

## Графы-1.

1. Можно ли все ребра и диагонали правильного 55-угольника раскрасить в 54 цвета так, чтобы ребра, выходящие из одной вершины, были разного цвета?

2. Рёбра графа покрашены в 3 цвета таким образом, что из каждой вершины исходят рёбра каждого цвета. Докажите, что в графе есть цикл, содержащий рёбра каждого цвета.

3. В куче лежат 10 камней. Её делят на две части, затем одну из частей опять делят надвое и т.д., до тех пор, пока не получат 10 отдельно лежащих камней. При каждом делении одной из куч на две части на доску записывается произведение количеств камней в этих частях. Чему будет равна сумма всех чисел на доске в конце?

4. В связном графе с 1000 вершинами степень каждой вершины не более 3. Докажите, что в нём найдётся самонепересекающийся путь из 9 рёбер.

5. Среди любых четырёх человек отряда М7 найдётся человек, который дружит с остальными тремя. Докажите, что найдётся человек, который дружит со всеми детьми отряда М7.

6. В стране есть столица и остальные города, между некоторыми проведены дороги. От столицы идут прямые дороги ровно в 100 городов, от остальных городов — в 10. Известно, что по дорогам можно доехать от любого города до любого другого. Докажите, что можно так закрыть 50 дорог, исходящих из столицы, чтобы это свойство сохранилось.

7. На планете 1000 городов, среди которых есть столицы государств. Некоторые города связаны дорогами так, что любая дорога соединяет ровно два города, и от любого города до любого другого можно добраться по дорогам. При этом, чтобы попасть из одной столицы в другую, нужно проехать не менее 21 дороги. Докажите, что на планете не больше 90 столиц.

### Для самостоятельного решения

8. В связном графе 90 вершин, причём степень каждой не меньше 10. Докажите, что каждую вершину можно дополнить до 4 вершин так, чтобы в подграфе на этих 4 вершинах степень каждой была бы не менее 2.

9. В нашем арсенале есть 20 бусинок 10 цветов, по 2 бусинки каждого цвета.

(а) Их раскидали в 10 коробок по 2 бусинки. Докажите, что можно выбрать по одной бусинке из коробки так, чтобы все цвета были представлены.

(б) Докажите, что количество способов сделать это равно степени двойки.

(с) Бусинки раскидали по коробкам как попало. Оказалось, что всё равно можно вынуть по одной бусинке из коробки так, чтобы все цвета были представлены. Докажите, что количество способов сделать это равно степени двойки.

10. В каждой из трёх школ учится по 100 человек. Оказалось, что у каждого ученика любой из школ ровно 101 знакомый среди учеников других двух школ. Докажите, что найдутся три ученика разных школ, которые знают друг друга.