Имеется надёжное для применения правило:
когда математик или философствующий автор
пишет с туманной утончённостью,
он говорит бессмыслицу.

Альфред Норт Уайтхед.

«Материалы занятий Кировской ЛМШ-2014. 7 класс ПРОФИ.» – сего незатейливого именования удостоилась хроника неукротимой войны с задачами, которую вели питомцы профигруппы параллели 7 класса Кировской ЛМШ в лето 2014 года Anno Domini, в месяц июль, запечатлившийся в пямяти местных вишкильских поселян недородом огурцов и томатов на любовно возделываемых ими огородах, ввиду несравнимо более хладного лета, нежели обыкновенно.

До нелепости неуместным представляется нам описывать выдаваемые ученикам неторопливо и обстоятельно взлелеянные листки с задачами как «материалы занятий» – нет сомнений, что таковое речение мог измыслить только чуждый стезе математического образования глупец.

Намного вернее было бы именовать сие «Расплывчатым отражением проистекавшего на занятиях единения сведущих в науках наставников и взыскующих истину учеников», но традиции и время выжгли со страниц тридцатилетней истории ЛМШ более уместное заглавие, а потому нам пришлось безропотно подчиниться устоявшемуся обыкновению.

...

[следующие 2^{10} страниц предисловия вырезаны в типографии]

...

В том и зрим мы главную пользу и лучший плод знакомства с листками наших занятий, что видишь тут всякого рода поучительные примеры в обрамленье величественного целого; здесь и для себя, и для других ты найдешь, чему подражать, и здесь же – чего избегать.

Авторы

1. На доске написано число 76. Каждую минуту число стирают с доски и на его место записывают произведение его цифр, увеличенное на 12. Какое число окажется на доске через час (то есть чему равно 61-е число)?

2. Один преподаватель оставил на дверях всех комнат записки следующего содержания: «Я в комнате номер …» и исчез в неизвестном направлении (записки на разных дверях могут сообщать разную информацию). Настойчивый школьник начал поиски преподавателя, руководствуясь этими указаниями. Докажите, что с некоторого момента он начнет двигаться по циклу.

3. Каждое следующее число в последовательности целых чисел получается из предыдущего так: число возводится в квадрат, и из него вычеркиваются все цифры, кроме последних четырех. Докажите, что последовательность периодическая, и длина периода не больше 10000.

4. Найдите сотую цифру после запятой числа $4/135$.

Простой принцип зацикливания. *Если система может находиться в конечном числе состояний, и каждое следующее состояние однозначно определяется по предыдущему, то система с некоторого момента зациклится.*

5. Последовательность натуральных чисел строится так: первые два члена произвольны, а каждое следующее число равно последней цифре суммы квадратов двух предыдущих членов. Докажите, что эта последовательность всегда зацикливается.

6. Жители страны Пуп Мира очень гордятся тем, что у них президентская форма правления: каждые 4 года президентом избирается либо республиканец, либо демократ. ПупМировские политологи обнаружили строгий закон, по которому определяется партийность очередного президента. Хотя этот закон засекречен «Актом о демократии», в печать просочились сведения, что партийность очередного президента полностью определяется партийностью предыдущих десяти. Докажите, что последовательность партийностей президентов зациклится, и оцените как-нибудь длину периода.

Составной принцип зацикливания. *Если система может находиться в конечном числе состояний, и каждое следующее состояние однозначно определяется по фиксированному числу предыдущих, то система с некоторого момента зациклится.*

7. Вот уже миллиард лет погода в Вишкиле в данный день полностью определяется предыдущей декадой. Как известно, существует восемь типов погоды. Во все дни последней недели погода была разная. Докажите, что еще когда-нибудь встретится неделя с точно такой же погодой.

Для самостоятельного решения

8. Докажите, что в задаче 3 длина периода не больше **(a)** 5000; **(b)** 2500.

9. Вася написал программу для своего компьютера, которая должна печатать на принтере цифры десятичной записи числа $\sqrt{2}$. Докажите, что у Васи ничего не получилось: его программа рано или поздно напечатает неправильную цифру.

4 июля — Вступительная олимпиада.

1. В избушке живут три медведя: Михаил Иванович, Настасья Петровна и их сын Мишутка. Михаил Иванович налил в тарелку 5 поварешек супа, а Настасья Петровна — 2 поварешки. Михаил Иванович съедает свою порцию за 6 минут, а Настасья Петровна — за 4 минуты. Если Мишутка будет есть суп вместе с папой, то папина порция будет съедена за 5 минут. За какое время будет съедена мамина порция, если Мишутка будет есть вместе с мамой?

2. Таня стоит на берегу речки. У неё есть два пустых кувшина: один – на 5 литров, а про второй Таня помнит лишь то, что он вмещает то ли 3, то ли 4 литра. Помогите Тане определить ёмкость второго кувшина. (Заглядывая в кувшин, нельзя понять, сколько в нём воды.)

3. Толя и Гриша живут в Дубае в высотном доме с одним подъездом, в котором на каждом этаже 10 квартир. Номер этажа Толи равен номеру квартиры Гриши. Может ли сумма номеров их квартир равняться 2014?

4. Можно ли покрасить клетки таблицы 8×8 в 16 цветов (каждая клетка красится в один цвет) так, чтобы для любых различных двух цветов нашлись клетки, которые покрашены этими цветами и имеют общую сторону?

5. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD отмечена точка E – середина BC. Оказалось, что $\angle BAE + \angle EDC = 90^\circ$, $AB = 7$, $CD = 10$. Найдите AD.

6. В отряде 101 боец. Каждый вечер трое из них выходят в дозор. При этом любая пара солдат не может ходить в дозор вместе более трех раз. Какое максимальное количество вечеров отряд может отправлять в дозор бойцов?

1. Докажите, что при нечётных m и n число $1^n+2^n+\dots+(m-1)^n$ делится на m.

2. Докажите, что $36^{36}+41^{41}$ делится на 77.

3. Известно, что $a+2c$ и $b+3d$ делятся на 7. Докажите, что $ab-6cd$ делится на 7.

4. Докажите, что для любого n число $5^{2n+1}+3^{n+2}2^{n-1}$ делится на 19.

5. По кругу стоят 6 девочек, у которых $10, 20, \dots, 60$ конфет соответственно. Время от времени случайная девочка раздает по одной конфете всем остальным девочкам (если у неё хватает для этого конфет). Докажите, что такими операциями нельзя добиться того, чтобы у всех девочек стало поровну конфет.

6. Докажите, что $5^{100}-2^{100}$ делится на $2^{10}+5^{10}$.

7. Докажите, что $(3^n+1)^n-2$ делится на 3^n-2.

8. $p_1, \dots, p_n$ – первые n простых чисел. Докажите, что число $p_1 \dots p_n+1$ не является квадратом.

9. Решите в натуральных числах уравнение $3^n+7=2^m$.

10. Последовательность a_n такова, что $a_1=3$, $a_{n+1}=a_n^2-2$. Докажите, что любые два различных члена этой последовательности взаимно просты.

11. p – простое, $2^p+3^p=a^n$. Докажите, что $n=1$.

Для самостоятельного решения

12. Существует ли степень двойки, из которой перестановкой цифр (0 ставить на первое место нельзя) можно получить другую степень двойки?

13. Числа $a_1, \dots, a_n$ дают все остатки при делении на n. Числа $b_1, \dots, b_n$ тоже дают все остатки при делении на n. При каких n может получиться так, что числа $a_1+b_1, \dots, a_n+b_n$ дают все остатки при делении на n?

14. Есть 11 целых чисел. Докажите, что можно таким способом домножить каждое из них на коэффициент 0, -1 или $+1$ и сложить, чтобы сумма делилась бы на 2014 (при этом хотя бы один коэффициент должет быть отличен от нуля).

Если некоторая целочисленная величина время от времени меняется (увеличивается или уменьшается) не более, чем на 1, то она принимает все значения между начальным и конечным. Эта величина называется *дискретной*, а предыдущее утверждение – принципом *дискретной непрерывности.*

1. Леонид Михайлович начал писать Алексею Анатольевичу сообщения по поводу занятий в ЛМШ. Наконец, после 100-го сообщения Алексей Анатольевич сподобился ответить Леониду Михайловичу, и между ними завязалась оживленная переписка. В какой-то день после этого Леонид Михайлович был настолько занят, что Алексею Анатольевичу пришлось отправить 50 писем, прежде чем достучаться до него. Докажите, что найдется отрезок времени, в течение которого они отправили друг другу ровно по 30 писем.

2. Вася выписывает натуральные числа, первое из которых равно 1. Каждое следующее число или на 1 больше предыдущего, или является собственным делителем предыдущего. Последнее равно 1000. Докажите, что в строке найдется число 123.

3. В ряд сидят 15 мальчиков и 15 девочек.

(a) Докажите, что можно выбрать 10 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.

(b) Всегда ли из них можно выбрать 20 школьников подряд, среди которых мальчиков и девочек поровну?

4. По кругу сидят 15 мальчиков и 15 девочек.

(a) Докажите, что можно выбрать 20 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.

(b) Докажите, что для каждого $2n = 2, 4, \dots, 30$ можно выбрать $2n$ школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.

