Комбинаторные доказательства.

Определение. Комбинаторное тождество — равенство вида $a = b$.

Доказать тождество *алгебраически* — просто доказать это численное равенство. Однако, зачастую за буквами a и b естественным образом скрываются множества A и B, в которых как раз a и b элементов.

Доказать тождество *комбинаторно* — построить взаимно-однозначное соответствие между множествами A и B. При этом очень часто множества A и B равны, а мы считаем число элементов в $A = B$ *двумя разными способами*, получая при одном способе подсчета число a, а при другом подсчета – число b.

1. Докажите, что количество способов выбрать чётное число людей из n человек равно количеству способов выбрать нечётное число людей из n человек.

2. Докажите, что количество 6-значных счастливых билетов (от 000000 до 999999) равно количеству билетов с суммой 27.

3. Приведите и комбинаторное, и алгебраическое доказательство:

(a) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

(b) $n \cdot C_{n-1}^{k-1} = k \cdot C_n^k$;

(c) $p \mid C_p^k$ для любого простого p и $1 \leqslant k \leqslant p - 1$.

4. Жук ходит по треугольнику Паскаля. Он начинает в C_0^0 и может ходить вниз-влево или вниз-вправо. Сколькими способами он может добраться до C_n^k?

5. Докажите, что $C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \ldots + C_{n+k}^k = C_{n+k+1}^k$.

6. Найдите $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n$.

Для самостоятельного решения

7. В выпуклом n-угольнике никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. Докажите, что в нём C_n^4 точек пересечения диагоналей.

8. Докажите, что $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

9. Докажите, что $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$.