Решения заключительной олимпиады.

1. *Найдите все такие пары простых чисел* $p > q$, *что* $p + q + 1$ *делится на* $p - q$.

Решение: Заметим, что если оба числа p и q нечётны, то $p+q+1$ — нечётно, а значит не может делиться на чётное число $p - q$. Следовательно, p и q имеют разную чётность, поэтому одно из них равно 2. Не умаляя общности можно считать, что $p + 3$ делится на $p - 2$, откуда 5 делится на $p - 2$. Получаем, что $p = 2$ или $p = 7$ (случай с q аналогичен).

Ответ: $(2, 3); (2, 7); (3, 2); (7, 2)$.

2. *Десятиметровое бревно распилили на 4 части длиной 1, 2, 3, 4 метра (считая слева направо). Затем сделали ещё несколько дополнительных распилов. После этого оказалось, что теперь каждый кусочек стал длиннее, чем его правый сосед. Какое наименьшее количество брёвнышек могло получиться?*

Решение: Оценка: каждое брёвнышко, получившееся из куска длины 2 метра, меньше метра. Тогда их не менее трёх. Значит, длина самого правого из них меньше $\frac{2}{3}$ метра. Бревно длины 3 метра распиливали на брёвнышки длины менее $\frac{2}{3}$ метра. Поэтому их не менее, чем $3 : \frac{2}{3} = 4.5$. То есть, хотя бы 5. Аналогично бревно длины 4 метра распиливали на брёвнышки длины менее $\frac{3}{5}$ метра. То есть их хотя бы 7. Итого брёвнышек не менее, чем $1 + 3 + 5 + 7 = 16$.

Пример: делаем распилы точно по границам из оценки. Затем будем уменьшать левые брёвнышки за счёт правых с выполнением требуемых условий (сначала во втором бревне, затем в третьем чуть больше и в четвертом ещё чуть больше).

Ответ: 16.

3. *В треугольнике* ABC *отрезок* AM *— медиана. Пусть* P *— середина* AM, *а точка* E *— точка пересечения прямой* CP *со стороной* AB. *Известно, что* $BM = BP$. *Докажите, что* $AE = PE$.

Решение: Заметим, что $\angle APB = 180^\circ - \angle MPB = 180^\circ - \angle BMP = \angle CMP$ в силу свойств смежных углов и равнобедренного треугольника. Тогда треугольники APB и PMC равны по первому признаку. Отсюда $\angle EAB = \angle PCM = \angle APE$ (по свойству вертикальных углов). Тогда получаем, что в треугольнике APE углы, прилежащие к стороне AP равны, поэтому $AP = AE$.

4. *В ряд выписали несколько натуральных чисел (не обязательно различных). Затем под каждым числом подписали, сколько раз оно встречается в этом ряду. Получился второй ряд чисел. По нему таким же образом построили третий ряд, и т. д. Докажите, что на некотором шаге получатся два идущих подряд одинаковых ряда.*

Решение: Предположим, что чисел сначала было N. Заметим, что после первого шага на доске появятся несколько групп одинаковых чисел от 1 до N (порядок чисел мы не принимаем во внимание), т.е. не более N групп чисел. Каждая группа одинаковых чисел на следующем шаге опять же заменяется на группу одинаковых чисел, равных их количеству.

Предположим, что на каком-то шаге все новые числа в группах получились различные. Это означает, что ни одно число после этого не изменится и условие задачи будет выполнено. Если же в двух или более группах получились одинаковые числа, то количество групп просто уменьшится на 1 или более. Так как групп после первого шага не более N, то не более чем через N шагов мы придём к ситуации с группами попарно различных размеров.

5. *Клетки таблицы $n \times n$ раскрашены в белый и чёрный цвета так, что из четырёх угловых клеток таблицы три — белые и одна — чёрная. Докажите, что в таблице есть квадрат 2×2, в котором нечётное число белых клеток.*

Решение: Просуммируем количества белых клеток во всех квадратах 2×2. Каждая неугловая клеточка посчитана 2 или 4 раза, а угловая — 1 раз. Поэтому общая сумма получится нечетной. С другой стороны, если предположить, что в каждом квадрате 2×2 белых клеток четное число, то сумма окажется четной — противоречие.

Решение: Предположим, что в каждом квадратике 2×2 четное количество белых клеточек. Тогда индукцией несложно показать, что в четырех углах любого прямоугольника будет четное количество белых клеточек. Это противоречит условию.

6. *На плоскости отмечены 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что существует не более 90 равнобедренных треугольников с вершинами в отмеченных точках.*

Решение: Заметим, что равнобедренных треугольников с фиксированным основанием не более 2. Действительно, все вершины этих треугольников лежат на одной прямой — серединному перпендикуляру к основанию. Так как любой равнобедренный треугольник имеет хотя бы одно основание, получаем, что их не более $2 \cdot C_{10}^{2} = 90$.

7. *В треугольнике ABC на стороне AB выбраны точки K и L так, что $AK = BL$ (и K лежит между A и L), а на стороне BC — точки M и N так, что $CN = BM$ (и N лежит между C и M). Докажите, что $KN + LM \geqslant AC$.*

Решение: Пусть точка X такова, что $BNXL$ — параллелограмм. Тогда NX перелльельно и равно BL, а значит, и AK; аналогично LX параллельно и равно CM. Отсюда $CMLX$ и $AKNX$ — параллелограммы, поэтому $LM + KN = CX + AX \geqslant AC$.

8. *В сенате n сенаторов. Известно, что некоторые сенаторы между собой в ссоре. Проверено, однако, что как бы мы не посадили их всех или любую группу (3 или более) из них по кругу, найдётся пара соседей не в ссоре. Весь сенат усадили за круглый стол. Если два соседа не в ссоре, они могут поменяться местами. Докажите, что сенаторы могут расположиться в любом круговом порядке (порядки, полученные поворотом, не различаются).*

Решение: Докажем индукцией по числу сенаторов. База. Для трех сенаторов есть только два круговых порядка. Они получаются друг из друга пересадкой двух соседей, которые не в ссоре. Шаг индукции. Найдется сенатор А, который в ссоре не более чем с одним сенатором (иначе часть сенаторов можно будет рассадить по кругу так, что у каждого соседями будут враги). Пусть Б в ссоре с А (а если А дружит со всеми, то Б — любой другой). По предположению индукции, если А уйдет из-за стола, то есть способ рассадить оставшихся в нужном круговом порядке. Однако это можно сделать и при наличии А. Придвинем А к Б (это можно сделать) и попросим А и Б взяться за руки. Считая эту пару сенатором Б, рассадим всех в нужном порядке вышеуказанным способом. Теперь можно А посадить на нужное место, последовательно «отодвигая» его от Б.