

Применение ОТА.

Простые числа не нужно складывать. Простые числа нужно умножать.

Лев Давидович Ландау

1. Докажите иррациональность числа (a) $\sqrt{2}$; (b) $\sqrt[3]{\frac{16}{33}}$.
2. Выведите формулу для количества натуральных делителей числа $n = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$.
3. Найдите все такие натуральные n , для которых $n^2 - 1$ – степень простого числа.
4. Решите в целых числах уравнение $x + x^3 = 5y^2$.
5. Докажите, что найдутся такие восемь натуральных чисел, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных.
6. a, b, c – натуральные числа, $(a, b, c) = 1$ и $\frac{ab}{a-b} = c$. Докажите, что $a - b$ – точный квадрат.
7. Натуральные числа x, y таковы, что оба числа $x^3 + y$ и $y^3 + x$ делятся на $x^2 + y^2$. (a) Докажите, что x, y взаимно просты. (b) Найдите все такие пары чисел.
8. Найдите все натуральные x и y , для которых $x^y = y^x$.

Для самостоятельного решения

9. Найдите все натуральные a , для которых $a^3 + 1$ – степень тройки.
10. Докажите, что если числа ab, cd и $ac + bd$ делятся на k , то ac и bd делятся на k .
11. Найдите 2014 различных натуральных чисел, чтобы сумма никаких нескольких из них не была бы степенью натурального числа.
12. Имеется 2014 натуральных чисел. У них в совокупности ровно 2013 различных простых делителей. Докажите, что произведение нескольких из этих чисел является точным квадратом.