Теорема Чевы.

1. **(a)** В треугольнике ABC точка M принадлежит стороне AB, точка K – отрезку CM, причём $AM : MB = n : m$. Найдите $S_{ACK} : S_{BCK}$.

(b) В треугольнике ABC точка M принадлежит стороне AB, точка K – стороне AC. Отрезки CM и BK пересекаются в точке P, $BM : MA = 5 : 3$, $AK : KC = 7 : 10$. Найдите, в каком отношении луч AP делит сторону BC.

Теорема Чевы. Если на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1, B_1 и отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$.

2. Докажите обратную теорему Чевы.

3. Используя теорему Чевы докажите, что в произвольном треугольнике пересекаются в одной точке:

(a) медианы;

(b) биссектрисы;

(c) отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанной окружности *(точка Жергона)*.

4. На медиане AA_1 взята произвольная точка M. Прямые BM, CM пересекают AC, AB в B_1, C_1 соответственно. Докажите, что BCB_1C_1 – трапеция.

5. **(a)** Поиграемся с картинкой. На ней есть 6 чисел. Хотим найти, в каком отношении точка O делит чевиану AA_1. Сначала через 6 чисел, а потом – через b_1, b_2, c_1, c_2. Полученная формула называется *теоремой Ван Обеля*.

(b) На медиане BD треугольника ABC отмечена точка M так, что $BM : MD = m : n$. Прямая AM пересекает сторону BC в точке K. Найдите отношение $BK : KC$.

Для самостоятельного решения

6. Имеются чевианы AA_1, BB_1, CC_1. Прямые A_1B_1 и A_1C_1 пересекают прямую, проходящую через вершину A параллельно BC, в точках C_2 и B_2 соответственно. Докажите, что $AB_2 = AC_2$.

7. Имеются чевианы AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что прямые, проходящие через середины соответствующих сторон параллельно чевианам, тоже пересекаются в одной точке.