Шестнадцатая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль. 3–27.VII.2000 г.
9 класс.

4 июля. 1 день 1 четырехдневки.
Вокруг теоремы Виета.

1. О вещественных числах x, y и z известно, что $(x+y+z)(xy+yz+xz)=xyz$. Докажите, что сумма каких-то двух из них равна нулю.
Какой знак имеет сумма $(xy+yz+xz)$?

2. Теорема Виета для квадратного и кубического многочлена.

3. Решить задачу 1, пользуясь теоремой Виета.

4. Алгоритм деления многочлена с остатком (столбиком).

Определение. Степень многочлена $f(x)$ обозначается $\deg f(x)$.

Определение. Два многочлена *равны алгебраически*, если равны все их коэффициенты при соответствующих степенях.

Определение. Два многочлена *равны функционально*, если при равных значениях аргумента они принимают равные значения.

5. Докажите, что два многочлена равны алгебраически тогда и только тогда, когда они равны функционально.

6. $P(x)$, $f(x)$ и $g(x)$ – многочлены. Если $P(x)f(x)=P(x)g(x)$, то $f(x)=g(x)$.

7. Если многочлен раскладывается на линейные множители, то такое разложение единственно.

8. При делении с остатком неполное частное и остаток определены однозначно.

Теорема (Безу). *Если a – корень многочлена $P(x)$, то $P(x)=(x \Leftrightarrow a)g(x)$.*

9. Решить задачу 1, пользуясь теоремой Безу.
(Указание: рассмотрите данное выражение как многочлен от x.)

10. *(Обобщенная теорема Виета)*

$$\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k} = (\Leftrightarrow 1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

Из скольки слагаемых складывается коэффициент при x^k?

11. *(Бином Ньютона)* Для любого натурального n верно тождество: $(a+b)^n=\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$.

4 июля. 1 день 1 четырехдневки.
Вступительная олимпиада.

12. В таблице 10×20 расставлены 200 различных чисел. Петя обвел красной ручкой по два наибольших числа в каждой строке, а Вася – синей ручкой по два наибольших числа в каждом столбце. Докажите, что найдутся три числа, обведенные обоими цветами.

13. У Золотой Рыбки в записной книжке записаны все ее знакомые, из которых половина – щуки, треть – окуни, а все знакомые под номерами, делящимися на четыре, – караси. Сколько знакомых у Золотой Рыбки?

14. В четырехугольнике из каждой вершины проведено по четыре вектора – с концами в серединах каждой из сторон. Докажите, что сумма всех векторов равна нулю.

15. Стороны треугольника равны a, b и c. Докажите, что $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ac)$.

16. Про некоторую функцию f известно, что $f(1)=2$, $f(xy)=f(x)f(y)\Leftrightarrow f(x+y)+1$. Докажите, что $f(x)=x+1$, если
   a) x – целое;
   b) x – рациональное.

17. Докажите, что существует бесконечно много решений в натуральных числах уравнения $x^2+y^3=z^5$.

18. Дан правильный треугольник ABC, на сторонах AC и BC взяты соответственно точки M и P так, что $MP\|AB$. Точка E – середина отрезка AP, точка D – центр треугольника MPC. Найдите углы треугольника DBE.

5 июля. 2 день 1 четырехдневки.
Многочлены. Алгоритм Евклида.

19. Вещественные числа x, y и z таковы, что $x+y+z>0$, $xy+yz+zx>0$, $xyz>0$. Докажите, что $x,y,z>0$.

20. Вещественные числа $x_1, \ldots, x_n$ таковы, что для каждого $1 \leqslant k \leqslant n$ верно неравенство:

$$\sum_{1 \quad i_1<\ldots<i_k \quad n} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_k} > 0.$$

Докажите, что все $x_i > 0$.

21. Многочлен $f(x)$ дает остаток 5 при делении на $(x \Leftrightarrow 2)$ и остаток 1 при делении на $(x \Leftrightarrow 3)$. Какой остаток дает $f(x)$ при делении на $(x \Leftrightarrow 2)(x \Leftrightarrow 3)$?

22. Остаток при делении многочлена $P(x)$ на $(x \Leftrightarrow a)$ равен $P(a)$:
$P(x) = (x \Leftrightarrow a)g(x) + P(a)$.

23. При каких a многочлен $x^n \Leftrightarrow ax^{n-1} + ax \Leftrightarrow 1$ делится на $(x \Leftrightarrow 1)^2$, если $n \geqslant 3$?

24. При каких a многочлены $x^4 + ax^2 + 1$ и $x^3 + ax + 1$ имеют общий корень?

25. Если многочлены $f(x)$ и $g(x)$ делятся на многочлен $d(x)$, то для любых многочленов $u(x)$ и $v(x)$ линейная комбинация $f(x)u(x) + g(x)v(x)$ делится на $d(x)$.

26. Алгоритм Евклида поиска НОД двух многочленов.

27. *(Линейное представление НОД двух многочленов)* Если НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$ равен $d(x)$, то существуют такие многочлены $u(x)$ и $v(x)$, что $f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x)$.

28. Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ с целыми коэффициентами таковы, что один из них делится на другой. Обязательно ли частное будет многочленом с целыми коэффициентами?

5 июля. 2 день 1 четырехдневки.
Задачи на движения плоскости.

29. Внутри угла дана точка A. Постройте отрезок с концами на сторонах данного угла так, чтобы точка A была его серединой.

30. Внутри угла дана точка A. Постройте треугольник наименьшего периметра так, чтобы две из его вершин лежали на сторонах угла, а третья – в данной точке A.

31. Точки A и B лежат по одну сторону от прямой l. Постройте ломаную $ACDB$ наименьшей длины так, чтобы отрезок CD лежал на прямой l и длина его была равна a.

32. На сторонах параллелограмма внешним образом построены правильные треугольники. Докажите, что их вершины тоже образуют параллелограмм.

33. На сторонах правильного пятиугольника внешним образом построены квадраты. Докажите, что их центры образуют правильный пятиугольник.

34. Постройте параллелограмм $ABCD$ с заданными вершинами
a) A, B,
b) A, C,
так, чтобы две другие вершины принадлежали заданной окружности.

35. Постройте квадрат, две противоположные вершины которого лежат на данной прямой, а две другие – на двух заданных окружностях.

36. Постройте правильный треугольник, одна вершина которого находится в заданной точке, а две другие – на сторонах данного угла.

37. Треугольники ABC и CED – правильные. Точка N – середина отрезка BD, M – середина AE. Докажите, что треугольник CMN правильный.

38. Гипотенузу BC прямоугольного треугольника ABC отразили относительно биссектрисы AL угла A. Докажите, что получившийся отрезок $B'C'$ перпендикулярен медиане AM треугольника ABC.

39. В окружность вписаны два правильных треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Точки A, B, C – точки пересечения соответственно сторон A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, C_1A_1 и C_2A_2. Докажите, что треугольник ABC правильный.

40. Про четырехугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ известно, что $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{DD'}$. Докажите, что четырехугольники равновелики.

6 июля. 3 день 1 четырехдневки.
Многочлены. Целочисленность. Четность.

41. Найти такие многочлены $g(x)$ и $f(x)$, что
a) $(x+1)g(x) + (x^2+1)f(x) = 1$; b) $(x^3+x^2+x+1)g(x) + (x^2 \Leftrightarrow x)f(x) = 1$.

42. Про целочисленные многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ известно, что $(P(x), Q(x)) = 1$. Докажите, что найдется такое число M, для которого $(P(n), Q(n)) \leqslant M$ при любом целом n.

43. $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, числа a и b целые. Докажите, что $P(a) \Leftrightarrow P(b)$ делится на $a \Leftrightarrow b$

44. $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, причем $P(2)$ делится на 5, а $P(5)$ делится на 2. Докажите, что тогда $P(7)$ делится на 10.

45. Многочлен с целыми коэффициентами принимает значение 5 в пяти целых точках. Доказать, что он не имеет целых корней.

46. Найти все целые значения a, b, c такие, что $(x \Leftrightarrow a)(x \Leftrightarrow 10) + 1 = (x + b)(x + c)$.

Определения.
Многочлен $P(x)$ называется *четным*, если $P(\Leftrightarrow x) = P(x)$ для любого x.
Многочлен $P(x)$ называется *нечетным*, если $P(\Leftrightarrow x) = \Leftrightarrow P(x)$ для любого x.

47. Докажите, что любой многочлен представим в виде четного и нечетного, причем единственным образом.

48. Какие функции одновременно являются и четными, и нечетными?

49. Докажите, что многочлен $P(x)$ четен тогда и только тогда, когда $P(x) = \sum a_k x^{2k}$.

50. Докажите, что многочлен $P(x)$ нечетен тогда и только тогда, когда $P(x) = \sum a_k x^{2k+1}$.

51. Докажите, что многочлен $(x^2 \Leftrightarrow x + 1)^{2000} + (x^2 + x + 1)^{2000}$ четен.

52. Чему равна сумма коэффициентов при
a) четных; b) нечетных
степенях x многочлена $(x^2 \Leftrightarrow x + 1)^{2000}$?

6 июля. 3 день 1 четырехдневки.

Представление движений композициями симметрий.

53. Докажите, что композиция двух осевых симметрий с параллельными осями есть параллельный перенос на вектор перпендикулярный осям симметрии, модуль которого равен удвоенному расстоянию между осями.

54. Представьте параллельный перенос в виде композиции двух осевых симметрий. Однозначно ли это представление?

55. Докажите, что композиция двух осевых симметрий с пересекающимися осями есть поворот вокруг точки их пересечения на угол, в два раза больший, чем угол между осями.

56. Представьте поворот в виде композиции двух осевых симметрий. Однозначно ли это представление?

57. Чем является композиция осевой симметрии и поворота, центр которого лежит на оси симметрии?

58. Даны прямая l и вектор $\vec{a} \| l$. Докажите, что результат последовательного выполнения симметрии относительно l и параллельного переноса на $\vec{a}$ не зависит от порядка, в котором эти преобразования производятся.

