Ликбез по теореме Фалеса и подобию.

1. (**Теорема Фалеса**) На одной из сторон угла с вершиной O отмечены точки A_1, B_1, C_1, а на другой — точки A_2, B_2, C_2 такие, что $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel C_1C_2$. Докажите, что

- **(a)** если $A_1B_1 = B_1C_1$, то $A_2B_2 = B_2C_2$;
- **(b)** если $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$, то $\frac{A_2B_2}{B_2C_2} = \frac{m}{n}$;
- **(c)** $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}$, не зависимо от того, рационально ли отношение $\frac{A_1B_1}{B_1C_1}$.

2. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки B_1 и C_1 соответственно, такие, что $B_1C_1 \parallel BC$. Докажите, что $\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$.

Определение. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называются *подобными*, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Число $k = \frac{AB}{A_1B_1}$ называется *коэффициентом подобия*.

Три признаки подобия. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, если выполнено одно из следующих условий.

- **(a)** $\angle A = \angle A_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.
- **(b)** $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$.
- **(c)** $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

3. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны с коэффициентом k (т. е. $\frac{AB}{A_1B_1} = k$). Тогда $\frac{S(ABC)}{S(A_1B_1C_1)} = k^2$.