Матбой 56

1. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что $ab = cd$. Докажите, что число $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ - составное.

2. На столе выписаны числа: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$. Двое игроков по очереди могут поставить перед любым из чисел знаки $+$ или $-$. После того, как перед каждым числом будут поставлены знаки, производится выполнение арифметических действий. Если результат делится на 3, то выигрывает игрок, сделавший ход первым, а если не делится, то выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

3. Среди 90 учеников ЛМШ у каждого не менее 10 друзей. Докажите, что любой из них может пригласить в гости трех других так, что среди четырех собравшихся у каждого будет не менее двух друзей.

4. У каждого из 777 банкиров есть несколько сейфов. На совещании Главный Олигарх выдал каждому банкиру по N алмазов и велел разложить их по сейфам так, чтобы в каждом из сейфов лежало разное число алмазов. Главный Олигарх точно знает, что эта задача выполнима. Докажите, что банкиры могут оставить себе не более чем по два сейфа (а остальные уничтожить) так, чтобы задача Главного Олигарха по-прежнему осталась выполнимой (при том же значении N).

5. В остроугольном треугольнике расстояние от середины любой стороны до противоположной вершины равно сумме расстояний от нее до сторон треугольника. Докажите, что этот треугольник – равносторонний.

6. Имеется 8 золотых монет, среди которых одна фальшивая, и 8 серебряных, среди которых тоже одна фальшивая. Золотые монеты весят по 20 г, серебряные — по 10 г, а фальшивые монеты на 1 г легче настоящих. И есть двухчашечные весы без гирь. На левую чашу разрешается класть только золотые, на правую — только серебряные монеты. Как за шесть взвешиваний гарантированно выявить обе фальшивые монеты?

7. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ точки K, L, M, N, O являются серединами сторон AB, BC, CD, DE и EA соответственно. Докажите, что длина замкнутой ломаной $KMOLNK$ меньше, чем длина ломаной $ACEBDA$.

8. Дан клетчатый прямоугольник 3×2015. В центре каждой клетки стоит по точке. Можно ли нарисовать 2015 непересекающихся треугольников с вершинами в этих точках?

Матбой 56

1. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что $ab = cd$. Докажите, что число $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ - составное.

2. На столе выписаны числа: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$. Двое игроков по очереди могут поставить перед любым из чисел знаки $+$ или $-$. После того, как перед каждым числом будут поставлены знаки, производится выполнение арифметических действий. Если результат делится на 3, то выигрывает игрок, сделавший ход первым, а если не делится, то выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

3. Среди 90 учеников ЛМШ у каждого не менее 10 друзей. Докажите, что любой из них может пригласить в гости трех других так, что среди четырех собравшихся у каждого будет не менее двух друзей.

4. У каждого из 777 банкиров есть несколько сейфов. На совещании Главный Олигарх выдал каждому банкиру по N алмазов и велел разложить их по сейфам так, чтобы в каждом из сейфов лежало разное число алмазов. Главный Олигарх точно знает, что эта задача выполнима. Докажите, что банкиры могут оставить себе не более чем по два сейфа (а остальные уничтожить) так, чтобы задача Главного Олигарха по-прежнему осталась выполнимой (при том же значении N).

5. В остроугольном треугольнике расстояние от середины любой стороны до противоположной вершины равно сумме расстояний от нее до сторон треугольника. Докажите, что этот треугольник – равносторонний.

6. Имеется 8 золотых монет, среди которых одна фальшивая, и 8 серебряных, среди которых тоже одна фальшивая. Золотые монеты весят по 20 г, серебряные — по 10 г, а фальшивые монеты на 1 г легче настоящих. И есть двухчашечные весы без гирь. На левую чашу разрешается класть только золотые, на правую — только серебряные монеты. Как за шесть взвешиваний гарантированно выявить обе фальшивые монеты?

7. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ точки K, L, M, N, O являются серединами сторон AB, BC, CD, DE и EA соответственно. Докажите, что длина замкнутой ломаной $KMOLNK$ меньше, чем длина ломаной $ACEBDA$.

8. Дан клетчатый прямоугольник 3×2015. В центре каждой клетки стоит по точке. Можно ли нарисовать 2015 непересекающихся треугольников с вершинами в этих точках?