Определение. Композиция осевой симметрии и параллельного переноса на вектор, параллельный оси, называется *скользящей симметрией.*

59. Представьте скользящую симметрию в виде композиции осевых симметрий.

60. Чем является композиция симметрии и параллельного переноса на произвольный вектор?

61. Чем является композиция центральной симметрии и симметрии относительно прямой?

62. Чем является композиция поворота и осевой симметрии?

63. Чем является композиция двух поворотов?

7 июля. 4 день 1 четырехдневки.

Задачи на композицию движений.

64. Докажите, что композиция двух поворотов на углы α и β соответственно есть либо поворот на угол $\alpha + \beta$, либо параллельный перенос. При каких условиях что? Укажите способ поиска соответственно центра поворота и вектора переноса.

65. На плоскости был нарисован некоторый пятиугольник, на сторонах которого наружу были построены правильные треугольники. Однако хулиган Вася стер почти весь чертеж, оставив лишь вершины треугольников, не принадлежащие пятиугольнику. Сможет ли Петя восстановить чертеж?

66. Существует ли на плоскости ограниченная фигура с двумя различными
параллельными осями симметрии; центрами симметрии?

67. *(Задача Наполеона)* Дан произвольный треугольник. На его сторонах наружу построены правильные треугольники. Докажите, что их центры являются вершинами правильного треугольника.

68. Даны $2n$ прямых, проходящих через некоторую точку O. Прямые пронумерованы. Блоха, начиная с некоторой точки $M \neq O$, последовательно перепрыгивает через все прямые (симметрично). В результате после $2n$ прыжков она снова оказалась в точке M. Докажите, что если бы она начала прыгать с произкольной точки K, то и тогда в результате пришла бы в ту же точку K.

69. На плоскости даны $2n$ прямых. Посторойте $2n$ – угольник, биссектрисы которого были бы параллельны данным прямым.

70. Дан вписанный $2n$ – угольник. Докажите, что если β_i, $(i = 1 \ldots, 2n)$ соответственно его углы при вершинах, то $\sum \beta_{2i-1} = \sum \beta_{2i}$.
Верно ли обратное?

71. Докажите, что если у многоугольника есть несколько осей симметрии, то они пересекаются в одной точке.

7 июля. 4 день 1 четырехдневки.
Матбой.

72. Числа a, b и c вещественные. Известно, что $|ax^2+bx+c| \leqslant 1$ для любого $x \in [0,1]$. Докажите, что $|a|+|b|+|c| \leqslant 17$.

73. Известно, что сумма $x_1+x_2+\ldots+x_k=0$, и $m \leqslant x_i \leqslant M$ для всех $1 \leqslant i \leqslant k$. Докажите, что тогда верно неравенство:

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2 \leqslant -mMk.$$

74. Даны два четырехугольника с соответственно равными сторонами. Известно, что у одного из них диагонали перпендикулярны. Докажите, что тогда и у второго четырехугольника диагонали перпендикулярны.

75. Для любых неотрицательных a и b докажите неравенство:

$$2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}.$$

76. Даны 100 натуральных чисел, каждое из которых не превосходит ста. Известно, что их сумма равна 200. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел с суммой 100.

77. Для любых натуральных n и k докажите, что $|14^n - 11^k| \geqslant 3$.

78. Решить в целых числах уравнение $4^k+3^k=5^k$.

79. Построены четыре непересекающиеся окружности с центрами в вершинах прямоугольника $ABCD$. Известно, что радиусы этих окружностей удовлетворяют соотношению $R_A+R_C=R_B+R_D$. К паре окружностей ω_A и ω_C и паре окружностей ω_B и ω_D проведены общие внешние касательные. Докажите, что четырехугольник, образованный при их пересечении, является описанным.

9 июля. 1 день 2 четырехдневки.
Интерполяция многочленов.

80. Найти такой многочлен четвертой степени $P(x)$, что $P(1)=P(-1)=-11$, $P(2)=P(-2)=13$, $P(0)=-7$.

81. Значениями в скольких точках многочлен задается однозначно?

82. Докажите, что многочлен $P(x)$ степени $2n$ четен, если для ненулевых x_i с попарно различными модулями, где $(1 \leqslant i \leqslant n)$, известно, что $P(x_i)=P(-x_i)$.

83. a) Найти многочлен нулевой степени, который в точке x_0 принимает значение y_0.
b) Найти многочлен первой степени, который в точке x_0 принимает значение y_0, а в другой точке x_1 принимает значение y_1.
c) Найти многочлен второй степени, который в точках x_0, x_1 и x_2 принимает соответственно значения y_0, y_1 и y_2.

84. Построение такого многочлена $P(x)$ степени n, что $P(x_i)=y_i$, где $0 \leqslant i \leqslant n$.
Первый способ (по индукции):

$$P_k(x)=P_{k-1}(x)+\frac{y_k-P_{k-1}(x_k)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdot(x_k-x_{k-1})}(x-x_0)(x-x_1)\cdot(x-x_{k-1}).$$

85. Представить x^3 в виде суммы $c_0+c_1x+c_2x(x-1)+c_3x(x-1)(x-2)$.

