Деревья.

Опр1. *Циклом* называется замкнутый путь по ребрам графа. *Простым циклом* называется замкнутый путь по ребрам графа без повторяющихся ребер.

Опр2. *Деревом* называется связный граф без (простых) циклов.

Опр3. *Висячая вершина* графа — это вершина степени 1.

1. В дереве каждые две вершины соединены ровно одним путем. Верно и обратное: если в графе каждые две вершины соединены ровно одном путем, то это дерево.

Лемма о висячей вершине. В дереве, число вершин которого больше 1, найдется висячая вершина (и даже две).

Теорема. **(a)** В дереве с n вершинами $n-1$ ребро.

(b) Любое ребро дерева является мостом.

Опр4. *Остовом (остовным деревом, скелетом)* графа называется подграф, содержащий все вершины графа и являющийся деревом.

2. **(a)** В каждом связном графе есть остовное дерево.

(b) Для каждой вершины найдется такое остовное дерево, в котором есть все ребра из этой вешины.

3. Дан связный граф с n вершинами. Докажите, что

(a) в нем не менее чем $n-1$ ребро;

(b) если ребер $n-1$, то это — дерево.

4. Докажите, что в произвольной связной сети метро можно закрыть одну станцию вместе со всеми выходящими из нее линиями, чтобы сеть осталась связной.

5. Можно ли раскрасить ребра куба в два цвета так, чтобы по ребрам каждого цвета можно было пройти из любой вершины в любую другую?

6. Хромая ладья обошла все клетки шахматной доски ровно по разу. Докажите, что некоторые три подряд идущих хода были в трех разных направлениях.

7. В некотором поселке 1000 жителей. Ежедневно каждый из них делится узнанными вечером слухами со всеми своими знакомыми. Известно, что любой слух становится известным всем жителям. Докажите, что можно выбрать 90 человек так, что если сообщить им некоторый слух, то через 10 дней он станет известен всем жителям.

Для самостоятельного решения

8. Вершины дерева окрашены в синий и красный правильным образом (то есть одноцветные вершины не смежны), причем красных вершин не меньше, чем синих. Докажите, что в этом дереве имеется висячая красная вершина.

9. Докажите, что на ребрах **(a)** дерева; **(b)** произвольного графа можно так расставить стрелки, чтобы для каждой вершины разность между числом входящих и выходящих стрелок была бы не более 1.