Сравнения

1. Докажите, что $53^{53} - 33^{33}$ делится на 10.

2. Докажите свойства сравнений:

(a) если сравнение верно по модулю m, то оно верно и по модулю n, равному любому натуральному делителю числа m;

(b) если сравнение верно по нескольким модулям, то оно верно по модулю, равному наименьшему общему кратному данных модулей;

(c) обе части сравнения можно разделить на их общий делитель, взаимно простой с модулем.

3. Известно, что $a^{100} \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 73)$ и $a^{101} \equiv 69 (\mathrm{mod}\ 73)$. Найдите остаток от деления числа a на 73.

4. При делении натурального числа n на 3 и на 37 получаются, соответственно, остатки 1 и 33. Найдите остаток от деления n на 111.

5. Докажите, что если длины сторон прямоугольного треугольника выражаются целыми числами, то произведение длин катетов делится на 12.

6. Докажите, что ни при каком натуральном k число $3^k + 5^k$ не является квадратом натурального числа.

7. Решите сравнения:

(a) $11x \equiv 5 (\mathrm{mod}\ 7)$;

(b) $42x \equiv 33 (\mathrm{mod}\ 90)$;

(c) $x^2 - 5x + 6 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 35)$.

Для самостоятельного решения

8. Верно ли, что $10! \equiv 7! (\mathrm{mod}\ 1000)$?

9. Докажите, что натуральные числа от 1 до 101 включительно нельзя выписать подряд в некотором порядке так, чтобы полученное число было точным кубом.

10. Решите сравнения:

(a) $92x \equiv 8 (\mathrm{mod}\ 164)$;

(b) $x^2 - 7x \equiv 67 (\mathrm{mod}\ 77)$.

11. Решите в натуральных числах уравнение $2^x + 7^y = 19^z$.

12. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы **(a)** двух квадратов; **(b)** трех квадратов.