

Перестановки-1.

1. Проказница Мартышка, Осёл, Козел и косолапый Мишка, а также Коза с баяном расселись, чтобы сыграть концерт. Играли они отвратительно, и потому несколько раз менялись местами. Сначала Мартышка села на место Осла, Осёл – на место Козла, Козел – на место Козы, Коза – на место Мишки, а Мишка – на оставшееся место. Затем произошло то же самое: Мартышка села на новое место Осла, Осёл – на новое на место Козла, и т.д. Так они делали, пока все опять не сели на свои места. Сколько раз пришлось пересесть Ослу?

Перестановкой элементов конечного множества A называется биекция $\pi : A \rightarrow A$.

2. Мартышка, Осел, Козел, Мишка и Коза, пытаясь улучшить игру своего оркестра, зачислили в него Лебедя, Рака, Щуку, Ворону и Лисицу. Оркестр расселся на десяти пронумерованных стульях, но игра опять не пошла. Поэтому каждые пять минут они пересаживались по такой схеме:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	9	6	2	8	5	1	10	4	3

Через какое время все музыканты впервые одновременно окажутся на своих исходных местах?

3. На полковом плацу нарисован прямоугольник 1×8 . В квадратах написаны числа от 1 до 8, но не обязательно по порядку. Старшина выстроил восьмерых солдат в шеренгу так, что каждый солдат стоит в своём квадрате. По команде каждый солдат переходит из своего квадрата в k -ый слева, где k - число, написанное в квадрате, в котором стоит солдат.

(а) Докажите, что когда-нибудь начальное расположение солдат повторится.

(б) Скольких команд гарантированно хватит для того, чтобы солдаты встали на свои места?

4. Будем называть перестановку n -элементного множества *универсальной*, если применяя ее достаточное число раз, можно переставить числа от 1 до n в любом порядке. При каких n существуют универсальные перестановки?

5. На полке стояло 2015-томное сочинение неизвестного автора, занумерованное числами от 1 до 2015. Хулиган Петя поменял тома на полке с ним произвольным образом. Затем он переклеил бумажки с номерами томов так, будто тома всё ещё стоят по порядку. Библиотекарь, увидев беспорядок на полке, начал переставлять книги так же, как и Петя. В результате книги встали в изначальном порядке. Докажите, что для получения Петинного порядка томов достаточно было всего лишь поменять несколько пар книг местами.

6. После того, как библиотекарь расставил вышеупомянутое сочинение на полке в правильном порядке, хулиган Вася переставил тома произвольным образом. Каждый день библиотекарь меняет какой-то том с последним. Докажите, что библиотекарь может поставить все тома в порядке возрастания номеров.

7. Верно ли, что любой цикл длины 3 является композицией двух циклов длины 2?

8. В городе N разрешаются лишь простые двусторонние обмены квартир. При этом в течение одного дня каждому жителю разрешается совершить не более одного обмена. Докажите, что за два дня совершить любой, сколь угодно сложный обмен.

Для самостоятельного решения

9. Испанский король решил перевесить по-своему портреты своих предшественников в круглой башне замка. Однако он хочет, чтобы за один раз меняли местами только два портрета, висящие рядом, причём это не должны быть портреты двух королей, один из которых царствовал сразу после другого. Кроме того, ему важно лишь взаимное расположение портретов, и два расположения, отличающиеся поворотом круга, он считает одинаковыми. Доказать, что как бы сначала ни висели портреты, король может по этим правилам добиться любого нового их расположения.

10. Тренер захотел расставить в ряд спортсменов с номерами $2, 3, \dots, 102$ на футболках так, чтобы число на футболке каждого спортсмена делилось на его порядковый номер в ряду. Помогите тренеру найти все возможные варианты расстановки спортсменов.