Применение движений

1. Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка M. Докажите, что существует выпуклый четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями длины AB и BC, стороны которого равны AM, BM, CM, DM.

2. Окружность, концентричная вписанной, пересекает стороны треугольника. Докажите, что она высекает на сторонах равные отрезки.

3. Дан параллелограмм $ABCD$ и точка M. Через точки A, B, C и D проведены прямые, параллельные прямым MC, MD, MA и MB соответственно. Докажите, что проведённые прямые пересекаются в одной точке.

4. Две окружности радиуса R пересекаются в точках M и N. Пусть A и B - точки пересечения серединного перпендикуляра к отрезку MN с этими окружностями, лежащие по одну сторону от прямой MN. Докажите, что $MN^2 + AB^2 = 4R^2$.

5. Точки M, N симметричны вершине C треугольника ABC относительно биссектрис углов A, B. Докажите, что точка касания вписанной окружности со стороной AB делит отрезок MN пополам.

6. H - ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что окружности, описанные около HAB, HBC, HCA имеют равные радиусы.

7. Постройте правильный треугольник, вершины которого лежат на трех заданных параллельных прямых.

8. Даны две концентрические откружности. Через их общий центр O проведена прямая, пересекающая эти окружности в точках A, B. Через точки A, B проведена окружность, пересекающая две изначальные в точках C, D. Докажите, что точки C, D, O коллинеарны.

9. В треугольнике ABC угол A равен $60°$. На лучах BA и CA отложены отрезки BX и CY, равные стороне BC. Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения биссектрис треугольника ABC.

Для самостоятельного решения

10. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причем $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.

11. Дан треугольник ABC. Из вершины A опущены перпендикуляры AA_1 и AA_2 на биссектрисы углов B и C. Аналогично построим точки B_1, B_2, C_1 и C_2. Докажите, что $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = p$, где p - полупериметр исходного треугольника.