5. (a) На плоскости есть $2n$ точек. Докажите, что можно провести прямую так, что с каждой стороны от нее будет находиться n точек.

(b) На плоскости есть $2n+1$ точка, никакие три не лежат на одной прямой. Докажите, что через любую из них можно провести прямую так, что с каждой стороны от нее будет находиться n точек.

Для самостоятельного решения

6. В последовательности натуральных чисел каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в этой последовательности встретится четное число.

Что мы знаем? Правило суммы, правило произведения, число размещений A_n^k и формулу для него, число сочетаний C_n^k и формулу для него.

1. Эмблема состоит из 6 полосок, каждая может быть 5 цветов. При этом любые две соседние полоски должны быть разного цвета. Сколько возможно эмблем?

2. (a) Сколькими способами можно из 10 юношей и 15 девушек составить команду из трех юношей и трех девушек?

(b) Сколькими способами можно из 10 юношей и 15 девушек составить три пары (пара состоит из юноши и девушки)?

3. Отмечены вершины и середины сторон правильного десятиугольника (то есть всего отмечено 20 точек). Сколько существует треугольников с вершинами в отмеченных точках?

4. (a) Сколькими способами можно переставить буквы в слове ПОВТОРРР?

(b) Сколькими способами можно переставить буквы в слове БАРАБАНБАРАБАН?

(c) Есть a_1 одинаковых предметов 1 типа, a_2 – 2 типа, $\ldots$, a_s – s-го типа. Сколькими способами можно выложить эти предметы в ряд?

5. Сколькими способами можно расставить на черные поля шашечной доски 12 черных и 12 белых шашек?

6. Сколькими способами можно переставить буквы в слове БАРАБАН так, чтобы три буквы А не шли подряд?

7. (a) Имеется 10 белых шаров и 4 черных шара. Сколькими способами можно все шары выложить в ряд так, чтобы никакие два черных шара не лежали рядом?

(b) Задача та же, но шары лежат по окружности (и если способы отличаются друг от друга поворотом, то это – разные способы).

8. (a) Прямоугольник вертикальными линиями разрезан на 20 прямоугольников. Сколько прямоугольников есть на полученной картинке?

(b) Сколько есть прямоугольников из клеток на шахматной доске?

9. На устной олимпиаде каждый из n школьников сдал от 0 до 5 задач, причем общее количество сданных задач кратно трем. Результаты олимпиады подводятся по количеству решенных задач. Сколько возможно результатов? (Результат – это итоговый протокол, где указано, сколько задач сдал каждый школьник.)

Для самостоятельного решения

10. Дан правильный 99-угольник. Сколькими способами можно выбрать три его вершины так, чтобы они являлись вершинами равнобедренного треугольника?

11. Сколькими способами из n-элементного множества можно выбрать

(a) подмножество;

(b) непересекающиеся подмножества A и B;

(c) подмножества A и B такие, что A содержится в B?

(d) два подмножества, пересекающиеся ровно по трем элементам ($n > 3$)?

12. Доступ к сейфу имеют 11 членов комиссии. Каким наименьшим числом замков можно снабдить сейф для того, чтобы при определенном наборе ключей любые шестеро, собравшись вместе, могли его открыть, а любых пяти было бы недостаточно?

---

06 июля — Площадь.

Определение–теорема. Каждому многоугольнику на плоскости можно приписать неотрицательное вещественное число так, чтобы:

(a) равным многоугольникам были приписаны равные числа;

(b) если многоугольник M разрезан на многоугольники $M_1, \ldots, M_k$, то число, приписаное M, было равно сумме чисел, приписанных многоугольникам $M_1, \ldots, M_k$;

(c) прямоугольнику со сторонами a и b было приписано число ab.

Более того, это можно сделать ровно одним способом. Приписанное таким образом многоугольнику число мы и назовём его *площадью*.

1. AP — чевиана в треугольнике ABC. Докажите, что $S(ABP)/S(ACP) = BP/CP$.

2. На продолжениях сторон AB, BC и CA треугольника ABC взяли точки C_1, A_1 и B_1 соответственно так, что $AB = BC_1$, $BC = CA_1$, $CA = AB_1$. Найдите $S(A_1B_1C_1)$, если $S(ABC) = 1$.

3. На сторонах AB и AC треугольника отметили точки B_1 и C_1 соответственно. Известно, что $AB = 5$, $BB_1 = 2$, $AC = 7$, $CC_1 = 3$. Найдите $S(ABC)/S(AB_1C_1)$.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. *Параллелограммом Вариньона* четырёхугольника $ABCD$ называется четырёхугольник с вершинами в серединах сторон AB, BC, CD и DA.

(a) Докажите, что параллелограмм Вариньона — параллелограмм.

(b) Докажите, что его площадь равна половине площади четырёхугольника.

5. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что $S(ABO) = S(CDO)$ тогда и только тогда, когда $BC \parallel DA$.

6. Средняя линия делит площадь четырёхугольника пополам. Докажите, что в нём есть две параллельные стороны.

Для самостоятельного решения

7. На плоскости нарисовали два четырёхугольника так, что середины их сторон соответственно совпали. Докажите, что их площади равны.

8. Треугольники AB_1C_1 и AB_2C_2 имеют общий угол A. Докажите, что

$$\frac{S(AB_1C_1)}{S(AB_2C_2)} = \frac{AB_1 \cdot AC_1}{AB_2 \cdot AC_2}.$$

9. Через середину E диагонали AC четырёхугольника $ABCD$ провели прямую, параллельную диагонали BD. Она пересекла сторону BC в точке K. Докажите, что DK делит площадь четырёхугольника пополам.

6 июля — Разнобой–1.

1. В таблице размером 10×10 расставлены произвольные числа. Разрешено одновременно изменять знак у всех чисел какого-то одного столбца или у всех чисел какой-то одной строки. Докажите, такими операциями можно получить таблицу, у которой суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце неотрицательны.

2. Докажите, что для любого четного n число $20^n + 16^n - 3^n - 1$ делится на $323 (= 17 \cdot 19)$.

3. На доске написано число «2». Играют двое. За один ход разрешается к уже имеющемуся числу добавить любой его делитель, отличный от самого числа. Тот, кто первым получит число, большее 2014^{2014} **(a)** выигрывает; **(b)** проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

4. Белка прятала орехи. Известно, что от каждого тайника к следующему она пробегала не больше 3 м. Оказалось, что расстояние от первого тайника до последнего равно 100 м. Докажите, что найдутся два тайника, расстояние между которыми не меньше 22 метров и не больше 25 метров.

(a) Белка прыгает на прямой.

(b) Белка прыгает на плоскости.

5. На шахматной доске расставлено 10 королей. После нескольких ходов оказалось, что каждый король побывал на всех полях ровно по разу и вернулся на исходное поле. Докажите, что был момент, когда ни один из королей не стоял на своем исходном поле.

---

7 июля — Бином Ньютона.

1. Докажите тождество $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

Определение. Выписана бесконечная в обе стороны последовательность, единственный ненулевой элемент которой равен 1. Под каждыми двумя соседними числами пишется их сумма, и получается следующая последовательность; потом с ней проделывают ту же операцию, и так далее. Ненулевые числа образуют *треугольник Паскаля*, его ряды называются *строчками* и последовательно нумеруются, начиная с 0.

2. Выпишите первые 6 строчек треугольника Паскаля. Докажите, что в n-ой строчке треугольника Паскаля стоят числа $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$.

3. Сколько слагаемых будет *после* раскрытия скобок, но *до* приведения подобных в

(a) $(a+b+c+d+e)(k+l+m+o+p+r+s+t)(x+y+z)$;

(b) $(x+y)^{20}$?

(c) Сколько раз в выражении $(x+y)^{20}$ *после* раскрытия скобок, но *до* приведения подобных встретится слагаемое x^3y^{17}?

(d) Докажите формулу бинома Ньютона (это то, что в рамочке).

4. Докажите, что число $\sqrt{30}\big((1+\sqrt{30})^{30} - (1-\sqrt{30})^{30}\big)$ – целое. Четно оно или нет?

5. На сколько нулей оканчивается число $101^{1000} - 1$?

Для самостоятельного решения

6. Докажите, что 1.000000001 в некоторой степени будет больше 100000.

7. Докажите, что если $x^n + y^n = z^n$ (x, y, z, n – натуральные), то $x, y \geqslant n$.

1. AL — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $BL/CL = AB/AC$.

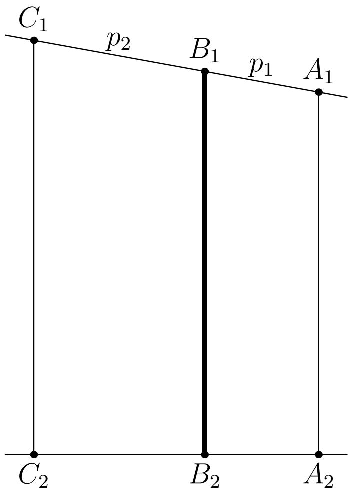
2. Даны треугольники ABC_1 и ABC_2. Пусть прямая C_1C_2 пересекает прямую AB в точке K. Докажите, что $S(ABC_1)/S(ABC_2) = C_1K/C_2K$ (хотя бы в одной конфигурации).