86. a) Докажите, что если a,b,c,d различны, то для любого x

$$\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}+\frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\cdots=1.$$

b) Докажите, что если все x_i различны $(0 \leqslant i \leqslant n)$, то для любого x

$$\sum_{k=1}^{n}\prod_{i\neq k}\frac{x-x_i}{(x_k-x_i)}=1.$$

87. Найти многочлен $P(x)$ степени n, если
- a) $P(x_0)=1$, $P(x_i)=0$, где $1 \leqslant i \leqslant n$;
- d) $P(x_k)=1$, $P(x_i)=0$, где $0 \leqslant i \leqslant n$, $i \neq k$;
- c) $P(x_0)=3$, $P(x_1)=50$, $P(x_i)=0$, где $2 \leqslant i \leqslant n$;
- d) выведите второй способ построения многочлена $P(x)$ (см. задачу 84).

88. a) Докажите, что если числа a, b, c, d различны, то

$$\frac{abc}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{abd}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \dots = -1.$$

b) Докажите, что если все x_i различны ($0 \leqslant i \leqslant n$), то

$$\sum_{k=1}^{n} \prod_{i \neq k} \frac{x_i}{(x_k - x_i)} = (-1)^{n-1}.$$

9 июля. 1 день 2 четырехдневки.

Композиция движений.

89. На сторонах треугольника во внешнюю сторону построены правильные треугольники. Какое преобразование будет результатом последовательного применения трех поворотов на углы 60° относительно вершин построенных треугольников, не являющихся вершинами исходного?

90. Какое преобразование будет результатом последовательного применения трех осевых симметрий относительно серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ABC?

91. Какое преобразование будет результатом последовательного применения трех осевых симметрий относительно биссектрис треугольника ABC?

92. На сторонах AB и BC произвольного треугольника во внешнюю сторону построены квадраты $AMPB$ и $BTNC$. D – середина MN. Докажите, что треугольник ADC равнобедренный и прямоугольный. (Два способа: 1) поворот векторов; 2) композиция двух поворотов на углы 90°).

93. Дана окружность и пять прямых. В окружность вписать пятиугольник, стороны которого параллельны данным прямым.

94. На сторонах произвольного треугольника во внешнюю сторону были построены равнобедренные треугольники с углами α, β, γ при вершинах. Хулиган Федя стер всю картинку, кроме вершин равнобедренных треугольников. Какому условию должны удовлетворять углы α, β, γ, чтобы исходную картинку можно было восстановить, и как это сделать?

10 июля. 2 день 2 четырехдневки.

Классификация движений.

95. Докажите, что любой треугольник можно перевести в равный ему композициями поворотов, параллельных переносов и осевых симметрий.

96. Докажите, что движение, переводящее некоторый треугольник в равный ему, единственно.

97. Докажите, что все различные виды движений исчерпываются поворотами, параллельными переносами и скользящими симметриями.

98. Если при движении есть ровно одна неподвижная точка, то это движение – поворот.

99. Если при движении есть ровно одна прямая неподвижных точек, то это движение – осевая симметрия.

100. Если при движении есть ровно одна неподвижная прямая, то это движение – скользящая симметрия.

101. Если при движении нет неподвижных точек, но есть несколько неподвижных прямых, то это движение – параллельный перенос.

102. Если при движении есть три неподвижные точки, не лежащие на одной прямой, то это движение – тождественное преобразование.

10 июля. 2 день 2 четырехдневки.

Разнобой.

103. В группе 18 человек. Каждому нравятся m человек из группы. При каком наименьшем m можно утверждать, что найдутся два человека, нравящиеся друг другу?

104. Из квадрата 29×29 по клеточкам вырезано 99 квадратиков 2×2. Докажите, что из него можно вырезать еще один такой квадратик.

105. Можно ли в равнобедренный треугольник поместить другой равнобедренный треугольник так, чтобы боковая сторона внутреннего треугольника была больше боковой стороны содержащего его треугольника?

106. $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, в точках -1, 0, 1 принимающий значение нуль. Докажите, что для любого целого n значение $P(n)$ кратно трем.

107. Докажите, что многочлен $4x^{100} + 3$ не представляется в виде суммы квадратов трех многочленов с целыми коэффициентами.

108. Про многочлен $P(x)$ известно, что уравнение $P(x) = x$ не имеет решений. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = x$ также не имеет решений.

109. Дан треугольник ABC. Найдите геометрическое место точек таких, что точки, симметричные им относительно середин сторон треугольника, лежат на описанной вокруг треугольника ABC окружности.

110. Через точку пересечения двух окружностей проведите прямую так, чтобы ее часть, заключенная внутри окружностей, была наибольшей.

111. *("Морской бой")*
В квадрате 10×10 клеток нужно расставить один корабль 1×4, два 1×3, три 1×2 и четыре 1×1. Корабли не должны иметь общих точек (даже вершин), но могут примыкать к сторонам квадрата. Докажите, что
а) если расставлять их куда угодно в указанном порядке (начиная с больших), то каждому кораблю найдется место;
б) если расставлять их в обратном порядке (начиная с меньших), то может возникнуть ситуация, когда очередной корабль поставить некуда.

