

Матбой 7профи–8профи

1. В графе без треугольников со 100 вершинами степени всех вершин больше 40. Докажите, что в этом графе нет циклов длины 5.

2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на стороне AB выбрана точка M , а на продолжении стороны AC — точка K такая, что $KM = MC$. Прямая, проходящая через точку B параллельно AC , пересекается с CM в точке P . Докажите, что прямая AP делит отрезок KM пополам.

3. Во всех клетках таблицы 2010×2010 расставлены натуральные числа. Разрешается прибавить по 1 к любым трем числам, стоящим в «уголке» из трёх клеток. Верно ли, что при любой начальной расстановке чисел можно сделать все числа в таблице кратными 10?

4. Дано несколько иррациональных чисел. Про любые два a и b из них известно, что хотя бы одно из чисел $\frac{a}{b+1}$ и $\frac{b}{a+1}$ рационально. При каком наибольшем количестве чисел это возможно?

5. Доску 30×30 разбили на 100 квадратов 3×3 и вырезали из каждого полученного квадрата центральную клетку. Какое наименьшее количество королей нужно поставить на полученную фигуру, чтобы они побили каждую её клетку? (Король бьёт клетку, на которой он стоит)

6. Найдите все такие простые p , что число $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ является квадратом целого числа.

7. Найдите все такие тройки (k, m, n) попарно взаимно простых натуральных чисел, что число

$$(k + m + n) \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)$$

является целым.

8. У папы есть картина, представляющая из себя белый клетчатый прямоугольник, в котором несколько клеток закрашены чёрным. Он хочет нарисовать копию этой картины на бесконечной белой клетчатой плоскости. В день папа закрашивает в чёрный цвет ровно две белых клеточки, а ночью его сынишка бессовестно перекрашивает одну чёрную клетку красной краской. Докажите, что папа сможет нарисовать копию картины (то есть из всей бесконечной клетчатой плоскости можно будет вырезать прямоугольник, на котором нарисовано в точности то же, что и на картине).

9. У ромашки $k > 60$ лепестков. Два козла ходят по очереди: каждый своим ходом отъедает у ромашки три любых лепестка. Каждый делает по 10 ходов. Первый козёл выигрывает, если в конце среди оставшихся лепестков есть два соседних. При каком наименьшем k у него есть выигрышная стратегия?

10. Через точку M — середину стороны AC треугольника ABC ($AB \neq BC$) — провели прямую, параллельную биссектрисе угла B . Она пересекла прямую BC в точке X , а прямую AB — в точке Y . Через точки X и Y провели прямые, перпендикулярные BC и AB соответственно. Докажите, что точка их пересечения равноудалена от вершин A и C .