

Геометрия масс - 1

Определение. Материальной точкой mM называется пара, состоящая из точки M и числа m , причем m называется массой, а M — носителем этой материальной точки.

Определение. Системой материальных точек называется конечный непустой набор материальных точек с ненулевой суммарной массой.

Определение. Центром масс системы $\{m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n\}$ называется точка Z , для которой $m_1\overrightarrow{ZA_1} + m_2\overrightarrow{ZA_2} + \dots + m_n\overrightarrow{ZA_n} = \overrightarrow{0}$.

1. Пусть X — произвольная точка. Докажите, что точка Z является центром масс системы $\{m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n\}$ тогда и только тогда, когда $(m_1 + m_2 + \dots + m_n)\overrightarrow{XZ} = m_1\overrightarrow{XA_1} + \dots + m_n\overrightarrow{XA_n}$.

2. Докажите, что центр масс системы существует и единственен.

3. (Правило рычага) Центр масс точек aA и bB с положительными массами лежит на отрезке AB и делит его в отношении $b : a$, считая от A . Что будет, если убрать условие положительности?

4. (Теорема о группировке) Пусть у системы точек $\{m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n\}$ центр масс находится в точке X , $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ а у системы точек $\{l_1B_1, l_2B_2, \dots, l_nB_n\}$ — в точке Y , $l = l_1 + l_2 + \dots + l_n$. Пусть у системы точек $\{m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n, l_1B_1, l_2B_2, \dots, l_nB_n\}$ центр масс в точке Z . Тогда Z — центр масс системы $\{mX, lY\}$.

Или другими словами, все материальные точки некоторой системы можно переставить в их центр масс.

5. (a) Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, и делятся точкой пересечения в отношении 2 к 1 считая от вершины.

(b) На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены такие точки D и E , что $AD : DB = 1 : 2$, $BE : EC = 3 : 5$. В каких отношениях отрезки AE и CD делятся точкой их пересечения?

6. Пусть A_1, B_1, \dots, F_1 — середины сторон AB, BC, \dots, FA произвольного шестиугольника. Доказать, что точки пересечения медиан треугольников $A_1C_1E_1$ и $B_1D_1F_1$ совпадают.

7. В треугольнике ABC точка F делит основание BC в отношении 3 : 1, считая от вершины B . Точки M и P отсекают от боковых сторон AB и AC по одной шестой, считая соответственно от вершины A и от вершины C . В каком отношении делится каждый из отрезков MP и AF точкой их пересечения?

Для самостоятельного решения

8. В треугольнике ABC длины сторон $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. В точки A , B и C поставлены массы a , b и c соответственно. В какую особенную точку попадёт центр масс?

9. Докажите, что для любой точки X внутри треугольника ABC существует набор масс a , b , c такой, что X — центр масс aA , bB и cC .

10. (Теорема Чевы) На сторонах треугольника AB , BC и AC треугольника ABC выбраны точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$.