стояли внизу, а белые – вверху? **(b)** То же для доски 9×9.

10. Даны $2n$ векторов с ненулевой суммой. Двое по очереди выбирают себе по вектору. Выигрывает тот, у кого сумма векторов по модулю больше. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен действовать?