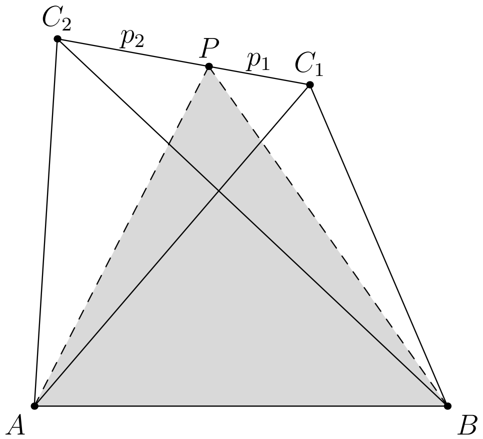
3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке K. На биссектрисе угла AKD нашлась точка P такая, что прямые BP и CP делят пополам отрезки AC и BD соответственно. Докажите, что $AB = CD$.

4. Точка E — середина стороны CD четырёхугольника $ABCD$. Известно, что площадь треугольника ABE составляет половину площади $ABCD$. Докажите, что какие-то две стороны четырёхугольника параллельны.

5. На картинке докажите, что $B_1B_2 = \frac{p_2}{p_1+p_2}A_1A_2 + \frac{p_1}{p_1+p_2}C_1C_2$.

6. На картинке докажите, что $S(ABP) = \frac{p_2}{p_1+p_2}S(ABC_1) + \frac{p_1}{p_1+p_2}S(ABC_2)$.





7. Точки K и L — середины сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$, отрезки DK и AL пересекаются в точке P, а отрезки CK и BL — в точке Q. Докажите, что сумма площадей треугольников APD и BQC равна площади четырёхугольника $PKQL$.

Для самостоятельного решения

8. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны и пересекаются в точке O. Точка P внутри треугольника AOD такова, что $CD \parallel BP$ и $AB \parallel CP$. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе угла AOD.

9. На стороне AB четырёхугольника $ABCD$ выбраны точки K и L так, что $AK = KL = LB$. На стороне CD выбраны точки M и N так, что $CM = MN = ND$. Докажите, что $S(KLNM) = \frac{1}{3}S(ABCD)$.

7 июля Разнобой–2.

1. Докажите, что число $5^n - 1$ не может делиться на число на $4^n - 1$.

2. От клетчатой доски $m \times n$ ($m > 2$, $n > 2$) осталась только рамка ширины 1. За один ход можно выпилить одну или несколько клеток, образующих прямоугольник, лишь бы при этом оставшая часть не распалась на два куска. Кто не может сделать ход — проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

3. Каждый из 102 человек имеет не менее 68 знакомых. Докажите, что найдутся четверо, имеющие одинаковое число знакомых.

4. В городе живут трезвенники и алкоголики. Каждый день некоторый человек, у которого более половины знакомых ведут образ жизни, отличный от его образа жизни, меняет свои взгляды. Докажите, что рано или поздно изменения взглядов прекратятся.

5. За круглым столом сидит четное число людей. Количество денег у любых двух соседей отличается не более, чем на 100 руб. Докажите, что найдутся два человека, сидящих напротив друг друга, у которых количество денег так же отличается не более, чем на 100 руб.

6. В Москве 7 высоток. Турист-математик хочет найти такую точку, из которой эти высотки видны в заданном порядке (начиная с МГУ, по часовой стрелке). Всегда ли ему удасться это сделать?

08 июля Ликбез по теореме Фалеса и подобию.

1. (**Теорема Фалеса**) На одной из сторон угла с вершиной O отмечены точки A_1, B_1, C_1, а на другой — точки A_2, B_2, C_2 такие, что $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel C_1C_2$. Докажите, что

(**a**) если $A_1B_1 = B_1C_1$, то $A_2B_2 = B_2C_2$;

(**b**) если $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$, то $\frac{A_2B_2}{B_2C_2} = \frac{m}{n}$;

(**c**) $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}$, не зависимо от того, рационально ли отношение $\frac{A_1B_1}{B_1C_1}$.

2. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки B_1 и C_1 соответственно, такие, что $B_1C_1 \parallel BC$. Докажите, что $\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$.

Определение. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называются *подобными*, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Число $k = \frac{AB}{A_1B_1}$ называется *коэффициентом подобия*.

Три признаки подобия. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, если выполнено одно из следующих условий.

(a) $\angle A = \angle A_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

(b) $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$.

(c) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

3. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны с коэффициентом k (т. е. $\frac{AB}{A_1B_1} = k$). Тогда $\frac{S(ABC)}{S(A_1B_1C_1)} = k^2$.

9 июля — Графы-1

1. Можно ли все ребра и диагонали правильного 55-угольника раскрасить в 54 цвета так, чтобы ребра, выходящие из одной вершины, были разного цвета?

2. Рёбра графа покрашены в 3 цвета таким образом, что из каждой вершины исходят рёбра каждого цвета. Докажите, что в графе есть цикл, содержащий рёбра каждого цвета.

3. В куче лежат 10 камней. Её делят на две части, затем одну из частей опять делят надвое и т.д., до тех пор, пока не получат 10 отдельно лежащих камней. При каждом делении одной из куч на две части на доску записывается произведение количеств камней в этих частях. Чему будет равна сумма всех чисел на доске в конце?

4. В связном графе с 1000 вершинами степень каждой вершины не более 3. Докажите, что в нём найдётся самонепересекающийся путь из 9 рёбер.

5. Среди любых четырёх человек отряда М7 найдётся человек, который дружит с остальными тремя. Докажите, что найдётся человек, который дружит со всеми детьми отряда М7.

6. В стране есть столица и остальные города, между некоторыми проведены дороги. От столицы идут прямые дороги ровно в 100 городов, от остальных городов — в 10. Известно, что по дорогам можно доехать от любого города до любого другого. Докажите, что можно так закрыть 50 дорог, исходящих из столицы, чтобы это свойство сохранилось.

7. На планете 1000 городов, среди которых есть столицы государств. Некоторые города связаны дорогами так, что любая дорога соединяет ровно два города, и от любого города до любого другого можно добраться по дорогам. При этом, чтобы попасть из одной столицы в другую, нужно проехать не менее 21 дороги. Докажите, что на планете не больше 90 столиц.

Для самостоятельного решения

8. В связном графе 90 вершин, причём степень каждой не меньше 10. Докажите, что каждую вершину можно дополнить до 4 вершин так, чтобы в подграфе на этих 4 вершинах степень каждой была бы не менее 2.

9. В нашем арсенале есть 20 бусинок 10 цветов, по 2 бусинки каждого цвета.

(a) Их раскидали в 10 коробок по 2 бусинки. Докажите, что можно выбрать по одной бусинке из коробки так, чтобы все цвета были представлены.

(b) Докажите, что количество способов сделать это равно степени двойки.

(c) Бусинки раскидали по коробкам как попало. Оказалось, что всё равно можно вынуть по одной бусинке из коробки так, чтобы все цвета были представлены. Докажите, что количество способов сделать это равно степени двойки.

10. В каждой из трёх школ учится по 100 человек. Оказалось, что у каждого ученика любой из школ ровно 101 знакомый среди учеников других двух школ. Докажите, что найдутся три ученика разных школ, которые знают друг друга.

---

9 июля — Подобие.

---

1. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) на стороне AB выбрана точка D, а на продолжении луча AC за точку C выбрана точка E так, что $BD = CE$. Отрезки DE и BC пересекаются в точке G. Докажите, что $DG = GE$.

2. Докажите, что середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения боковых сторон трапеции лежат на одной прямой.

3. Точки K, L на сторонах BC, AC соотвественно треугольника ABC таковы, что $BK : KC = 1 : 3$, $AL : LC = 2 : 5$. Отрезки BL и AK пересекаются в точке O. Найдите $AO : OK$.

4. AA_1 и BB_1 – высоты **(a)** остроугольного; **(b)** тупоугольного треугольника ABC. Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику A_1B_1C.

5. Точки M и N лежат на сторонах соответственно AB и AD параллелограмма $ABCD$, причём $AM : MB = 1 : 2$, $AN : ND = 3 : 2$. Отрезки DM и CN пересекаются в точке K. Найдите $DK : KM$.

6. Дан треугольник ABC такой, что $\angle A = 2\angle B$. Докажите, что $a^2 = b^2 + bc$.

Для самостоятельного решения

7. Каждая сторона выпуклого четырёхугольника разделена на три равные части. Соответствующие точки деления на противоположных сторонах соединены отрезками. Докажите, что эти отрезки делят друг друга на три равные части.

8. Точки D, E и F – середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Докажите, что если $AD = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$, то $\angle DAC = \angle EFC$.

9 июля Разнобой–3.

1. **(a)** В ряд лежат 20 одинаковых монет. Сколькими способами их можно разбить на 5 (различных) непустых групп подряд идущих монет?

(b) В ряд лежат 20 одинаковых монет. Сколькими способами их можно разбить на 5 (различных) групп (возможно, пустых) подряд идущих монет?

