Сравнения по модулю.

1. Докажите, что при нечётных m и n число $1^n + 2^n + \dots + (m-1)^n$ делится на m.

2. Докажите, что $36^{36} + 41^{41}$ делится на 77.

3. Известно, что $a + 2c$ и $b + 3d$ делятся на 7. Докажите, что $ab - 6cd$ делится на 7.

4. Докажите, что для любого n число $5^{2n+1} + 3^{n+2}2^{n-1}$ делится на 19.

5. По кругу стоят 6 девочек, у которых $10, 20, \dots, 60$ конфет соответственно. Время от времени случайная девочка раздает по одной конфете всем остальным девочкам (если у неё хватает для этого конфет). Докажите, что такими операциями нельзя добиться того, чтобы у всех девочек стало поровну конфет.

6. Докажите, что $5^{100} - 2^{100}$ делится на $2^{10} + 5^{10}$.

7. Докажите, что $(3^n + 1)^n - 2$ делится на $3^n - 2$.

8. $p_1, \dots, p_n$ – первые n простых чисел. Докажите, что число $p_1 \dots p_n + 1$ не является квадратом.

9. Решите в натуральных числах уравнение $3^n + 7 = 2^m$.

10. Последовательность a_n такова, что $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$. Докажите, что любые два различных члена этой последовательности взаимно просты.

11. p – простое, $2^p + 3^p = a^n$. Докажите, что $n = 1$.

Для самостоятельного решения

12. Существует ли степень двойки, из которой перестановкой цифр (0 ставить на первое место нельзя) можно получить другую степень двойки?

13. Числа $a_1, \dots, a_n$ дают все остатки при делении на n. Числа $b_1, \dots, b_n$ тоже дают все остатки при делении на n. При каких n может получиться так, что числа $a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n$ дают все остатки при делении на n?

14. Есть 11 целых чисел. Докажите, что можно таким способом домножить каждое из них на коэффициент 0, -1 или $+1$ и сложить, чтобы сумма делилась бы на 2014 (при этом хотя бы один коэффициент должен быть отличен от нуля).