Довывод.

1. Найдите все такие пары простых чисел $p > q$, что $p + q + 1$ делится на $p - q$.

2. Десятиметровое бревно распилили на 4 части длиной 1, 2, 3, 4 метра (считая слева направо). Затем сделали ещё несколько дополнительных распилов. После этого оказалось, что теперь каждый кусочек стал длиннее, чем его правый сосед. Какое наименьшее количество брёвнышек могло получиться?

3. В треугольнике ABC отрезок AM — медиана. Пусть P — середина AM, а точка E — точка пересечения прямой CP со стороной AB. Известно, что $BM = BP$. Докажите, что $AE = PE$.

4. В ряд выписали несколько натуральных чисел (не обязательно различных). Затем под каждым числом подписали, сколько раз оно встречается в этом ряду. Получился второй ряд чисел. По нему таким же образом построили третий ряд, и т. д. Докажите, что на некотором шаге получатся два идущих подряд одинаковых ряда.

5. Клетки таблицы $n \times n$ раскрашены в белый и чёрный цвета так, что из четырёх угловых клеток таблицы три — белые и одна — чёрная. Докажите, что в таблице есть квадрат 2×2, в котором нечётное число белых клеток.

XXX Кировская ЛМШ, 3–28 июля 2014 года • 7 класс • 24 июля

Вывод.

6. На плоскости отмечены 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что существует не более 90 равнобедренных треугольников с вершинами в отмеченных точках.

7. В треугольнике ABC на стороне AB выбраны точки K и L так, что $AK = BL$ (и K лежит между A и L), а на стороне BC — точки M и N так, что $CN = BM$ (и N лежит между C и M). Докажите, что $KN + LM \geqslant AC$.

8. В сенате n сенаторов. Известно, что некоторые сенаторы между собой в ссоре. Проверено, однако, что как бы мы не посадили их всех или любую группу (3 или более) из них по кругу, найдётся пара соседей не в ссоре. Весь сенат усадили за круглый стол. Если два соседа не в ссоре, они могут поменяться местами. Докажите, что сенаторы могут расположиться в любом круговом порядке (порядки, полученные поворотом, не различаются).