

## Разнойбой–9.

1. **Определение.** Пусть  $m$  — натуральное число,  $a$  — фиксированный остаток по модулю  $m$ . Будем изображать все остатки по модулю  $m$  вершинами графа, и из каждой вершины, соответствующей остатку  $x$ , проводить ориентированное ребро в точку, соответствующую остатку  $xa$ . Полученный граф называется **графом умножения на  $a$  по модулю  $m$** .

(a) Нарисуйте все графы умножений по модулю 5 и по модулю 6 для всех вычетов  $a$ .

(b) Докажите, что граф умножения на ненулевой остаток по простому модулю  $p$  распадается на циклы и что все такие циклы, кроме одного, имеют одинаковую длину.

(c) Выведите из этого МТФ.

2. Докажите, что если число  $x + \frac{1}{x}$  — целое, то число  $x^n + \frac{1}{x^n}$  тоже целое.