2. По кругу лежат 100 монет, причем стороны, которыми они обращены вверх, у них чередуются. Можно одновременно переворачивать несколько подряд идущих монет. За какое наименьшее число операций можно перевернуть все монеты на одну сторону?

3. Двое игроков по очереди выписывают натуральные числа. Первое число должно быть однозначным, каждое следующее получается из предыдущего умножением на некоторую цифру, большую 1. Проигрывает тот, кто первым напишет число, большее триллиона. Кто из игроков выигрывает при правильной игре?

4. Докажите, что произведение n последовательных целых чисел делится на $n!$.

5. Дан связный граф G с k рёбрами. Докажите, что можно занумеровать рёбра всеми числами $1, 2, \ldots, k$ так, чтобы для каждой вершины степени не меньшей двух, набор чисел, которыми помечены рёбра из этой вершины, имел НОД, равный 1.

Определение. *Наибольшим общим делителем (НОД)* чисел a и b называется наибольшее натуральное число d такое, что a и b делятся на d. Обозначение: $d = (a, b)$.

Упр1. Докажите, что **(a)** $(a, b) = (a-b, b)$; **(b)** если $a = bq+r$, то $(a, b) = (b, r)$ (*алгоритм Евклида*).

Упр2. На какие натуральные числа может быть сократима дробь $\frac{13n+8}{8n+5}$?

Упр3. Докажите, что $(ac, bc) = c \cdot (a, b)$.

Упр4. Найдите **(a)** $(99! + 100!, 101!)$; **(b)** $(\underbrace{11\ldots1}_{51}, \underbrace{11\ldots1}_{81})$.

Упр5. Докажите, что если дробь $\frac{an+b}{cn+d}$ при некотором n сократима на число x, то $x \mid ad - bc$.

Упр6. Докажите, что любой общий делитель двух чисел делит их НОД.

Теорема о линейном разложении НОД. Для любых целых a и b найдутся x и y такие, что

$$\boxed{ax + by = (a, b)}$$

Упр7. На прямой сидит блоха, которая может прыгать либо на 15 сантиметров **влево**, либо на 21 сантиметр **вправо**. В каких точках прямой она может побывать?

1. Числа x^{2014} и x^{23} — рациональны. Докажите, что число x тоже рационально.

2. Докажите, что $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$.

3. На доске написаны натуральные числа $a_1, \ldots, a_k$, НОД$(a_1, \ldots, a_k) = 1$. Разрешается взять два числа и из большего вычесть меньшее. Докажите, что такими операциями можно получить число 1.

Для самостоятельного решения

4. Племя Мумбо-Юмбо решило выпустить в обращение денежные купюры достоинством a мумбов и b мумбов, $(a, b) = 1$.

(a) Докажите, что этими купюрами можно заплатить любую сумму денег (возможно, со сдачей).

(b) Докажите, что $ab - a - b$ мумбов нельзя заплатить без сдачи.

(c) Докажите, что любую сумму, большую $ab - a - b$ мумбов, можно заплатить без сдачи.

1. n-угольник разбили непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что проведено $n-3$ диагоналей и получилось $n-2$ треугольника.

2. Выпуклый n-угольник разбили непересекающимися диагоналями на треугольники. За один ход можно взять два треугольника с общей стороной, и сменить диагональ получившегося четырёхугольника на другую. Докажите, что такими операциями можно получить любую другую триангуляцию.

3. Докажите, что прямоугольник $m \times n$ режется на уголки из 3 клеток чётным числом способов.

4. Докажите, что любое натуральное число от 1 до $n!$ можно представить в виде суммы не более чем n делителей числа $n!$.

5. Прямоугольник разбит на доминошки. Докажите, что его клетки можно раскрасить в два цвета так, чтобы любая доминошка в данном разбиении содержала клетки разных цветов, но в любом другом разбиении этого прямоугольника на доминошки нашлась бы доминошка, содержащая две клетки одного цвета.

6. k и n — натуральные числа, большие 1. В группе из kn человек каждый знаком более, чем с $(k-1)n$ из остальных. Докажите, что можно выбрать $k+1$ человека так, что все они знакомы друг с другом.

Для самостоятельного решения

7. В n одинаковых мензурок налиты n разных жидкостей, кроме того, имеется одна пустая мензурка. Докажите, что можно составить равномерные смеси в каждой мензурке (то есть сделать так, чтобы в каждой мензурке было ровно $1/n$ от начального количества каждой жидкости), и при этом одна мензурка была бы пустой. Отмерять можно любой объём жидкости (в пределах объёма мензурки).

8. На бесконечной клетчатой доске эволюционирует «жизнь». Вначале все клетки были белыми, а потом n из них стали вдруг черными. Каждую минуту клетка красится в тот цвет, которого больше среди трех клетов: ее самой, соседа справа и соседа сверху. Докажите, что

(a) рано или поздно все черные клетки исчезнут;

(b) это случится не более, чем через n минут.

10 июля Разнобой–4.

1. Натуральные числа x, y таковы, что $x^2y + 1 \vdots xy - 1$. Найдите все такие пары (x, y).

2. Два кота делят огромную цепочку из 100 сосикок с мышатиной и 200 сосисок с крысятиной. Они хотят разделить ее так, чтобы каждому досталось ровно по половине сосисок каждого вида. Какое минимальное число разрезов надо сделать для этого?

3. Двое игроков играют в игру. Они по очереди берут из кучки из n камней 1, 2 или 3 камня, причем нельзя повторять последний ход соперника. Кто не может сделать ход – проиграл. Для каждого n определите, кто выигрывает при правильной игре.

4. Найдите первые 100 знаков после запятой в десятичной записи числа $(\sqrt{26} + 5)^{1000}$.

5. Есть выпуклый n-угольник. Докажите, что можно выбрать три его стороны так, что среди них нет параллельных, и многоугольник лежит внутри треугольника, образованного этими тремя прямыми.

11 июля Линейные диофантовы уравнения.

Теорема. Пусть a и b – взаимно простые числа. Тогда

(a) уравнение $ax + by = c$ имеет бесконечно много целочисленных решений;

(b) все решения имеют вид $\begin{cases} x = x_0 + bt, \\ y = y_0 - at \end{cases}$, где t – произвольное целое число, а (x_0, y_0) – одно из решений уравнения $ax + by = c$.

Для того, чтобы решить в целых числах линейное уравнение $ax + by = c$ $(a, b \neq 0)$, необходимо действовать в соответствии со следующим **алгоритмом**:

1. Находим $d = \text{НОД}(a, b)$.

2. Проверяем, делится ли c на d. Если нет, то уравнение не имеет решений; если да, то делим обе части на d, переходя к равносильному уравнению $a'x + b'y = c'$ со взаимно простыми $a' = \frac{a}{d}$, и $b' = \frac{b}{d}$ и правой частью $c' = \frac{c}{d}$.

3. Находим частное решение (x_0, y_0) уравнения $a'x + b'y = c'$ (если получается — подбором, если нет — с помощью алгоритма Евклида).

4. Записываем решение уравнения $a'x + b'y = c'$ в виде $\begin{cases} x = x_0 + b't, \\ y = y_0 - a't \end{cases}$, $t \in \mathbb{Z}$.

1. Блоха прыгает по прямой, либо на 37 см влево, либо на 47 см вправо. За какое наименьшее число прыжков она может оказаться на 2 см правее исходной точки?

2. Две разметочные машины поехали по дороге в одном направлении. Одна ставит синие пометки через каждые 229 метров, а другая — красные через каждые 11111 метров. Докажите, что найдутся две пометки на расстоянии 1 метр, и при этом идет **(a)** сначала красная, потом синяя; **(b)** наоборот.

3. Света задумала натуральное число, умножила его на 54321, затем поделила с остатком на 2014 и получила в остатке 73. Могло ли такое произойти?

Для самостоятельного решения

4. В клетчатом прямоугольнике $m \times n$ провели диагональ. Сколько клеток она пересекла **(a)** если $(m, n) = 1$; **(b)** в общем случае?

11 июля — Деревья.

Опр1. *Циклом* называется замкнутый путь по ребрам графа. *Простым циклом* называется замкнутый путь по ребрам графа без повторяющихся ребер.

Опр2. *Деревом* называется связный граф без (простых) циклов.

Опр3. *Висячая вершина* графа — это вершина степени 1.

1. В дереве каждые две вершины соединены ровно одним путем. Верно и обратное: если в графе каждые две вершины соединены ровно одном путем, то это дерево.

Лемма о висячей вершине. В дереве, число вершин которого больше 1, найдется висячая вершина (и даже две).

Теорема. **(a)** В дереве с n вершинами $n - 1$ ребро.

(b) Любое ребро дерева является мостом.

Опр4. *Остовом (остовным деревом, скелетом)* графа называется подграф, содержащий все вершины графа и являющийся деревом.

2. **(a)** В каждом связном графе есть остовное дерево.

(b) Для каждой вершины найдется такое остовное дерево, в котором есть все ребра из этой вешины.

3. Дан связный граф с n вершинами. Докажите, что

(a) в нем не менее чем $n-1$ ребро;

(b) если ребер $n-1$, то это — дерево.

4. Докажите, что в произвольной связной сети метро можно закрыть одну станцию вместе со всеми выходящими из нее линиями, чтобы сеть осталась связной.