112. Имеется 10 карточек, на которых написаны числа от 1 до 5, причем каждое число встречается два раза. Можно ли выложить их в ряд так, чтобы между карточками с числами 1 лежала одна карточка, между карточками с числами 2 – две карточки, с числами 3 – три и т.д.?

11 июля. 3 день 2 четырехдневки.
Комплексные числа.

Определение. *Комплексное число* – число вида $a+bi$, где a и b – действительные числа, а $i^2=-1$.

113. Выполните действия:
a) $(1+2i)-(2+4i)$; b) $(1+i)(1-i)$; c) $(2+3i)^2$; d) $\frac{1}{i}$; e) $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-3i}$; f) $\frac{3+2i}{7-2i}$.

114. Можно ли сравнивать комплексные числа?

Определения.
Если $z=a+bi$, то $\operatorname{Re} z=a$ – *действительная часть* z, $\operatorname{Im} z=b$ – *мнимая часть* z.
Два комплексных числа *равны* тогда и только тогда, когда соответственно равны их действительные и мнимые части.
Комплексное число называется *чисто мнимым*, если его действительная часть равна нулю.
Сопряженное число $\overline{z}$ к числу $z=a+bi$ равно $a-bi$.

115. Дано число $z=a+bi$. Найдите $\frac{1}{z}$.

116. Найдите все такие числа z, что
a) $z=\overline{z}$; b) $z=-\overline{z}$;

117. Докажите, что
a) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$; b) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$; c) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

118. Решите в комплексных числах уравнения:
a) $x^2-2x+2=0$; b) $x^2=i$; c) $x^4=1$; d) $x^4+1=0$;
e) $x^2-(2+i)x+2i=0$; f) $x^3+3x^2+x-5=0$.

119. Найдите:
a) $\sqrt{3-4i}$; b) $\sqrt{5-12i}$; c) $\sqrt{a+bi}$.

120. Дан многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами, причем $P(z)=0$. Докажите, что $P(\overline{z})=0$.

121. Известно, что многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами степени n имеет n корней. Докажите, что его можно разложить на множители с вещественными коэффициентами степени не выше 2.

11 июля. 3 день 2 четырехдневки.
Центр масс и преобразования, его сохраняющие.

Определение. Точка Z называется *центром масс* системы точек m_1A_1, m_2A_2, …, m_nA_n (так что в точке A_i помещена масса m_i), если $m_1\overrightarrow{A_1Z}+m_2\overrightarrow{A_2Z}+\ldots+m_n\overrightarrow{A_nZ}=\overrightarrow{0}$.

122. Докажите, что центр масс системы точек единственен.

123. *(Теорема о группировке)* Пусть дана система точек m_1A_1, m_2A_2, …, m_nA_n, и пусть C – центр масс первых k точек. Тогда система $(m_1+m_2+\ldots+m_n)C$, $m_{k+1}A_{k+1}$, …, m_nA_n имеет тот же центр масс, что и первоначальная система.

124. В каждую вершину правильного n-угольника поместили единичную массу. Где находится центр масс получившейся системы точек?

125. Стороны треугольника равны a, b и c. Какие массы необходимо поместить в его вершины, чтобы центр масс оказался в точке пересечения биссектрис?

126. Какие массы нужно поместить в три вершины параллелограмма, чтобы их центр масс оказался в четвертой вершине?

127. Отношение длин оснований трапеции равно q. Какие массы нужно поместить в три вершины трапеции, чтобы их центр масс оказался в четвертой вершине?

128. На плоскости дан треугольник ABC и точка M. Известны площади треугольнов ABM, BCM и CAM. Какие массы нужно поместить в точки A, B и C, чтобы их центр масс оказался в точке M?

Определение. Говорят, что преобразование плоскости сохраняет центр масс, если для любой системы материальных точек m_1A_1, m_2A_2, …, m_nA_n образ Z' их центра масс Z является центром масс системы точек $m_1A'_1$, $m_2A'_2$, …, $m_nA'_n$.

129. Докажите, что движения и подобия сохраняют центр масс.

130. Докажите, что преобразование, сохраняюшее центр масс, прямые переводит в прямые, причем параллельные – в параллельные, точки пересечения – в точки пересечения.

Определение. *Сжатием* к прямой l с коэффициентом $k \neq 0$ называется преобразование, сопоставляющее каждой точке M такую точку M', что $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$, где O – основание перпендикуляра, опущенного из M на l.

131. Докажите, что сжатие к прямой сохраняет центр масс.

132. Докажите, что преобразование, сохраняющее центр масс, сохраняет отношение параллельных отрезков.

133. Верно ли, что преобразование, сохраняющее центр масс, сохраняет углы между прямыми?

134. Докажите, что движения, подобия и сжатия обратимы, причем обратные к ним также являются преобразованиями, сохраняющими центр масс.

135. Докажите, что любой треугольник некоторым преобразованием, сохраняющим центр масс, можно перевести в

a) прямоугольный равнобедренный со стороной 1; b) правильный со стороной 1.

136. Докажите, что любой треугольник можно перевести в любой другой некоторым преобразованием, сохраняющим центр масс.

137. Докажите, что такое преобразование единственно.

