Транснеравенство

1. Листая старенькую тетрадь расстрелянного преподавателя... Есть три кучки монет с номиналами 2, 5 и 10 рублей соответственно. Вадим хочет взять 7 монет из одной кучки, 5 из другой и 2 из третьей так, чтобы получить минимальную сумму. Как ему это сделать? А максимальную сумму?

2. (a) Пусть $a_1 > a_2, b_1 > b_2$. Что больше: $a_1b_1 + a_2b_2$ или $a_1b_2 + a_2b_1$?

(b) Транснеравенство Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_n > 0$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \dots \geqslant b_n > 0$, а $c_1, \dots c_n$ – произвольная перестановка чисел $b_1, \dots b_n$. Тогда

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \geqslant a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n \geqslant a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1.$$

3. Девять цифр $1, 2, 3, \dots, 9$ выписаны в некотором порядке (так, что получилось 9-значное число). Рассмотрим все тройки цифр, идущих подряд, и найдём сумму соответствующих семи трёхзначных чисел. Каково наибольшее возможное значение этой суммы?

4. Пусть $a \geqslant b \geqslant c > 0$. Упорядочите наборы чисел по убыванию: $\{a^3, b^3, c^3\}$, $\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\}$, $\{a^2b^2, b^2c^2, c^2a^2\}$, $\{\frac{b}{ac}, \frac{a}{bc}, \frac{c}{ab}\}$.

5. Докажите, что для положительных a, b, c, d верно

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geqslant a^2b + b^2c + c^2d + d^2a.$$

6. Докажите с помощью транснеравенства, что

(a) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 3$ при $a, b, c > 0$;

(b) $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} \leqslant \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$.

7. Докажите, что для положительных a, b, c верно

$$a + b + c \geqslant \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1}.$$

8. Для $a, b, c \geqslant 1$ докажите неравенство $\frac{1+ab}{b+c} + \frac{1+bc}{c+a} + \frac{1+ca}{a+b} \geqslant 3$.

9. Докажите, что для положительных a, b, c верно

(a) $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \geqslant a + b + c$;

(b) $\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

10. Малыш и Карлсон делят прямоугольный торт. Сначала Карлсон разрезает его $(n-1)$ вертикальными и $(n-1)$ горизонтальными прямыми разрезами, параллельными его сторонам на n^2 прямоугольных кусочков. Теперь Малыш выбирает себе любой кусок, а Карлсон забирает все куски, находящиеся в том же вертикальном ряду, и все куски, находящиеся в том же горизонтальном ряду. После этого Малыш снова выбирает себе кусок, и Карлсон забирает оставшиеся куски горизонтального и вертикального рядов. Так повторяется, пока все куски не будут разобраны.

(a) Карлсон заставляет Малыша каждый раз брать самый маленький кусок из оставшихся. Докажите, что доля Малыша составит не менее $\frac{1}{n}$ всего торта.

(b) Может ли Малыш действовать так, чтобы его доля составила не более $\frac{1}{n}$ торта?

Для самостоятельного решения

11. Неравенство Чебышёва. Докажите, что для чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0$, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$ выполнено неравенство $n(a_1b_1 + a_2b_2 \cdots + a_nb_n) \geqslant (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$.

12. Дима записал пять попарно взаимно простых чисел, каждое из которых является произведением двух простых. Найдите наименьшее возможное значение суммы Диминых чисел.

13. Докажите, что для положительных $a_1, a_2, \ldots, a_n$ верно:

(a) $\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{S-a_n} \geqslant \frac{n}{n-1}$, где $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

(b) $\frac{a_1}{\sqrt{S-a_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{S-a_2}} + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt{S-a_n}} \geqslant \sqrt{\frac{S\cdot n}{(n-1)}}$, где $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$