

Бином Ньютона.

1. Докажите тождество $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

Определение. Выписана бесконечная в обе стороны последовательность, единственный ненулевой элемент которой равен 1. Под каждыми двумя соседними числами пишется их сумма, и получается следующая последовательность; потом с ней проделывают ту же операцию, и так далее. Ненулевые числа образуют *треугольник Паскаля*, его ряды называются *строчками* и последовательно нумеруются, начиная с 0.

2. Выпишите первые 6 строчек треугольника Паскаля. Докажите, что в n -ой строчке треугольника Паскаля стоят числа $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$.

3. Сколько слагаемых будет *после* раскрытия скобок, но *до* приведения подобных в

(a) $(a + b + c + d + e)(k + l + m + o + p + r + s + t)(x + y + z)$;

(b) $(x + y)^{20}$?

(c) Сколько раз в выражении $(x + y)^{20}$ *после* раскрытия скобок, но *до* приведения подобных встретится слагаемое x^3y^{17} ?

(d) Докажите формулу бинома Ньютона (это то, что в рамочке).

4. Докажите, что число $\sqrt{30}((1 + \sqrt{30})^{30} - (1 - \sqrt{30})^{30})$ – целое. Четно оно или нет?

5. На сколько нулей оканчивается число $101^{1000} - 1$?

Для самостоятельного решения

6. Докажите, что 1.000000001 в некоторой степени будет больше 100000.

7. Докажите, что если $x^n + y^n = z^n$ (x, y, z, n – натуральные), то $x, y \geq n$.