12 июля. 4 день 2 четырехдневки.

Решение задач с использованием преобразований, сохраняющих центр масс.

138. Докажите, что середины оснований, точки пересечений диагоналей и продолжений боковых сторон произвольной трапеции лежат на одной прямой.

139. В трапеции $ABCD$ проведены прямые $BN \| CD$ и $CM \| BA$. Эти прямые пересекают диагонали трапеции соответственно в точках P и Q. Докажите, что $PQ \| AD$.

140. Каждая сторона треугольника разделена на три равные части. Каждая точка деления соединена с противоположной вершиной треугольника. Докажите, что в пересечении этих прямых получается шестиугольник, причем его диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

141. Точки M, N и K делят стороны AB, BC, CA треугольника ABC в одном и том же отношении. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC, MNK и треугольника, получающегося при пересечении прямых CM, AN и BK, совпадают.

142. Точка M – середина основания AB трапеции $ABCD$. Через точку P пересечения прямых DM и AC проведена прямая, параллельная основаниям, которая пересекает диагональ BD в точке K. Докажите, что точки P и K делят отрезок прямой PK, отсекаемый боковыми сторонами трапеции, на три равные части.

143. При преобразовании, сохраяющем центр масс, треугольник ABC перешел в треугольник BCA. Найдите все неподвижные точки этого преобразования.

144. Параллелолинейка – инструмент, которым можно провести две параллельные линии на расстоянии a друг от друга, причем одну из них через две заданные точки. Постройте с помощью параллеллолинейки

a) середину данного отрезка;

b) по данному отрезку AB отрезок $AC = n \cdot AB$;

c) по данному отрезку AB отрезок $AC = \frac{1}{n}AB$.

145. Дан отрезок AB со своей серединой. С помощью обычной линейки без делений через данную точку M проведите прямую, параллельную AB.

12 июля. 4 день 2 четырехдневки.

Комплексная плоскость.

Каждое комплексное число однозначно задается парой вещественных чисел – своей действительной и мнимой частью. Будем изображать комплексное число на декартовой плоскости точкой, абсцисса которой равна действительной части, а ордината – мнимой.

146. Докажите, что радиус-вектор точки, изображающей сумму чисел, равен сумме радиус-векторов точек, изображающих слагаемые.

Будем использовать как взаимозаменяемые понятия “комплексное число”, “точка, изображающая это число” и “радиус-вектор этой точки”.

Определение. *Модулем* комплексного числа $z = a + bi$ называется число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

147. Изобразите на комплексной плоскости следующие множества точек:

a) $|z| = 1$; b) $\begin{cases} \operatorname{Re} z > 1 \\ |z - 2| < 3 \end{cases}$; c) $\operatorname{Im}(z + 3 + 2i) \geqslant -1$; d) $|z - 3i| = |z + 4 + 5i|$;

e) $||z - 2i| - 2| \geqslant 1$; f) $\operatorname{Im}(z^2) = 0$; g) $\operatorname{Im}(z^2) = \operatorname{Im}(z)$; h) $z + \bar{z} = 4$; i) $z \cdot \bar{z} = 2$.

148. Задайте, не используя Re и Im

a) сегмент круга; b) сектор круга.

Любое комплексное число $z \neq 0$ представимо в виде $|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где φ – направленный угол между положительным направлением действительной оси и радиус-вектором числа z.

Определение. Такая форма записи комплексного числа называется *тригонометрической.*

Определение. Угол φ называется *аргументом* числа z (обозначается $\arg z$).

Определение. Аргумент из промежутка $[0, 2\pi)$ называется *главным аргументом* (обозначается $\operatorname{Arg} z$).

149. Пусть $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.
Докажите, что тогда $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

150. Пусть $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.
Докажите, что тогда $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

151. *(Формула Муавра)* Докажите, что для любого целого n верно равенство:

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

152. Вычислить:

a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{100}$; b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{217}$.

153. Известно, что $\cos\alpha = c$, $\sin\alpha = s$. Выразите через c и s значения

a) $\cos 3\alpha$; b) $\sin 3\alpha$; c) $\cos 5\alpha$; d) $\sin 5\alpha$.

154. Найти все комплекстные числа z, удовлетворяющие условию $z = \sqrt[n]{1}$. Найдите их сумму. Докажите, что центр масс правильного n-угольника совпадает с центром описанной вокруг него окружности.

155. Найдите корни многочлена $x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1$.

14 июля. 1 день 3 четырехдневки.

Применение комплексных чисел.

156. Найдите:

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$; b) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{k}$; c) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots$; d) $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots$.

157. Найдите:

$\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \ldots$;
$\binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \ldots$;
$\binom{n}{2} + \binom{n}{6} + \binom{n}{10} + \ldots$;
$\binom{n}{3} + \binom{n}{7} + \binom{n}{11} + \ldots$.

(Указание: ищите все четыре суммы одновременно.)

158. Для данного натурального k найдите в зависимости от n:

$\binom{n}{0} + \binom{n}{k} + \binom{n}{2k} + \ldots$;
$\binom{n}{1} + \binom{n}{1+k} + \binom{n}{1+2k} + \ldots$;
......
$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{(k-1)+k} + \binom{n}{(k-1)+2k} + \ldots$.

