Геометрия масс - 2

1. Старый пират зарыл клад на острове среди 20 деревьев. После этого он написал завещание, в котором указал, как искать клад: надо встать к первому дереву, пройти половину расстояния до второго дерева, затем повернуть к третьему и пройти треть расстояния до него, затем повернуть к четвертому и пройти четверть расстояния до него, и т. д., наконец, повернуть к двадцатому и пройти двадцатую часть расстояния до него. К сожалению, пират забыл указать, как занумерованы деревья! Сколько разных ям придется выкопать потомкам пирата, чтобы всё-таки найти клад?

2. В четырёхугольнике $ABCD$ отрезок KL соединяет середины двух противоположных сторон, отрезок MN соединяет середины двух других противоположных сторон, а отрезок PQ соединяет середины диагоналей. Докажите, что отрезки KL, MN и PQ пересекаются в одной точке Z и каждый из них делится этой точкой пополам.

3. Дан треугольник со сторонами a, b и c. Какие массы следует положить в вершины, чтобы их центр масс оказался:

(a) в точке пересечения медиан;

(b) в середине средней линии;

(c) в точке пересечения высот (для остроугольного).

4. Какие массы следует поместить в три вершины параллелограмма так, чтобы их центр масс оказался в четвёртой вершине?

5. Точки K, L, M на сторонах AB, CB, CA треугольника ABC таковы, что $AK : KB = 2 : 1$, $BL : LC = 2 : 3$, $CM : MA = 2 : 3$. В каком отношении отрезки KL и BM делят друг друга?

Определение. *Чевианой* называется о трезок, соединяющий вершину треугольника с точкой на противолежащей стороне.

6. (Теорема о пропорциональном делении) В треугольнике ABC точка A_1 делит сторону BC в отношении $p : q$, считая от вершины B, точка C_1 делит сторону AB в отношении $m : n$, считая от вершины в A. Пусть K — точка пересечения AA_1 и CC_1. Тогда $\dfrac{AK}{KA_1} = \dfrac{m}{n}\left(1 + \dfrac{p}{q}\right)$.

7. (Теорема Ван-Обеля) Чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке K. Докажите, что $\dfrac{AK}{KA_1} = \dfrac{AB_1}{B_1C} + \dfrac{AC_1}{C_1B}$.

Для самостоятельного решения

8. (Теорема Менелая) На прямых AB, BC, CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1, отличные от вершин треугольника. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC_1}}{\overrightarrow{C_1A}} = -1$