Отображения множеств

Отображением множества A в множество B называется такое соответствие между элементами множеств A и B, при котором любому $a \in A$ соответствует единственный $f(a) = b \in B$. Множество A – *область определения*, а множество B – *область значений*.

Обозначение: $f : A \to B$

Если f – это отображение, а $f(a) = b$, то элемент b называется *образом* элемента a при отображении f, а элемент a называется *прообразом* элемента b при отображении f.

1. Сколько всего существует отображений из множества с m элементами в множество с n элементами?

2. Что из приведенного ниже можно считать отображением? Какие у этих отображений подразумеваются области определения и значений?

(a) остаток от деления целого числа на 10;

(b) абсцисса точки;

(c) сумма цифр числа;

(d) множество цифр числа;

(e) дробная часть;

(f) пара числитель-знаменатель для рационального числа.

3. Верны ли следующие равенства для любого отображения f?

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

Инъективным отображением множества A в множество B называется отображение, при котором для любых двух различных элементов из множества A их образы при данном отображении не совпадают.

Сюръективным отображением множества A в множество B называется отображение, при котором для любого элемента из множества B существует прообраз.

4. Докажите, что отображение $f : C \to B$ инъективно тогда и только тогда, когда для любых $C, B \subset U \quad f(C \setminus B) = f(C) \setminus f(B)$

Композицией двух отображений $f : A \to B$ и $g : B \to C$ называется отображение $h : A \to C$, определённое соотношением: $h(x) = g(f(x))$ для любого $x \in A$.

Обозначение: $h = g \circ f$

5. Приведите пример такого отображения, что $f \circ g = g \circ f$ и такого отображения, что $f \circ g \neq g \circ f$.

Биекцией или *взаимно однозначным соответствием* называется такое отображение множества A в множество B, которое является одновременно сюръективным и инъективным.

6. Верно ли, что

(a) если f и g биективны, то $g \circ f$ биективно;

(b) если $g \circ f$ биективно, то f и g биективны;

(c) если $g \circ f$ инъективно, то f инъективно;

(d) если $g \circ f$ сюръективно, то g сюръективно?

7. Установите биекции между следущими множествами:

(a) множество простых чисел не больших 10 и множество $\{32, 45, 0, 72\}$;

(b) множество подмножеств конечного множества A и множество отображений из множества A в множество $\{0, 1\}$;

(c) множество подмножеств множества $\{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$, состоящих из четного числа элементов, и множество подмножеств, состоящих из нечетного числа элементов.

8. Докажите, что разбиений числа n на не более, чем k слагаемых столько же, сколько разбиений числа $n + \dfrac{k(k+1)}{2}$ на k различных слагаемых.

Для самостоятельного решения

9. Докажите, что количество способов представить натуральное число n в виде суммы нескольких идущих подряд натуральных чисел равно количеству нечётных делителей n.

10. Установите биекцию между множеством счастливых билетов и билетов с суммой цифр 27. (Номер билета содержит 6-значный номер от 000000 до 999999, билет счастливый, если сумма первых трех цифр в нём равна сумме трёх последних).

11. Пусть s – отображение, сопоставляющее натуральному числу его сумму цифр, а res_k – отображение, сопоставляющее натуральному числу остаток от деления его на k. Для каких k выполнено равенство $s \circ res_k = res_k \circ s$?