Китайская теорема об остатках

Пусть $\mathbb{Z}_n$ – множество всех возможных остатков от деления на n. Определим отображение $\mathrm{Rest}_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ при котором любое целое число переходит в свой остаток по модулю n.

1. Отображение $\mathrm{Add}_a : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ (для $a \in \mathbb{Z}_n$) переводит остаток x в остаток числа $x+a$ (по модулю n). Является ли Add_a **(a)** инъективным; **(b)** сюръективным отображением?

2. Окружность разделена точками на 12 равных частей, точки деления пронумерованы от 0 до 11. Блоха стоит в точке 0, длина её прыжка составляет **(a)** 4; **(b)** 9; **(c)** 5 дуг. Она прыгает по окружности по часовой стрелке до тех пор, пока не попадет в ту точку, где уже была однажды. В какой точке она остановится? Во все ли точки она попадет? Сколько оборотов (в том числе в частях оборота) она сделает до остановки?

3. Решите предыдущую задачу для окружности, разделённой на n частей и блохи, прыгающей на k (целое число) шагов.

4. В китайской натурфилософии выделяются пять первоэлементов природы – дерево, огонь, металл, вода и земля, и каждый год они чередуются. Также, в восточном календаре с древних времен используется 12-летний животный цикл так, что каждому из 12 годов в цикле соответствует одно из животных. Докажите, что начиная с 2015 года все комбинации первоэлемента и животного встретятся все по одному разу, прежде чем они начнут повторяться.

5. Отображение $\mathrm{Mult}_a : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ (для $a \in \mathbb{Z}_n$) переводит остаток x в остаток числа xa (по модулю n). Является ли Mult_a **(a)** инъективным; **(b)** сюръективным отображением?

6. Докажите, что при любом натуральном n число $n(2n+1)(3n+1)\dots(2015n+1)$ делится на каждое простое число, меньшее 2015.

7. Решите систему сравнений:

(a) $x \equiv 3 \pmod 7; x \equiv 2 \pmod 5$.

(b) $x \equiv 3 \pmod 7; x \equiv 2 \pmod 5;\ x \equiv 5 \pmod{11}$.

8. Китайская теорема об остатках: Докажите, что для любых попарно взаимно простых чисел $m_1, m_2, \dots, m_n$ и остатков $r_1, r_2, \dots, r_n$ по модулям $m_1, m_2, \dots, m_n$ найдётся такое число x, что $x \equiv r_1 \pmod{m_1}$, $x \equiv r_2 \pmod{m_2}$, $\dots$, $x \equiv r_n \pmod{m_n}$.

Для самостоятельного решения

9. Докажите, что для любых попарно взаимно простых чисел $m_1, m_2, \dots, m_n$ и остатков $r_1, r_2, \dots, r_n$ по модулям $m_1, m_2, \dots, m_n$ найдутся n последовательных чисел $a, a+1, \dots, a+n-1$ таких, что $a \equiv r_1 \pmod{m_1}$, $a+1 \equiv r_2 \pmod{m_2}$, $\dots$, $a+n-1 \equiv r_n \pmod{m_n}$.

10. Найдите наименьшее натуральное число, половина которого – квадрат, треть – куб, а пятая часть – пятая степень.

11. Число 76 обладает таким любопытным свойством: последние две цифры числа $76^2 = 5776$ – это снова 76.

(a) Есть ли ещё такие двузначные числа?

(b) Найдите все такие трёхзначные числа A, что последние три цифры числа A^2 составляют число A.

(c) Сколько существует n-значных чисел A таких, что последние n цифр числа A^2 составляют число A.

12. При изготовлении елочной гирлянды электрик Петров сделал на куске провода отметки, делящие его на 113 одинаковых кусков, и ушел покурить. В это время электрик Иванов разметил тот же провод на 137 одинаковых кусков и пошел туда же. В это время вернувшийся из магазина электрик Сидоров быстро разрезал провод по всем отметкам. Куски какого размера у него получились, и сколько получилось кусков каждого вида?