159. Докажите, что для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2 верно, что $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

160. Найдите максимальное и минимальное значение $|z|$, если $|z + \frac{1}{z}| = 1$.

161. Даны три комплексных числа z_1, z_2 и z_3. Найдите все такие числа z_4, чтобы получившиеся четыре точки были вершинами параллелограмма.

162. Вычислите:

a) $(1+i)^5$; b) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$; c) $(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6})^{90}$; d) $(1 + i\operatorname{tg} 1^\circ)^{2000}$; e) $(\operatorname{tg} 17^\circ + i)^{2000}$.

163. Переведите в тригонометрическую форму:

$-3(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$; $(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6})$.

164. Дано комплексное число z. Постройте такой многочлен с действительными коэффициентами, для которого z являлось бы корнем.

165. Докажите, что существует такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, что $P(\cos\alpha) = \cos n\alpha$.

166. Известно, что α – угол, равный целому числу градусов, причем $(\alpha, 30) = 1$. Докажите, что $\cos\alpha$ – иррациональное число.

167. Вычислите: $\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7}$.

14 июля. 1 день 3 четырехдневки.

Площади и преобразования, сохраняющие центр масс.

168. При всех видах движений, гомотетии и подобии сохраняется отношение площадей фигур.

169. Докажите, что при сжатии к прямой с коффициентом k площадь

a) треугольника, одна сторона которого параллельна прямой сжатия а другая перпендикулярна;

b) треугольника, одна из сторон которого параллельна прямой сжатия;

c) произвольного треугольника;

d) любого многоугольника

изменяется в $|k|$ раз.

170. Докажите, что из медиан произвольного треугольника можно построить треугольник. Выразите его площадь через площадь исходного треугольника.

171. В параллелограмме $ABCD$ прямая, параллельная AB, пересекает сторону BC и диагональ AC соответственно в точках N и K. Докажите, что треугольники ADK и ABN равновелики.

172. Внутри параллелограмма взята произвольная точка M и соединена со всеми вершинами параллелограмма. При этом образовалось четыре треугольника. Докажите, что суммы площадей противоположных треугольников равны.

173. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC выбраны соответственно точки M, N, P и построены симметричные им точки M', N' и P' относительно середин этих сторон соответственно. Докажите, что треугольники MNP и $M'N'P'$ равновелики.

174. Дан треугольник ABC. Найдите геометрическое место точек M таких, что площади треугольников ABM, CBM и ACM равны.

14 июля. 1 день 3 четырехдневки.

Аффинные преобразования.

Определение. Преобразование плоскости называется *аффинным*, если для любых трех точек A, B и C, лежащих на одной прямой, оно сохраняет свойство “лежать между” и отношение отрезков $\frac{AB}{BC}$.

175. Докажите, что преобразования, сохраняющие центр масс, являются аффинными.

176. Докажите, что аффинные преобразования сохраняют центр масс.

177. Даны треугольники ABC и $A'B'C'$. Пусть точка M такова, что $a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$. Рассмотрим преобразование, сохраняющее центр масс, которое переводит треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$. Докажите, что для образа M' точки M справедливо, что $a\overrightarrow{A'B'} + b\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'M'}$.

178. Даны треугольники ABC и $A'B'C'$. Рассмотрим преобразование, сопоставляющее каждой точке M такой, что $a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$, такую точку M', что $a\overrightarrow{A'B'} + b\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'M'}$. Докажите, что такое преобразование сохраняет центр масс.

15 июля. 2 день 3 четырехдневки.

Геометрический разнобой.

179. В треугольнике ABC проведены высоты AM и CN. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку MN делит сторону AC пополам.

180. На сторонах AB и AC правильного треугольника ABC взяты точки E и F так, что $BE = AF$. Пусть O – точка пересечения BF и CE. Найдите величину угла EOF.

181. На плоскости даны треуголник ABC и такие точки D и E, что $\angle ADB = \angle BEC = 90°$. Докажите, что длина отрезка DE не превосходит полупериметра треугольника ABC.

182. Окружности радиусов 1, 2 и 3 касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через их точки касания.

183. Диагонали разбивают выпуклый четырехугольник на четыре треугольника равного периметра. Докажите, что этот четырехугольник – ромб.

184. Из треугольников с данным углом φ при вершине A и данной длиной стороны BC выбрать треугольник с наибольшим радиусом вписанной окружности.

185. Докажите, что точки, симметричные центру описанного около треугольника круга относительно середин его медиан, лежат на высотах треугольника.

186. Отрезки AB и CD – диаметры одной окружности. Из точки M этой окружности опущены перпендикуляры MP и MQ на прямые AB и CD. Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от положения точки M.

15 июля. 2 день 3 четырехдневки.

Геометрические приложения комплексных чисел.

187. На плоскости дан правильный n-угольник с вершинами $A_1, \ldots, A_n$, вписанный в окружность радиуса 1. Найдите произведение $\prod\limits_{i=2}^{n} |A_1A_i|$.