5. Можно ли раскрасить ребра куба в два цвета так, чтобы по ребрам каждого цвета можно было пройти из любой вершины в любую другую?

6. Хромая ладья обошла все клетки шахматной доски ровно по разу. Докажите, что некоторые три подряд идущих хода были в трех разных направлениях.

7. В некотором поселке 1000 жителей. Ежедневно каждый из них делится узнанными вечером слухами со всеми своими знакомыми. Известно, что любой слух становится известным всем жителям. Докажите, что можно выбрать 90 человек так, что если сообщить им некоторый слух, то через 10 дней он станет известен всем жителям.

Для самостоятельного решения

8. Вершины дерева окрашены в синий и красный правильным образом (то есть одноцветные вершины не смежны), причем красных вершин не меньше, чем синих. Докажите, что в этом дереве имеется висячая красная вершина.

9. Докажите, что на ребрах **(a)** дерева; **(b)** произвольного графа можно так расставить стрелки, чтобы для каждой вершины разность между числом входящих и выходящих стрелок была бы не более 1.

11 июля — Неравенство треугольника.

1. $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник. Докажите, что $AB+CD < AC+BD$.

2. Внутри треугольника ABC выбрана точка O. Докажите, что $AB + BC > AO + OC$.

3. Сторону AB треугольника ABC разбили точками D и E на три равные части. Докажите, что $AC + BC > CD + CE$.

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы при стороне BC равны. Оказалось, что $\angle A > \angle D$. Докажите, что $AB < CD$.

5. Докажите, что в выпуклом пятиугольнике найдутся три диагонали, из которых можно составить треугольник.

6. Докажите, что в параллелограмме против большего угла лежит большая диагональ.

7. На сторонах треугольника ABC внешним образом построили параллелограммы $ABKL$, $BCMN$ и $CAPQ$. Докажите, что из отрезков KN, MQ и PL можно составить треугольник.

Для самостоятельного решения

8. Имеется 10 отрезков, причём известно, что длина каждого — целое число сантиметров. Два самых коротких отрезка — по сантиметру, самый длинный — 50 см. Докажите, что среди отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник.

9. На круглом столе лежат 2010 правильно идущих механических часов. Докажите, что в какой-то момент времени сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок будет больше, чем сумма расстояний от центра стола до центров часов.

10. Отрезки AB и CD длины 1 пересекаются в точке O, причём $\angle AOC = 60^\circ$. Докажите, что $AC + BD \geqslant 1$.

12 июля ГМТ.

1. Найдите ГМТ, из которых данный отрезок AB виден под прямым углом.

2. Найдите ГМТ, равноудалённых от трёх прямых.

3. Дан квадрат. Найдите все точки такие, что сумма расстояний от каждой из них до двух противоположных сторон квадрата равна сумме расстояний до двух других сторон (под расстоянием от точки до стороны квадрата в этой задаче понимается расстояние до прямой, содержащей сторону).

4. В четырёхугольнике $ABCD$ $BC = AD$. M — середина AD, N — середина BC. Серединные перпендикуляры к AB и CD пересекаются в точке P. Докажите, что P лежит на серединном перпендикуляре к отрезку MN.

5. Все углы пятиугольника $ABCDE$ равны. Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются на биссектрисе угла E.

6. Из точек A и B, лежащих на разных сторонах угла, восставлены перпендикуляры к сторонам, пересекающие биссектрису угла в точках C и D. Докажите, что середина отрезка CD равноудалена от точек A и B.

7. AD и BE — биссектрисы треугольника ABC. Оказалось, что DE — биссектриса угла ADC. Найдите угол A.

8. В прямоугольном куске сыра много круглых отверстий равного радиуса. Докажите, что сыр можно разрезать на выпуклые многоугольные куски так, чтобы в каждом куске была ровно одна дырка.

12 июля — Матбой-междусобой.

1. Докажите, что в выпуклом n-угольнике нельзя выбрать больше n диагоналей так, чтобы любые две из них имели общую точку.

2. Есть шоколадка в форме равностороннего треугольника со стороной n, разделенная бороздками на равносторонние треугольники со стороной 1. Играют двое. За ход можно отломать от шоколадки треугольный кусок вдоль бороздки, съесть его, а остаток передать противнику. Тот, кто получит последний кусок — треугольник со стороной 1, — победитель. Тот, кто не может сделать ход, досрочно проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

3. Может ли сумма попарных расстояний между вершинами 25-вершинного дерева быть равна 1225 (расстояние — количество ребер в пути между вершинами)?

4. Можно ли разбить числа $1, 2, 3, \ldots, 100$ на три группы так, чтобы в первой группе сумма чисел делилась на 102, во второй — на 203, а в третьей — на 304?

5. На стороне AB треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $AD = EB$. Докажите, что $AC + BC > CD + CE$.

6. По окружности как угодно стоят 2014 девушек и 2014 юношей. Юноши произвольным образом нумеруются, а девушки вооружаются веслами. Первый юноша подкатывает к ближайшей по часовой стрелке девушке и лишает ее весла; затем второй юноша подкатывает к ближайшей по часовой стрелке девушке с веслом, история повторяется и т.д. Докажите, что сумма пройденных юношами расстояний не зависит от их нумерации.

7. Про натуральные числа a, b и c известно, что $a^3 \vdots b$, $b^3 \vdots c$, $c^3 \vdots a$. Докажите, что $(a+b+c)^{13} \vdots abc$.

8. У правильного 1981-угольника отмечены 64 вершины. Докажите, что существует трапеция с вершинами в отмеченных точках.

14 июля **Применение ОТА.**

> Простые числа не нужно складывать. Простые числа нужно умножать.
>
> Лев Давидович Ландау

1. Докажите иррациональность числа **(a)** $\sqrt{2}$; **(b)** $\sqrt[3]{\frac{16}{33}}$.

2. Выведите формулу для количества натуральных делителей числа $n = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$.

3. Найдите все такие натуральные n, для которых $n^2 - 1$ – степень простого числа.

4. Решите в целых числах уравнение $x + x^3 = 5y^2$.

5. Докажите, что найдутся такие восемь натуральных чисел, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных.

6. a, b, c — натуральные числа, $(a, b, c) = 1$ и $\frac{ab}{a-b} = c$. Докажите, что $a - b$ — точный квадрат.

7. Натуральные числа x, y таковы, что оба числа $x^3 + y$ и $y^3 + x$ делятся на $x^2 + y^2$. **(a)** Докажите, что x, y взаимно просты. **(b)** Найдите все такие пары чисел.

8. Найдите все натуральные x и y, для которых $x^y = y^x$.

Для самостоятельного решения

9. Найдите все натуральные a, для которых $a^3 + 1$ – степень тройки.

10. Докажите, что если числа ab, cd и $ac + bd$ делятся на k, то

11. Найдите 2014 натуральных чисел, чтобы сумма никаких нескольких из них не была бы степенью натурального числа.

12. Имеется 2014 натуральных чисел. У них в совокупности ровно 2013 различных простых делителей. Докажите, что произведение нескольких из этих чисел является точным квадратом.

14 июля **Четвёртый признак равенства треугольников.**

Вопрос. Равны ли треугольники по двум сторонам и углу **не** между ними?

Четвёртый признак равенства треугольников. Пусть треугольники ABC и $A'B'C'$ таковы, что $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ и $\angle BAC = \angle B'A'C'$. Тогда либо $\angle BCA = \angle B'C'A'$ (и треугольники равны), либо $\angle BCA + \angle B'C'A' = 180^\circ$.

1. Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке I. Оказалось, что $IB_1 = IA_1$. Докажите, что либо $CB = CA$, либо $\angle ACB = 60^\circ$.

2. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята такая точка P, что $AP = AB$. На стороне AB взята такая точка Q, что $PQ = PB$. Докажите, что $AQ = CP$.

3. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). Найдите ГМТ M, из которых отрезки AB и AC видны под равными углами.

Для самостоятельного решения

4. Биссектрисы внешних углов A и B треугольника ABC пересекаются в точке E. Оказалось, что $EA = EB$. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.

5. На биссектрисе BD треугольника ABC взята точка P такая, что $2\angle PCB = 3\angle PCA$. Прямая PC пересекает сторону AB в точке E. Оказалось, что $PC = CD = DE$. Найдите углы треугольника ABC.

---

15 июля — Комбинаторные доказательства.

Определение. Комбинаторное тождество — равенство вида $a = b$.

Доказать тождество *алгебраически* — просто доказать это численное равенство. Однако, зачастую за буквами a и b естественным образом скрываются множества A и B, в которых как раз a и b элементов.

Доказать тождество *комбинаторно* — построить взаимно-однозначное соответствие между множествами A и B. При этом очень часто множества A и B равны, а мы считаем число элементов в $A = B$ *двумя разными способами*, получая при одном способе подсчета число a, а при другом подсчета – число b.

1. Докажите, что количество способов выбрать чётное число людей из n человек равно количеству способов выбрать нечётное число людей из n человек.

2. Докажите, что количество 6-значных счастливых билетов (от 000000 до 999999) равно количеству билетов с суммой 27.

