Матбой 8-9

1. Двое по очереди красят клетки доски 5×5 в один из трех цветов (белый, синий или красный). Первый игрок выигрывает, если на доске появляются три подряд идущие разноцветные клетки (в одной строке или столбце) с синей посередине. В противном случае выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

2. В графе нет циклов четной длины. Докажите, что вершины можно раскрасить правильным образом в три цвета.

3. В остроугольном треугольнике ABC точка D - середина AB, AH - высота. Прямая DH пересекает прямую AC в точке M. Докажите, что на описанной окружности треугольника AMH можно выбрать точку, равноудаленную от сторон треугольника AMD.

4. Дана белая клетчатая доска 10×10. Илья хочет провести в каждой клетке диагональ и закрасить один из получающихся треугольников в черный цвет так, чтобы к любой границе двух клеток примыкали два одноцветных треугольника. Сколькими различным способами Илья может это сделать?

5. Докажите для положительных чисел a, b, c, d, что

$$1 < \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} + \frac{a}{a+b+c} < 2$$

6. На двух заборах написаны наборы чисел: $(11, 12, 13, 14, 15)$ и $(12, 12, 13, 13, 14)$. Может ли так оказаться, что на одном из заборов написаны длины сторон некоторого выпуклого пятиугольника, а на другом – длины его диагоналей?

7. Число состоит из цифр 1, 3, 7 и 9 (при этом каждая цифра встречается). Докажите, что можно переставить цифры числа так, чтобы полученное число делилось на 7.

8. Существует ли квадрат, который можно разбить на 9 прямоугольников с целыми сторонами так, чтобы ни из каких двух прямоугольников разбиения нельзя было сложить прямоугольник?