

Площадь.

Определение–теорема. Каждому многоугольнику на плоскости можно приписать неотрицательное вещественное число так, чтобы:

- (а) равным многоугольникам были приписаны равные числа;
- (б) если многоугольник M разрезан на многоугольники M_1, \dots, M_k , то число, приписанное M , было равно сумме чисел, приписанных многоугольникам M_1, \dots, M_k ;
- (с) прямоугольнику со сторонами a и b было приписано число ab .

Более того, это можно сделать ровно одним способом. Приписанное таким образом многоугольнику число мы и назовём его *площадью*.

1. AP — чевиана в треугольнике ABC . Докажите, что $S(ABP)/S(ACP) = BP/CP$.
2. На продолжениях сторон AB , BC и CA треугольника ABC взяли точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно так, что $AB = BC_1$, $BC = CA_1$, $CA = AB_1$. Найдите $S(A_1B_1C_1)$, если $S(ABC) = 1$.
3. На сторонах AB и AC треугольника отметили точки B_1 и C_1 соответственно. Известно, что $AB = 5$, $BB_1 = 2$, $AC = 7$, $CC_1 = 3$. Найдите $S(ABC)/S(AB_1C_1)$.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Параллелограммом Вариньона четырёхугольника $ABCD$ называется четырёхугольник с вершинами в серединах сторон AB , BC , CD и DA .
 - (а) Докажите, что параллелограмм Вариньона — параллелограмм.
 - (б) Докажите, что его площадь равна половине площади четырёхугольника.
5. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Докажите, что $S(ABO) = S(CDO)$ тогда и только тогда, когда $BC \parallel DA$.
6. Средняя линия делит площадь четырёхугольника пополам. Докажите, что в нём есть две параллельные стороны.

Для самостоятельного решения

7. На плоскости нарисовали два четырёхугольника так, что середины их сторон соответственно совпали. Докажите, что их площади равны.
8. Треугольники AB_1C_1 и AB_2C_2 имеют общий угол A . Докажите, что

$$\frac{S(AB_1C_1)}{S(AB_2C_2)} = \frac{AB_1 \cdot AC_1}{AB_2 \cdot AC_2}.$$

9. Через середину E диагонали AC четырёхугольника $ABCD$ провели прямую, параллельную диагонали BD . Она пересекла сторону BC в точке K . Докажите, что DK делит площадь четырёхугольника пополам.