3. Приведите и комбинаторное, и алгебраическое доказательство:

(a)

(b) $n \cdot C_{n-1}^{k-1} = k \cdot C_n^k$;

(c) $p \mid C_p^k$ для любого простого p и $1 \leqslant k \leqslant p$.

4. Жук ходит по треугольнику Паскаля. Он начинает в C_0^0 и может ходить вниз-влево или вниз-вправо. Сколькими способами он может добраться до C_n^k?

5. Докажите, что $C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \ldots + C_{n+k}^k = C_{n+k+1}^k$.

6. Найдите $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n$.

Для самостоятельного решения

7. В выпуклом n-угольнике никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. Докажите, что в нём C_n^4 точек пересечения диагоналей.

8. Докажите, что $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

9. Докажите, что $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$.

15 июля $\qquad$ $\mathrm{P} \geqslant \mathrm{B} - 1$.

1. Из спичек сложена шахматная доска, каждая сторона клетки — спичка. Жука посадили в некоторую клетку. Через спичку он не ползает. Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы жук мог проползти от любой клетки до любой другой?

2. В связном графе 7 вершин, и его рёбра покрашены в 3 цвета. Оказалось, что если удалить рёбра любого цвета, то граф останется связным. Какое минимальное количество рёбер всех трёх цветов может быть в графе?

3. В отряде химиков (от слова «химия») 50 детей попарно различного веса. Опытный медик умеет точно определять вес ребёнка на глазок, и поэтому может определить самого мясистого ребёнка. Однако комиссия СЭС не верит ему на слово, и он должен обосновать свою точку зрения, пользуясь стационарными двухчашечными весами и взвешивая одновременно только одну пару детей. За какое наименьшее число взвешиваний ему удастся убедить комиссию СЭС?

4. Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам. Пара различных цветов называется *хорошей*, если существует две соседние клетки, закрашенные этими цветами. Каково минимально возможное число хороших пар?

5. Сначала была бесконечная клетчатая доска, и была она белой. Потом все клетки, кроме клеток квадрата 7×7, покрасили в красный цвет. Далее за одну операцию можно покрасить в красный цвет любую белую клетку, которая имеет ровно одного соседа по стороне красного цвета. Какое наибольшее количество операций можно совершить?

Для самостоятельного решения

6. Даны 10 чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10} \in \mathbb{R}$. Известно, что среди попарных сумм $a_i + a_j$ $(i < j)$ как минимум 37 целых. Докажите, что $2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_{10} \in \mathbb{Z}$.

7. На шахматной доске, первоначально пустой, расставляются фишки по следующим правилам. За ход выбираются любые четыре пустые клетки, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам доски, после чего на одну из этих клеток ставится фишка. Какое наибольшее число фишек можно расставить на доске по этим правилам?

---

15 июля — Разнобой–5.

---

1. Биссектрисы углов A и C четырехугольника $ABCD$ пересекаются на диагонали BD. Докажите, что биссектрисы углов B и D пересекаются на диагонали AC.

2. **(a)** Сколько существует семизначных чисел, в которых цифры идут в порядке возрастания?

(b) Сколько существует семизначных чисел, в которых цифры идут в порядке неубывания?

3. Докажите, что ни при каком натуральном m число $1978^m - 1$ не делится на число $1000^m - 1$.

4. На квадратном поле 10×10 девять клеток 1×1 поросли бурьяном. После этого бурьян может распространиться на клетку, у которой не менее двух соседних по стороне клеток уже поросли бурьяном. Докажите, что бурьян не сможет распространиться на все клетки.

---

16 июля — Китайская теорема об остатках.

---

1. **(a)** Число разделили с остаком на 7 и на 17. Сколько могло получиться пар остатков?

(b) Сколько есть натуральных чисел от 1 до $7 \cdot 17$?

(c) Два числа A_1 и A_2 дают одинаковые остатки при делении на 7 и на 17. Докажите, что их разность делится на $7 \cdot 17$.

(d) Докажите КТО для $n = 2$.

(e) Докажите КТО для произвольного n.

2. Найдите остаток при делении 36^{99} на $37 \cdot 5$.

Китайская теорема об остатках. Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — попарно взаимно простые числа, a_i — некоторый набор целых чисел. Тогда существует такое число A, что

$$A \equiv a_i \pmod{m_1}, \quad \ldots, \quad A \equiv a_n \pmod{m_n},$$

причем любые два таких числа сравнимы по модулю $m = m_1 \ldots m_k$.

Замечание. Это – очень плохое доказательство КТО, ибо оно не дает алгоритма нахождения решения. Ваши преподаватели расскажут сегодня Вам хорошее доказательство.

3. Генерал хочет построить для парада своих солдат в одинаковые квадратные каре (размера $n \times n$, $n > 1$), но он не знает сколько солдат (от 1 до 4) находится в лазарете. Докажите, что у генерала может быть такое количество солдат, что он, независимо от заполнения лазарета, сумеет выполнить свое намерение.

4. Число называется *свободным от кубов*, если оно не делится на куб натурального числа, большего 1. Докажите, что для любого n найдется n последовательных чисел, не свободных от кубов.

5. Докажите, что для любого натурального n существуют n последовательных натуральных чисел, никакое из которых не является степенью натурального числа.

6. Вы предлагаете кому-нибудь задумать двузначное число и сказать Вам остатки от деления этого числа на 3, 5 и 7. Как по этим данным легко и непринуждённо отгадать задуманное число?

7. Сколько различных остатков дают квадраты целых чисел при делении на $3 \times 5 \times 8$?

Для самостоятельного решения

8. Дано конечное множество натуральных чисел A. Докажите, что существует такое натуральное b, что для каждого $a \in A$ число ab будет степенью натурального числа.

---

16 июля — Двудольные графы.

Определение. Граф называется *двудольным*, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, что не будет ребер с концами одинакового цвета.

Видим двудольный граф.

1. На прямоугольной доске нарисованы несколько неперекрывающихся равносторонних треугольников. У каждого есть сторона, параллельная нижнему краю доски. Докажите, что треугольники можно покрасить в два цвета так, чтобы треугольники одинакового цвета не соприкасались по отрезку.

При движении по пути по двудольному графу цвета вершин чередуются.

2. Замок в форме треугольника со стороной 50 метров разбит на 100 треугольных залов со сторонами 5 м. В каждой стенке между залами есть дверь. Какое наибольшее число залов сможет обойти турист, не заходя ни в какой зал дважды?

3. На прямой сидят три кузнечика. Каждую минуту один из кузнечиков перепрыгивает ровно через одного другого (в одной точке два кузнечика оказаться не могут). Могут ли все кузнечики оказаться на своих местах ровно через 777 прыжков?

Суммы степеней вершин в долях равны.

4. На шахматной доске стоит несколько коней. Каждый конь на белом поле бьет 3 коня, а каждый конь на черном поле бьет 4 коня. Докажите, что общее число коней кратно семи.

Теорема (критерий двудольности графа). Граф — двудольный $\Longleftrightarrow$ в нем нет циклов нечетной длины.

Для самостоятельного решения

5. В связном двудольном графе степени всех вершин равны $k > 1$. Докажите, что при удалении любого ребра граф по-прежнему останется связным.

6. 10 алкоголиков образовали компанию для совместного времяпрепровождения. В компании всегда не менее 3-х человек. Каждый вечер в компанию добавляется один человек, либо из нее исключается один человек. Можно ли будет перебрать все допустимые составы компаний ровно по одному разу?

7. В строку выписано 11 целых чисел. Для любой группы подряд идущих чисел подсчитана ее сумма (группы из одного числа тоже учитывались). Какое наибольшее количество сумм могло оказаться нечетными?

8. (a) На шахматной доске стоят две одинаковых фишки. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Могут ли фишки перейти в симметричную относительно средней линии позицию ровно за 1111 ходов?

(b) На шахматной доске стоят пять одинаковых фишек. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Могут ли фишки перейти в центрально симметричную позицию ровно за 1111 ходов?

9. Политическая карта континента Треу состоит из 101 страны в форме правильного треугольника. Может ли у всех стран быть поровну соседей? Две страны соседние, если они имеют хотя бы две общие точки.

10. В прямоугольной таблице некоторые клетки отмечены звездочкой. Известно, что для любой отмеченной клетки число звездочек в ее столбце равно числу звездочек в ее строке. Докажите, что число столбцов, в которых есть хотя бы одна звездочка, равно числу строк, в которых есть хотя бы одна звездочка.

16 июля Разнобой–6.

1. Мама делит между четырьмя детьми 15 яблок и 20 груш. Каждому ребенку должно достаться хотя бы по два фрукта каждого вида. Сколькими способами мама сможет это сделать?

2. Докажите, что $2009!! + 2010!!$ делится на 2011 ($n!! = n(n-2)(n-4)\ldots$).

3. Докажите, что у уравнения $x^2+y^2 = 3(u^2+v^2)$ в целых числах есть только нулевое решение.

4. На плоскости есть n синих и n красных точек. Докажите, что можно соединить n непересекающимися отрезками так, чтобы концы каждого отрезка были бы разноцветными.

17 июля Зацикливание–2.

