Серия №1

1. На сторонах AB и AD ромба $ABCD$ взяты две точки M и N так, что прямые MC и NC делят ромб на три равновеликие части. Найти MN, если $BD = 3$.

2. Иван способен съесть не более 10 конфет, Петр — не более 20, а Сергей — не более 30. Сколькими способами они могут поделить по-братски 50 конфет? (По-братски — значит, чтобы каждому хоть что-то досталось).

3. У куба отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам этих диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

4. Найдите $((n-1)!+1, n)$.

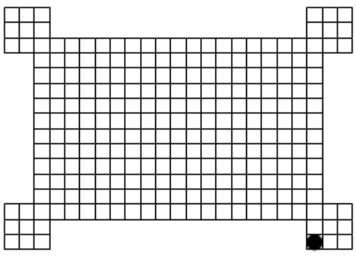
XXX Кировская ЛМШ, 3–28 июля 2014 года • 7 класс **(ПРОФИ)** • *27 июля*

Серия №2

1. В последовательности троек целых чисел $(2, 3, 5), (6, 15, 10), \ldots$ каждая тройка получается из предыдущей таким образом: первое число умножается на второе, второе — на третье, а третье — на первое, и полученные произведения дают новую тройку. Докажите, что ни одно из чисел, получаемых таким образом, не будет степенью целого числа: квадратом, кубом и т.д.

2. В треугольнике ABC площади S выбрана точка P, и через неё проведены три прямые, параллельные сторонам треугольника. Треугольник разбился на 6 частей, причём три из них — треугольные с площадями S_1, S_2, S_3. Докажите, что $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$.

3. На клетчатой доске в отмеченной клетке стоит фигура «Кентавр» (см. рис.), которая может ходить на одну клетку влево, вверх или вправо вверх. Двое по очереди двигают фигуру. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?



4. Журнал «Юный диверсант» выходит нерегулярно — два или три раза в год. На обложке стоит номер журнала и год выпуска: №1 — 2001, №2 — 2001, №3 — 2002, ... Докажите, что если редакцию не поймают, то рано или поздно выйдет номер, где два числа на обложке совпадут.

XXX Кировская ЛМШ, 3–28 июля 2014 года • 7 класс **(ПРОФИ)** • *27 июля*

Серия №3

1. На стороне AC треугольника ABC взяты точки P и E, на стороне BC точки M и K, причем $AP : PE : EC = CK : KM : MB$. Отрезки AM и BP пересекаются в точке O, отрезки AK и BE в точке T. Докажите, что точки O, T и C лежат на одной прямой.

2. Докажите, что

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i C_{n-i}^{m-i} = 2^m C_n^m.$$

3. В группе из нескольких человек некоторые люди знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Каждый вечер один из них устраивает ужин для всех своих знакомых и знакомит их друг с другом. После того как каждый человек устроил хотя бы один ужин, оказалось, что какие-то два человека всё ещё не знакомы. Докажите, что на следующем ужине им познакомиться тоже не удастся.

4. Докажите, что $5^{3^n}+1$ делится в точности на 3^{n+1}.

XXX Кировская ЛМШ, 3–28 июля 2014 года • 7 класс **(ПРОФИ)** *• 27 июля*

Серия №4

1. Из вершины C прямого угла треугольника ABC опущена высота CK, и в треугольнике ACK проведена биссектриса CE. Прямая, проходящая через точку B параллельно CE, пересекает CK в точке F. Докажите, что прямая EF делит отрезок AC пополам.

2. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых число $(7^p-2^p)(7^q-2^q)$ делится на pq.

3. Точку P целочисленной сетки, отличную от начала координат O, назовём *видимой*, если внутри отрезка OP нет целочисленных точек. Докажите, что найдётся квадрат 100×100, каждая точка внутри которого не является видимой.

4. В полоске 1×100 написаны целые числа. За один вопрос разрешается узнать сумму любых нескольких (возможно, одного) подряд идущих чисел. За какое наименьшее число вопросов можно узнать сумму чисел, стоящих на нечётных местах?

XXX Кировская ЛМШ, 3–28 июля 2014 года • 7 класс **(ПРОФИ)** *• 27 июля*

Серия №5

1. Решите в целых числах уравнение $x^3+7=y^2$.

2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1. Известно, что $\angle BB_1C_1 = 30^\circ$. Докажите, что либо $\angle C = 120^\circ$, либо $\angle A = 60^\circ$.

3. В ящике лежат игрушечные коты. У каждого и голова, и хвост покрашены в один из 2014 цветов. Набор котов *хорош*, если состоит из 2014 котов, у них нет голов одинакового цвета и нет хвостов одинакового цвета. Известно, что есть хотя бы 2 хороших набора. Докажите, что из ящика можно так повыкидывать котов, что останется ровно 2 способа выбрать хороший набор.

4. Докажите, что для каждого натурального числа s найдётся такое натуральное число n, что сумма цифр числа n равна s, а сумма цифр числа n^2 равна s^2.

XXX Кировская ЛМШ, 3–28 июля 2014 года • 7 класс **(ПРОФИ)** *• 27 июля*

Серия №6

1. Определим последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом: a_1 и a_2 — натуральные нечётные числа, a_n равно наибольшему нечётному делителю $a_{n-2}+a_{n-1}$ при $n \geqslant 3$. Докажите, что начиная с некоторого n выполнено равенство $a_n = a_{n+1}$, и найдите, чему равны члены последовательности начиная с этого момента.

2. На вечеринку пришли несколько человек. Докажите, что их можно разместить в двух комнатах так, чтобы у каждого из них в своей комнате имелось четное число знакомых. (Одну из комнат можно оставить пустой.)