Матбой-междусобой.

1. Докажите, что в выпуклом n-угольнике нельзя выбрать больше n диагоналей так, чтобы любые две из них имели общую точку.

2. Есть шоколадка в форме равностороннего треугольника со стороной n, разделенная бороздками на равносторонние треугольники со стороной 1. Играют двое. За ход можно отломать от шоколадки треугольный кусок вдоль бороздки, съесть его, а остаток передать противнику. Тот, кто получит последний кусок — треугольник со стороной 1, — победитель. Тот, кто не может сделать ход, досрочно проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

3. Может ли сумма попарных расстояний между вершинами 25-вершинного дерева быть равна 1225 (расстояние — количество ребер в пути между вершинами)?

4. Можно ли разбить числа $1, 2, 3, \ldots, 100$ на три группы так, чтобы в первой группе сумма чисел делилась на 102, во второй — на 203, а в третьей — на 304?

5. На стороне AB треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $AD = EB$. Докажите, что $AC + BC > CD + CE$.

6. По окружности как угодно стоят 2014 девушек и 2014 юношей. Юноши произвольным образом нумеруются, а девушки вооружаются веслами. Первый юноша подкатывает к ближайшей по часовой стрелке девушке и лишает ее весла; затем второй юноша подкатывает к ближайшей по часовой стрелке девушке с веслом, история повторяется и т.д. Докажите, что сумма пройденных юношами расстояний не зависит от их нумерации.

7. Про натуральные числа a, b и c известно, что $a^3 \vdots b$, $b^3 \vdots c$, $c^3 \vdots a$. Докажите, что $(a+b+c)^{13} \vdots abc$.

8. У правильного 1981-угольника отмечены 64 вершины. Докажите, что существует трапеция с вершинами в отмеченных точках.