Принцип зацикливания. Если система может находиться в конечном числе состояний, и каждое следующее состояние однозначно определяется по фиксированному числу предыдущих, то система с некоторого момента зациклится.

Принцип зацикливания без предпериода. Если вдобавок каждое предыдущее состояние однозначно восстанавливается по фиксированному числу последующих, то система зацикливается без предпериода.

1. Кубик Рубика выведен из первоначального состояния некоторой комбинацией поворотов. Докажите, что всегда можно вернуть его в первоначальное состояние, выполнив эту комбинацию еще несколько раз.

2. В тридесятом королевстве у каждого замка и каждой развилки сходятся три дороги. Рыцарь, Любящий Разнообразие, выехал из своего замка и по очереди поворачивает то направо, то налево. Докажите, что рано или поздно он снова вернется в свой замок.

3. В последовательности $20147\ldots$ каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы четырех предшествующих цифр. Докажите, что в этой последовательности снова встретится четверка 2014.

4. Докажите, что в ряду Фибоначчи найдется число, делящееся на 2014.

Для самостоятельного решения

5. Из замка короля выехали 100 рыцарей, у каждого свой бзик (то есть каждый поворачивает налево или направо по своей собственной зацикленной программе, например, 1:налево, 2:налево, 3:направо, 4:налево, 5:goto 1). Докажите, что рано или поздно все рыцари снова соберутся в замке короля.

6. По кругу стоит несколько коробочек. В каждой из них может быть пусто, один или несколько шариков. Ход: из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки. На следующем ходу раскладывают шарики из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходу, и т. д. Докажите, что в какой-то момент повторится начальное расположение шариков.

19 июля — Малая теорема Ферма.

Малая теорема Ферма, формулировка 1. Для простого p и натурального n выполнено $n^p - n \,\vdots\, p$ (то же самое, $n^p \equiv n \pmod{p}$).

Малая теорема Ферма, формулировка 2. Для простого p и натурального a, **не кратного** p, выполнено $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

1. Докажите равносильность двух формулировок МТФ.

2. **(a)** Докажите, что $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$ (возводим в степень p по модулю p как тупые).

(b) Докажите МТФ в первой формулировке.

3. **(a)** Докажите, что для любого a с условием $(a,p) = 1$ (p – простое) числа $1a, 2a, \ldots, (p-1)a$ дают разные остатки по модулю p.

(b) Перемножив $1a, 2a, \ldots, (p-1)a$, докажите МТФ во второй формулировке.

4. Решите следующие упражнения.

(a) Докажите, что $30^{300} - 1$ делится на 1001.

(b) Найдите все такие простые числа p, что $5^p + 1$ кратно p.

5. Докажите, что ни при каком целом k число $k^2 + k + 1$ не делится на 101.

6. **(a)** Докажите, что любой простой делитель q числа $2^p - 1$ (p – нечётное простое) имеет вид $q = 2pk + 1$.

(b) Докажите, что для каждого нечётного простого p существует хотя бы одно простое число вида $2pk + 1$.

7. Докажите, что для каждого простого p существует хотя бы одно число вида $2014^n - n$, делящееся на p.

Для самостоятельного решения

8. Докажите, что число $30^{239} + 239^{30}$ – составное.

9. Докажите, что для составного числа 561 справедлив аналог малой теоремы Ферма: если $(a, 561) = 1$, то выполняется сравнение $a^{560} \equiv 1 \pmod{561}$. Числа, обладающие этим свойством, называются *числами Кармайкла.* В 1994 году было доказано, что чисел Кармайкла бесконечно много.

10. Докажите, что ни для какого натурального n число $2^n - 1$ не делится на n.

19 июля — Формула Пика.

Теорема (формула Пика). Вершины многоугольника расположены в узлах клетчатой решетки с клетками размера 1×1. Внутри него лежит n узлов, а на границе m узлов. Тогда площадь этого многоугольника равна $n + \frac{m}{2} - 1$.

1. Докажите формулу Пика для

(a) прямоугольника со сторонами, идущими по линиям сетки;

(b) прямоугольного треугольника с катетами, идущими по линиям сетки.

(c) Пусть многоугольник M разрезан ломаной с вершинами в узлах решетки на два многоугольника M_1 и M_2. Докажите, что если фомула Пика верна для M_1 и M_2, то она верна и для M. Докажите, что если формула Пика верна для M и M_1, то она верна и для M_2;

(d) Докажите формулу Пика для произвольного треугольника.

(e) (**Лемма о диагонали.**) Докажите, что во всяком многоугольнике есть диагональ, которая лежит внутри него.

(f) Завершите доказательство формулы Пика.

2. Можно ли квадрат 50×50 разбить на 15 равных многоугольников с вершинами в узлах сетки?

3. Петя нарисовал треугольник с вершинами в узлах целочисленной решётки. Все его стороны оказались длиннее 5. Какова его наименьшая возможная площадь?

Для самостоятельного решения

4. Три кузнечика в начальный момент времени сидят в трех вершинах одной клетки бесконечной клетчатой решетки, а затем начинают «играть в чехарду»: каждый может прыгнуть через одного из двух других, после чего оказывается в симметричной относительно него точке. Может ли случиться так, что через несколько прыжков строго внутри треугольника, образованного кузнечиками, будет лежать целочисленная точка?

5. Докажите, что найдется прямая, проходящая через два узла клетчатой бумаги, и не лежащий на этой прямой узел, такой, что расстояние между ними меньше 0.0000000001.

19 июля — Разнобой–7.

1. Сколько существует 10-значных чисел с суммой цифр **(a)** 4; **(b)** 9?

2. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ не имеет решений в натуральных числах.

3. Пусть $f(n) = n^{10} + 3n^7 - 4n^2 - 3$. Докажите, что целое число $f(f(19) + 19)$ делится на целое число $f(19)$.

4. На плоскости есть 100 синих и 100 красных точек, никакие три не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести прямую так, что с каждой стороны от нее будет по 50 синих и по 50 красных точек.

20 июля — Когда -1 является квадратом?

> Марьванна: «Пусть p — простое число.
> Тогда теорема Вильсона утверждает,
> что $(p-1)! + 1$ делится на p.»
> Вовочка: «Я уже доказал! Надо всего лишь
> раскрыть скобки: $(p-1)! + 1 = p! - 1! + 1 = p!$.
> Очевидно, $p!$ делится на p.»
>
> Фольклор.

1. Докажите, что число $x^2 + 1$ не имеет простых делителей вида $4k + 3$.

2. *(Теорема Жирара).* Число $x^2 + y^2$ делится на простое число $p = 4k + 3$. Докажите, что x и y делятся на p.

3. Докажите, что число $x^2 + 1$ не имеет делителей вида $4k + 3$.

4. Докажите, что не существует таких натуральных m и n, что $n^2+1 \vdots m^2-1$.

5. Решите в целых числах уравнение $x^2y^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

6. Докажите, что простых чисел **(a)** вида $4k + 3$; **(b)** вида $4k + 1$ бесконечно много.

7. *(Теорема Вильсона).* Число $p > 1$ является простым $\Leftrightarrow$ $(p-1)! + 1 \vdots p$.

8. Докажите, что для любого простого p вида $4k + 1$ найдётся такое натуральное x, что $x^2 + 1 \vdots p$.

Для самостоятельного решения

9. Вася написал в строчку на доске все вычеты по модулю p, каждый ровно по одному разу, в произвольном порядке. Петя сделал то же самое, но строчкой ниже (и, естественно, написал вычеты в другом порядке). Гриша не смог отличиться своей фантазией, и проделал ту же процедуру на третьей строчке. Могло ли оказаться так, что каждое число в третьей строчке является произведением соответствующих двух чисел в первых двух строчках?

10. Число $a^2 + ab + b^2$ делится на простое число $p = 3k + 2$. Докажите, что a и b делятся на p.

11. Докажите, что уравнение $4xy - x - y = z^2$ **(a)** не имеет решений в натуральных числах, **(b)** но имеет бесконечно много решений в целых числах.

---

20 июля — Теорема Чевы.

---

1. (a) В треугольнике ABC точка M принадлежит стороне AB, точка K – отрезку CM, причём $AM : MB = n : m$. Найдите $S_{ACK} : S_{BCK}$.

(b) В треугольнике ABC точка M принадлежит стороне AB, точка K – стороне AC. Отрезки CM и BK пересекаются в точке P, $BM : MA = 5 : 3$, $AK : KC = 7 : 10$. Найдите, в каком отношении луч AP делит сторону BC.

Теорема Чевы. Если на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1, B_1 и отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$.

2. Докажите обратную теорему Чевы.

3. Используя теорему Чевы докажите, что в произвольном треугольнике пересекаются в одной точке:

(a) медианы;

(b) биссектрисы;

(c) отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанной окружности *(точка Жергона)*.

4. На медиане AA_1 взята произвольная точка M. Прямые BM, CM пересекают CA, CB в B_1, C_1 соответственно. Докажите, что BCB_1C_1 – трапеция.

5. (a) Поиграемся с картинкой. На ней есть 6 чисел. Хотим найти, в каком отношении точка O делит чевиану AA_1. Сначала через 6 чисел, а потом – через b_1, b_2, c_1, c_2. Полученная формула называется *теоремой Ван Обеля*.

