

## Перестановки-2.

1. Ася, Боря и Витя встали в ряд (именно в таком порядке). Каждые 30 секунд какая-то пара детей меняется местами. Докажите, что ни через какое целое количество минут дети не встанут в порядке: Боря, Ася, Витя.

*Транспозицией* называется перестановка, меняющая два элемента множества местами (иначе, цикл длины 2). Транспозиция называется *элементарной*, если она меняет местами два соседних элемента множества.

2. Докажите, что любая перестановка представляется в виде композиции элементарных транспозиций.

3. На полке по порядку стоит собрание сочинений: тома 1, 2, ..., 100. Каждую минуту Александр Михайлович выбирает любую пару книг и меняет их местами. Валентине Александровне это не нравится. После каждого действия она записывает в блокнот количество беспорядков, т.е. пар книг, где том с большим номером стоит слева от (но не обязательно рядом) тома с меньшим номером. Могут ли два числа подряд в блокноте отличаться на чётное число?

Пусть дана некоторая перестановка  $\pi$  на множестве чисел  $1, 2, \dots, n$ . Пара чисел  $i < j$  называется *инверсией* данной перестановки, если  $\pi(i) > \pi(j)$ .

Перестановка называется *чётной*, если количество инверсий в ней чётно, и *нечётной*, если количество инверсий нечётно.

4. (а) Для заданной перестановки  $\pi$  и транспозиции  $\tau$  докажите, что чётность  $\tau \circ \pi$  не совпадает с чётностью  $\pi$ .

(b) Докажите, что чётная перестановка представляется только в виде композиции чётного количества транспозиций, а нечётная перестановка – только в виде композиции нечётного числа транспозиций.

(с) Докажите, что композиция двух перестановок одинаковой чётности – чётная, а композиция двух перестановок разной чётности – нечётная.

5. Разрешается прыгать буквой через две соседние вправо или влево (например, из ИКС сделать КСИ). Можно ли с помощью таких операций превратить (а) ГОРБ в ГРОБ; (b) АВТОР в ОТВАР; (с) АПЕЛЬСИН в СПАНИЕЛЬ?

6. В квадрат  $4 \times 4$  кладут 15 фишек, на которых и написаны числа от 1 до 15. Одна клетка при этом остаётся пустой. Можно двигать на пустую клетку соседнюю по стороне фишку. Докажите, что таким образом из первой конфигурации нельзя получить вторую.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

7. Докажите, что из любого расположения фишек можно, соблюдая правила игры, получить либо первую, либо вторую конфигурацию из предыдущей задачи.

### Для самостоятельного решения

8. Найдите количество чётных перестановок множества из  $n$  элементов.

9. В городе  $N$  разрешены только тройные обмены квартир (по циклу длины 3). Гражданин Александр и гражданка Татьяна хотят поменяться своими квартирами, а все остальные жители не хотят куда-либо переезжать. Докажите, что этот план невыполним.

10. Докажите, что любая чётная перестановка есть композиция циклов длины 3.