Заключительная олимпиада

Довывод

1. В стране 100 городов и 100 дорог. Верно ли, что всегда можно выбрать 50 городов так, чтобы из них исходили все дороги?

2. Натуральные числа a, b, c таковы, что $ab \,\vdots\, 2c$, $ac \,\vdots\, 3b$, $bc \,\vdots\, 5a$. Найдите наименьшее возможное значение abc.

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ некоторая точка диагонали AC принадлежит серединным перпендикулярам к сторонам AB и CD, а некоторая точка диагонали BD принадлежит серединным перпендикулярам к сторонам AD и BC. Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник.

4. В ГИА9 принимали участие 25 школьников. Экзамен состоял из нескольких вопросов, на каждый из которых можно было дать один из пяти вариантов ответа. Оказалось, что любые два школьника не более чем на один вопрос ответили одинаково. Докажите, что в ГИА9 было не больше 6 вопросов.

5. Найдите наименьшее натуральное n, при котором существуют целые $x_1, \ldots, x_n$ такие, что $x_1^3 + \ldots + x_n^3 = 2002^{2002}$.

Вывод

6. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 = x_3^2\\
&x_2 + x_3 = x_4^2\\
&x_3 + x_4 = x_5^2\\
&\ldots\\
&x_{n-1} + x_n = x_1^2\\
&x_n + x_1 = x_2^2
\end{aligned}$$

в положительных числах.

7. Дан остроугольный треугольник ABC. Точки B' и C' симметричны соответственно вершинам B и C относительно прямых AC и AB. Пусть P — точка пересечения описанных окружностей треугольников ABB' и ACC', отличная от A. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой PA.

8. В стране 2000 городов, из каждого из которых ведут ровно три дороги в другие города. Докажите, что можно закрыть 1000 дорог так, чтобы в стране не осталось ни одного замкнутого маршрута, состоящего из нечётного числа дорог.