

Полуинвариант.

1. (a) На шахматной доске 100×100 королю разрешено ходить вправо, вверх или вправо-вверх по диагонали. Какое наибольшее число ходов он может сделать? (b) Королю разрешили еще ходить вправо-вниз по диагонали. Докажите, что он может сделать лишь конечное число ходов.

2. В колонию из 1000000 бактерий попадает вирус. Каждую секунду происходит следующее: каждый вирус убивает одну бактерию и копирует себя, затем каждая бактерия копирует себя. Будет ли колония жить вечно?

3. Куб со стороной 10 разбит перегородками на единичные кубики. Какое минимальное число перегородок между единичными кубиками нужно удалить, чтобы из каждого кубика можно было добраться до границы куба?

4. В строке в беспорядке записаны числа $1, 2, \dots, 100$. Человек находит пару рядом стоящих чисел, где правое меньше левого, и меняет их местами. (a) Докажите, что рано или поздно числа расположатся по порядку $1, 2, \dots, 100$. (b) Какое наибольшее число ходов могут продолжаться перестановки?

5. В клетках таблицы 99×99 расставлены числа (не обязательно целые). Если в каком-то ряду (строке или столбце) сумма отрицательна, разрешается в этом ряду поменять знаки всех чисел на противоположные. Докажите, что через некоторое время сумма чисел в каждом из рядов будет неотрицательной.

6. 100 учеников 8 класса посадили по одному в клетки квадрата 10×10 . Каждую минуту ученик, хотя бы два соседа (по сторонам) которого решают задачи, тоже начинает решать задачи. В самом начале занятия ровно 9 человек стали решать задачи. Могло ли в конце урока оказаться, что все дети решают задачи? (Задачи настолько интересные, что, начав их решать, уже невозможно остановиться...)

7. По кругу стоит 101 мудрец. Каждый из них либо считает, что Земля вращается вокруг Юпитера, либо считает, что Юпитер вращается вокруг Земли. Один раз в минуту все мудрецы одновременно оглашают свои мнения. Сразу после этого каждый мудрец, оба соседа которого думают иначе, чем он, меняет своё мнение, а остальные – не меняют. Докажите, что через некоторое время мнения перестанут меняться.

Для самостоятельного решения

8. Каждую минуту к числу прибавляется его наибольший простой делитель. Докажите, что в последовательности встретится число, кратное любому наперед заданному.

9. В стране некоторые пары городов соединены дорогами. Началась гражданская война, и каждый город окрасился либо в белый, либо в красный цвета. Если большинство соседей города окрашено в другой цвет, то город становится беспокойным. Каждый день ровно в одном беспокойном городе происходит революция, и город перекрашивается в цвет большинства соседей. Докажите, что рано или поздно революции прекратятся.

10. По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное число комнат, занумерованных по порядку целыми числами, и в каждой стоит по роялю. В этих комнатах живет некоторое количество пианистов (в одной комнате могут жить несколько пианистов). Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах — k -ой и $(k+1)$ -ой, приходят к выводу, что они мешают друг другу и переселяются соответственно в $(k-1)$ -ю и $(k+2)$ -ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся.