Алгоритм Евклида и линейное разложение НОД.

Определение. *Наибольшим общим делителем (НОД)* чисел a и b называется наибольшее натуральное число d такое, что a и b делятся на d. Обозначение: $d = (a, b)$.

Упр1. Докажите, что **(a)** $(a, b) = (a - b, b)$; **(b)** если $a = bq + r$, то $(a, b) = (b, r)$ (*алгоритм Евклида*).

Упр2. На какие натуральные числа может быть сократима дробь $\frac{13n+8}{8n+5}$?

Упр3. Докажите, что $(ac, bc) = c \cdot (a, b)$.

Упр4. Найдите **(a)** $(99! + 100!, 101!)$; **(b)** $(\underbrace{11\ldots1}_{51}, \underbrace{11\ldots1}_{81})$.

Упр5. Докажите, что если дробь $\frac{an+b}{cn+d}$ при некотором n сократима на число x, то $x \mid ad - bc$.

Упр6. Докажите, что любой общий делитель двух чисел делит их НОД.

Теорема о линейном разложении НОД. Для любых целых a и b найдутся x и y такие, что

$$\boxed{ax + by = (a, b)}$$

Упр7. На прямой сидит блоха, которая может прыгать либо на 15 сантиметров **влево**, либо на 21 сантиметр **вправо**. В каких точках прямой она может побывать?

1. Числа x^{2014} и x^{23} — рациональны. Докажите, что число x тоже рационально.

2. Докажите, что $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$.

3. На доске написаны натуральные числа $a_1, \ldots, a_k$, НОД$(a_1, \ldots, a_k) = 1$. Разрешается взять два числа и из большего вычесть меньшее. Докажите, что такими операциями можно получить число 1.

Для самостоятельного решения

4. Племя Мумбо-Юмбо решило выпустить в обращение денежные купюры достоинством a мумбов и b мумбов, $(a, b) = 1$.

(a) Докажите, что этими купюрами можно заплатить любую сумму денег (возможно, со сдачей).

(b) Докажите, что $ab - a - b$ мумбов нельзя заплатить без сдачи.

(c) Докажите, что любую сумму, большую $ab - a - b$ мумбов, можно заплатить без сдачи.