(b) На медиане BD треугольника ABC отмечена точка M так, что $BM : MD = m : n$. Прямая AM пересекает сторону BC в точке K. Найдите отношение $BK : KC$.

Для самостоятельного решения

6. Имеются чевианы AA_1, BB_1, CC_1. Прямые A_1B_1 и A_1C_1 пересекают прямую, проходящую через вершину A параллельно BC, в точках C_2 и B_2 соответственно. Докажите, что $AB_2 = AC_2$.

7. Имеются чевианы AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что прямые, проходящие через середины соответствующих сторон параллельно чевианам, тоже пересекаются в одной точке.

20 июля — Разнобой–8.

1. (a) Бусы представляют из себя p бусинок (p — простое число). Каждая бусинка красится в один из a цветов. Две раскраски бус считаются одинаковыми, если они получаются друг из друга некоторым поворотом бус. Найдите количество различных раскрасок (можно считать отдельно одноцветные и неодноцветные раскраски).

(b) Выведите отсюда доказательство МТФ.

2. Вершины треугольника расположены в узлах клетчатой бумаги, причем на его сторонах других узлов нет, а внутри есть ровно один узел O. Докажите, что O – точка пересечения медиан треугольника.

Определение. Билет с номером от 000000 до 999999 называется *счастливым*, если сумма его первых трех цифр равна сумме последних трех цифр.

1. Не считая КСБ, докажите, что:

(a) КСБ не более 100000;

(b) сумма номеров всех счастливых билетов делится на несчастливое число 13, а также на счастливое число 7.

Обозначение. a_k – количество трехзначных номеров с суммой цифр k.

2. Докажите, что:

(a) КСБ с суммой цифр $2k$ равно a_k^2;

(b) $a_k = a_{27-k}$;

(c) КСБ равно $2(a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{13}^2)$.

3. Найдите $a_0, \dots, a_9$.

Определение. Рассмотрим все тройки неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих уравнению $x + y + z = k$. Назовем *нарушением* ситуацию, когда x, y или z больше 9. Назовем тройку *хорошей*, если в ней нет нарушений и *плохой* в противном случае.

4. **(a)** Найдите количество плохих троек для $k = 10$ и $k = 11$.

(b) Найдите $a_{10}, \dots, a_{19}$.

5. Посчитайте вероятность получить в автобусе счастливый билет.

---

6. Докажите, что КСБ равно количеству 6-значных номеров с суммой цифр 27.

Определение. Аналогично определяем *нарушение* для решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 27$.

7. **(a)** Докажите, что КСБ $< C_{32}^5$;

(b) Чему равно количество плохих шестерок с нарушением на фиксированном месте?

(c) Чему равно количество плохих шестерок с нарушением на двух фиксированных местах?

8. Еще раз посчитайте вероятность получить в автобусе счастливый билет.

1. В ряд выложены 5 карточек. На каждой написано ненулевое число. Про любые две карточки можно узнать **(a)** сумму; **(b)** произведение чисел на них. Можно ли определить, какие числа написаны на карточках?

2. В каждой клетке таблицы 5×5 написано вещественное число. За ход можно узнать сумму чисел в любой доминошке.

(a) Докажите, что изначально числа могли быть расставлены так, что по полученным ответам нельзя узнать сумму всех чисел в таблице.

(b) Докажите, что по полученным ответам никогда не удастся выяснить сумму чисел в таблице.

3. На столе стоят 2014 коробочек, в каждой из которых лежит белый или чёрный шарик, причём белых шариков — чётное число. Разрешается указать ведущему на любые две коробочки и спросить, есть ли в них хотя бы один белый шарик.

(a) Докажите, что за 2013 вопросов можно гарантированно определить какую-нибудь коробочку, в которой лежит белый шарик.

(b) Докажите, что за 2012 вопросов нельзя гарантированно определить ни одну коробочку, в которой лежит белый шарик.

4. За круглым столом сидит компания из 5 рыцарей и 4 хитрецов. Всех сидящих спрашивают: «Кто Ваш сосед справа — рыцарь или хитрец?» В ответ рыцарь говорит правду, а хитрец может сказать как правду, так и ложь. Докажите, что зная эти ответы, нельзя гарантированно указать ни на одного рыцаря в этой компании.

5. У нумизмата Гриши есть 100 монет, ровно одна из которых фальшивая. Все настоящие монеты имеют одинаковый вес, а фальшивая отличается от них по весу. Гриша сломал двухчашечные весы так, что теперь они всегда показывают неправильный результат взвешивания. (На каждую чашку весов можно класть не более одной монеты. При взвешивании двух монет одинакового веса одна из них будет перевешивать другую, а при взвешивании двух монет разного веса эти весы или будут находиться в равновесии, или монета с меньшим весом будет перевешивать монету с большим весом).

(a) Докажите, что Гриша с помощью таких весов может наверняка определить хотя бы одну настоящую монету.

(b) Докажите, что Гриша не может наверняка определить фальшивую монету.

(c) Какое наибольшее количество настоящих монет Гриша может указать наверняка?

21 июля Разнобой–9.

1. (a) Определение. Пусть m — натуральное число, a — фиксированный остаток по модулю m. Будем изображать все остатки по модулю m вершинами графа, и из каждой вершины, соответствующей остатку x, проводить ориентированное ребро в точку, соответствующую остатку xa. Полученный граф называется **графом умножения на a по модулю m.**

(b) Нарисуйте все графы умножений по модулю 5 и по модулю 6 для всех вычетов a.

(c) Докажите, что граф умножения на ненулевой остаток по простому модулю p распадается на циклы и что все такие циклы, кроме одного, имеют одинаковую длину.

(d) Выведите из этого МТФ.

2. Докажите, что если число $x + \frac{1}{x}$ — целое, то число $x^n + \frac{1}{x^n}$ тоже целое.

22 июля Теорема Менелая.

1. *(Теорема Менелая.)* На прямых AB, BC и CA выбраны точки A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 при должном расположении лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

2. Взят треугольник ABC. Точка D симметрична точке A относительно B. На луче BC за точкой C отложен отрезок CE, в два раза больший BC. Прямая AC пересекает прямую DE в точке F. Найдите **(a)** $\frac{AC}{CF}$; **(b)** $\frac{DF}{FE}$.

3. Докажите, что биссектрисы двух внутренних углов треугольника и биссектриса внешнего угла, не смежного с ними, пересекают прямые, содержащие противоположные стороны треугольника в трёх коллинеарных точках.

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и BC. Отрезки CE и DF пересекаются в точке O. Докажите, что если прямые AO и BO делят сторону CD на три равные части, то $ABCD$ — параллелограмм.

5. В трапеции $ABCD$ на продолжении диагонали AC за точку C взята точка P. X, Y — середины оснований AB и CD. PX и DY пересекают стороны AD и BC в точках M и N. Докажите, что $MN \parallel AB$.

Теория чисел.

1. Алгоритм Евкида. Нахождение НОД при помощи алгоритма Евклида. Теорема о линейном разложении НОД.

2. Решение линейного диофантова уравнения.

3. Основная теорема арифметики. Ее эквивалентность утверждению о делимости произведения на простое число. Доказательство ОТА (с помощью алгоритма Евклида).

4. Связь между НОД и НОК. Формула для количества делителей.

5. Сравнения по модулю и их свойства. Сокращение сравнений.

6. Китайская теорема об остатках. Два доказательства.

7. Доказательство МТФ через Бином Ньютона.

8. Доказательство МТФ через перемножение остатков.

9. Комбинаторное доказательство МТФ.

10. Доказательство МТФ через граф умножений.

11. Теорема Вильсона. Когда -1 является квадратом по модулю простого числа.

12. Бесконечность множества простых чисел вида $4k+1$ и $4k+3$. Существование простого числа вида $2pk+1$.

Комбинаторика.

13. Принцип зацикливания и принцип зацикливания без предпериода.

14. Принцип дискретной непрерывности. Задача о разбиении синих и красных точек одной прямой на две части.

15. Формула включений и исключений.

16. Биномиальные коэффициенты и их свойства. Треугольник Паскаля. Два доказательства бинома Ньютона. Неравенство Бернулли.

17. Комбинаторные доказательства тождеств с C_n^k.

18. Формула шаров и перегородок (две штуки).

19. Счастливые билеты, подсчет их количества двумя способами.

Графы.

20. Подвешивание графа.

21. Деревья. Эквивалентность нескольких определений дерева.

22. Существование остовного дерева в связном графе.

23. Двудольные графы, критерий двудольности.

Геометрия.

24. Площадь. Площадь треугольника, трапеции, параллелограмма. Золотое свойство биссектрисы.

25. Линейность площади.

26. Обобщенная теорема Фалеса.

27. Три признака подобия.

28. Лемма о диагонали. Формула Пика.

29. Доказательство того, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, с помощью площадей.

30. Четвертый признак равенства треугольников. Описание ГМТ, из которых боковые стороны равнобедренного треугольника видны под равными углами.

31. Теорема Чевы. Точка Жергонна.

32. Теорема Ван Обеля.

33. Теорема Менелая. Основания внешних и внутренних биссектрис лежат на одной прямой.

СОДЕРЖАНИЕ