Векторы.

Определение. *Направленным отрезком* называется упорядоченная пара точек (A, B). Два направленных отрезка (A, B) и (C, D) называются *эквивалентными*, если $ABDC$ — параллелограмм. Все эквивалентные между собой отрезки называются *вектором*.

Определение. (Правило треугольника) Изобразим два вектора направленными отрезками так, чтобы конец первого совпал с началом второго отрезка. Вектор, заданный направленным отрезком из начала первого отрезка в конец второго, есть сумма двух исходных векторов.

1. Найдите следующие суммы:

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{NM}$

(b) $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{KD} - \overrightarrow{KA}$

2. (Правило параллелограмма). Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Определение. *Произведением* вектора $\overrightarrow{a}$ на число k, называется вектор $\overrightarrow{b}$ такой, что $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| \cdot |k|$, и $\overrightarrow{a}$ сонаправлен вектору $\overrightarrow{b}$ в случае неотрицательного k и противоположнонаправлен в случае отрицательного.

3. (a) Пусть AM — медиана в треугольнике ABC. Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

(b) В треугольнике ABC точка M делит сторону BC в отношении $x : y$. Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

4. Пусть точка M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$.

5. Дан четырехугольник $ABCD$. Точки M и N — середины сторон BC и AD соответственно. Докажите, что $\overrightarrow{MN} = \dfrac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}}{2} = \dfrac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD}}{2}$.

6. На сторонах треугольника ABC построили параллелограммы ABB_1A_2, BCC_1B_2 и CAA_1C_2. Докажите, что из отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 можно составить треугольник.

7. Дано n попарно не сонаправленных векторов $(n > 2)$, сумма которых равна нулю. Докажите, что существует выпуклый n-угольник, набор векторов сторон которого совпадает с данным набором векторов.

8. $MNPQ$ — выпуклый четырехугольник. Точки E и F — середины MN и PQ соответственно, точки A, B, C, D — середины отрезков EP, NF, EQ, MF. Доказать, что $ABCD$ — параллелограмм.

Для самостоятельного решения

9. Докажите, что на сторонах и диагоналях многоугольника с нечётным числом сторон можно расставить стрелки так, чтобы сумма всех полученных векторов была равна нулю.

10. Докажите, что два вектора $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ равны по длине тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ перпендикулярны.