Множества.

В математике понятие множества не определяется. Под *множеством* понимается произвольный набор каких-либо объектов (*элементов*). *Пустым множеством* $\varnothing$ называется множество, не содержащее ни одного элемента.

Если объект x *принадлежит множеству* A, то пишут $x \in A$. Если любой элемент множества A принадлежит множеству B, то A является подмножеством множества B, и пишут $A \subset B$. Два множества совпадают ($A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов.

1. Покажите, что для произвольных конечных множеств A, B, C выполнено:

a) $A \subset A$

b) если $A \subset B$, $B \subset A$, то $A = B$

c) если $A \subset B$, $B \subset C$, то $A \subset C$.

d) $\varnothing \subset A$

2. Может ли быть так, что $A \in B$ и $A \subset B$?

Способы задания множеств:

• Перечислением элементов множества

Например, $A = \{1, 2, B, x\}$

• Описанием свойства его элементов (такое свойство называется *характеристическим*). Множество, из которого мы выбираем элементы, называется *универсальным.*

Например, множество чётных натуральных чисел можно задать так:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \vdots 2\}$

А множество решений уравнения можно задать через само уравнение:

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 7 = 0\}$

3. Задайте множество через характеристическое свойство его элементов:

(a) множество $\{1, 3, 5, \dots\}$

(b) отрезок $[-12; 1,5]$

(c) луч $[-12; +\infty)$

(d) серединный перпендикуляр к отрезку AB

(e) прямая, содержащая биссектрису AA'' треугольника ABC

(f) точка пересечения биссектрис треугольника ABC

Сумма (объединение) множеств A и B ($A \cup B$) есть множество элементов, каждый из которых принадлежит либо A, либо B. Таким образом, $x \in A \cup B$ тогда и только тогда, когда либо $x \in A$, либо $x \in B$. Иначе, $A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}$

Пересечение множеств A и B есть множество $A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Разность множеств A и B есть множество $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Если задано универсальное множество U, которому заведомо принадлежат все рассматриваемые элементы, то *дополнением* множества A называется множество $\overline{A} = U \setminus A$.

4. Решите следующую задачу и запишите её условие на языке множеств:

"В некотором царстве живут маги, чародеи и волшебники. Про них известно следующее: во-первых, не все маги являются чародеями, во-вторых, если волшебник не является чародеем, то он не маг. Правда ли, что не все маги – волшебники?"

5. Докажите, что:

(a) $A \cup B = B \cup A$

(b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(d) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(e) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(f) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

(g) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

6. Имеется множество C, состоящее из n элементов. Сколькими способами можно выбрать в C два подмножества A и B так, чтобы

(a) множества A и B не пересекались;

(b) множество A содержалось бы в множестве B?

Для самостоятельного решения

7. В классе организуется турнир по перетягиванию каната. В турнире ровно по одному разу должны участвовать всевозможные команды, которые можно составить из учащихся этого класса (кроме команды всего класса). Доказать, что каждая команда учащихся будет соревноваться с командой всех остальных учащихся класса.

8. Пусть имеются $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ – подмножества конечного множества M. $\chi_j(x)$ – характеристическая функция, равная 1, если x принадлежит множеству A_j и равная 0, если не принадлежит.

(a) Определите A_i через характеристическую функцию.

(b) Докажите, что, при этом, $\chi(x)$ – характеристическая функция множества $A = A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n$ связана с функциями $\chi_1(x), \chi_2(x), \ldots \chi_n(x)$ формулой

$$(1 - \chi(x)) = (1 - \chi_1(x)) \cdot (1 - \chi_2(x)) \cdot \ldots \cdot (1 - \chi_n(x))$$

9. Члены Государственной Думы образовали фракции так, что для любых двух фракций A и B (не обязательно различных) $\overline{A \cup B}$ – тоже фракция. Докажите, что для любых двух фракций A и B, $A \cup B$ – также фракция.