

Поворот вектора

1. Пусть есть треугольник ABC (вершины в порядке по часовой стрелке). Докажите, что он равносторонний тогда и только тогда, когда вектор \overrightarrow{AB} переходит в вектор \overrightarrow{BC} при повороте на -120° .

2. Из произвольной внутренней точки O выпуклого n -угольника опущены перпендикуляры на стороны (или их продолжения). На каждом перпендикуляре от точки O по направлению к стороне построен вектор, длина которого равна половине длины той стороны, на которую опущен перпендикуляр. Определить сумму построенных векторов.

Чтобы найти образ вектора при повороте, можно разложить его в сумму нескольких векторов, и найти образ каждого слагаемого в отдельности, каждый раз выбирая свой, наиболее удобный для этого слагаемого центр поворота.

3. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ построены внешним образом правильные треугольники BCP и CDQ . Докажите, что треугольник APQ правильный.

4. Равносторонние треугольники ABC и CDE имеют общую вершину C . Докажите, что середины отрезков AC , CE и BD являются вершинами равностороннего треугольника.

5. Во внешнюю сторону треугольника ABC построены квадраты $ACMN$ и $BCPQ$ с центрами X и Y соответственно. Точка O — середина AB . Докажите, что $OX = OY$ и $OX \perp OY$.

6. На плоскости даны три (одинаково ориентированных) квадрата: $ABCD$, $AB_1C_1D_1$ и $A_2B_2CD_2$; первый квадрат имеет с двумя другими общие вершины A и C . Докажите, что медиана BM треугольника BB_1B_2 перпендикулярна отрезку D_1D_2 .

Для самостоятельного решения

7. Правильные треугольники ABC , CDE , EHK (вершины обходятся в направлении против часовой стрелки) расположены на плоскости так, что $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DK}$. Докажите, что треугольник BHD тоже правильный.

8. Даны одинаково ориентированные равносторонние треугольники ABC , ADE , BFG , CHI . Точки X, Y, Z — середины отрезков EF, GH, ID соответственно. Докажите, что треугольник XYZ равносторонний.