Функция Эйлера

1. Выписали все правильные дроби со знаменателем 30. Сколько среди них несократимых? Чему равна сумма всех таких дробей?

Определение Для любого натурального n обозначим через $\varphi(n)$ количество чисел, не больших n и взаимно простых с n. Отображение φ называется *функцией Эйлера*.

2. Докажите, что $\varphi(n)$ чётно для всех $n > 2$.

3. Найдите сумму всех правильных несократимых дробей со знаменателем n.

4. Пусть p – простое число. Чему равно $\varphi(p^n)$?

5. Докажите, что для любых взаимно простых a и b верно равенство:

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

6. Докажите, что если $m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$, то

$$\varphi(m) = p_1^{k_1-1}(p_1 - 1)p_2^{k_2-1}(p_2 - 1)\dots p_n^{k_n-1}(p_n - 1) =$$
$$= m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$$

7. Докажите следующие свойства функции Эйлера:

(a) $\varphi(m^k) = m^{k-1}\varphi(m)$

(b) Если $d = \text{НОД}(m, n)$, то $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)\dfrac{d}{\varphi(d)}$

(c) Если $a \vdots b$, то $\varphi(a) \vdots \varphi(b)$

8. **(Тождество Гаусса)** Для каждого делителя числа n (включая само это число) нашли значение функции Эйлера и все полученные результаты сложили. Докажите, что сумма равна n.

Для самостоятельного решения

9. Решите уравнения: **(a)** $\varphi(x) = \dfrac{x}{3}$ **(b)** $\varphi(x) = \dfrac{x}{7}$

10. Имеется бесконечное количество карточек, на каждой из которых написано какое-то натуральное число. Известно, что для любого натурального числа n существуют ровно n карточек, на которых написаны делители этого числа. Докажите, что число карточек, на которых написано натуральное число k, равно $\varphi(k)$.

11. Запишем все несократимые дроби $\frac{p}{q}$, где $0 \leq p \leq q \leq m$, в порядке возрастания (m – данное натуральное число). Например, при $m = 5$ получим последовательность $\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$. Докажите, что для любых двух соседних дробей $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ такой последовательности выполнено равенство $qr - ps = 1$.