КБШ

1. Что можно сказать о дискриминанте квадратного трехчлена

$$(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2\ldots+(a_nx+b_n)^2?$$

2. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца (КБШ). Докажите, что для любых действительных чисел $a_1, a_2\ldots, a_n$ и $b_1, b_2\ldots, b_n$ верно неравенство

$$(a_1^2+a_2^2\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2\ldots+b_n^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2\ldots a_nb_n)^2.$$

Когда достигается равенство в неравенстве КБШ?

3. Для положительнх чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ докажите неравенства:

(a) $(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\geq n^2$;

(b) $\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+\ldots+\sqrt{a_nb_n}\leq\sqrt{a_1+a_2+\ldots+a_n}\sqrt{b_1+b_2\ldots+b_n}$;

(c) $\left((a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\ldots+(a_n+b_n)^2\right)\left(\frac{1}{a_1b_1}+\frac{1}{a_2b_2}+\ldots+\frac{1}{a_nb_n}\right)\geq 4n^2$.

4. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенства через КБШ:

(a) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$;

(b) $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{9}{2(a+b+c)}$.

5. *Неравенство Седракяна.* Докажите, что для $b_i>0$ верно неравенство:

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n}.$$

6. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенства:

$$\frac{a^2+b^2}{c+d}+\frac{c^2+d^2}{a+b}\geq\frac{1}{2}(a+b+c+d).$$

7. Для любого допустимого значения x докажите неравенство:

$$\sqrt{5x+1}+\sqrt{6x+1}+\sqrt{1-11x}\leq 3.$$

8. Докажите, что если $a+2b+3c\geq 14$, то $a^2+b^2+c^2\geq 14$.

9. Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2+b^2+c^2\leq 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq a+b+c.$$

.

10. Для положительных $a_1, a_2, \ldots, a_n$ докажите неравенство:

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)(a_1^7+a_2^7+\ldots+a_n^7)\geq(a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3)(a_1^5+a_2^5+\ldots+a_n^5).$$

Для самостоятельного решения

11. Докажите, что если $x + y + z = 1$, то при всех допустимых x, y, z верно неравенство:

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} \leq \sqrt{21}.$$

12. Решите систему уравнений:

$$(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2;\; x^4 + y^4 = 1.$$

13. Из точки M внутри данного треугольника ABC опускаются перпендикуляры MA_1, MB_1, MC_1 на прямые BC, CA, AB соответственно. Где должна находиться точка M, чтобы величина $\frac{BC}{MA_1} + \frac{CA}{MB_1} + \frac{AB}{MC_1}$ принимала наименьшее значение?