188. На плоскости даны точка M и правильный n-угольник с вершинами $A_1, \ldots, A_n$, вписанный в окружность радиуса 1. Найдите произведение $\prod_{i=1}^{n} |MA_i|$.

189. Как выглядит запись преобразования комплексной плоскости, задающего параллельный перенос на вектор, соответствующий числу z_0

190. Как выглядит запись поворота на угол φ вокруг
a) нуля; b) произвольной точки z_0?

191. Как выглядит запись осевой симметрии относительно
a) вещественной оси; b) произвольной оси?

192. Докажите, что любое движение комплексной плоскости задается одной из двух функций
a) $f(z) = z_1 z + z_0$; b) $f(z) = z_1 \overline{z} + z_0$.
Какие условия необходимо наложить на параметры z_0 и z_1, чтобы указанные функции задавали
a) произвольное движение; b) параллельный перенос; c) поворот;
d) осевую симметрию; e) скользящую симметрию?
Выразите через z_0 и z_1 для соответствующих движений вектор переноса, угол поворота, центр поворота, ось симметрии.

193. Когда точки z_1, z_2 и z_3 являются вершинами правильного треугольника?

194. Когда точки z_1, z_2, z_3 и z_4 являются вершинами квадрата?

Определение. *Простым отношением* трех точек, заданных на комплексной плоскости числами z_1, z_2 и z_3, называется число $(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$.

195. Докажите, что точки z_1, z_2 и z_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}$.

196. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с прямым углом при вершине C, причем $AB = 2$. Точка D такова, что $CD = 1$ и C лежит внутри треугольника ABD. Точка K такова, что $KC \perp AD$ и $KC = AD$. Точка M такова, что $MC \perp BD$ и $MC = BD$. Докажите, что точки K, D и M лежат на одной прямой.

197. Докажите, что четыре точки z_1, z_2, z_3 и z_4 лежат на одной окружности или на одной прямой тогда и только тогда, когда $(z_1, z_2, z_3) : (z_1, z_2, z_4) \in \mathbb{R}$.

16 июля. 3 день 3 четырехдневки.

Отношения и эквивалентность.

Определение. *Отношение* между двумя объектами – это некоторое свойство, которым эта пара объектов может быть связана.

Замечание. *Примеры отношений: “стул стоит за партой”, “два человека – родственники”, “одно число меньше другого”, “два ученика учатся в одном классе”...*

198. В городе некоторые люди дружат между собой. При этом известно, что для любых людей A, B и C
a) A сам себе друг;
b) если A дружит с B, то B дружит с A;
c) если A дружит с B, и B дружит с C, то A дружит с C.
Докажите, что все люди в городе разбиваются на компании, причем любые два человека из одной компании дружат между собой, а никакие люди из разных компаний не дружат.

Определение. Пусть на некотором множестве задано отношение $\sim$, причем для любых элементов A, B, C этого множества верно:
a) $A \sim A$;
b) если $A \sim B$, то $B \sim A$;
c) если $A \sim B$, и $B \sim C$, то $A \sim C$.
Такое отношение называется *отношением эквивалентности.*

199. Докажите, что если на множестве задано отношение эквивалентности, то это множество разбивается на непересекающиеся классы эквивалентных между собой элементов.

200. Рассмотрим множество пар целых чисел (a, b), где $b \neq 0$, и введем на нем такое отношение: $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$. Докажите, что это отношение эквивалентности.
Каждый из классов эквивалентности, на которые разбивается множество пар, соответствует некоторому рациональному числу.

16 июля. 3 день 3 четырехдневки.

Классы вычетов по модулю целых чисел.

201. Пусть n – фиксированное натуральное число. Рассмотрим на множестве целых чисел такое отношение: $a \sim b \Leftrightarrow (a \Leftrightarrow b) \,\vdots\, n$. Докажите, что это отношение эквивалентности.

Определение. Множество целых чисел, эквивалентных в смысле введенного в задаче 201 отношения, называется *классом* или *вычетом* по модулю n.

202. Вычеты можно умножать и складывать. Легко понять, как их вычитать. А что означает “разделить один класс на другой”?

Всегда ли разрешимо сравнение $ax \equiv b \pmod{n}$ относительно x?
Замечание. *Все операции над классами сводятся к соответствующим операциям над представителями и поиском класса результата. При этом результат от выбора представителей не зависит (почему?).*

203. Докажите, что уравнение $\overline{a} \cdot \overline{x} = \overline{1}$ имеет решение в классах по модулю n тогда и только тогда, когда $(a, n) = 1$.

204. Докажите, что если два ненулевых класса по модулю n в произведении дают нулевой класс, то каждый из них необратим.

205. Докажите, что если у класса существует обратный, то он единственен.

206. Какие классы по простому модулю являются обратными сами себе?

207. *(Теорема Вильсона)* Докажите, что если p – простое, то $(p \Leftrightarrow 1)! \equiv \Leftrightarrow 1 \pmod{p}$.

208. Пусть $(n, m) = 1$, a и b фиксированы. Как устроено множество чисел x таких, что $x \equiv a \pmod{n}$ и одновременно $x \equiv b \pmod{m}$? Докажите, что хотя бы одно такое число существует.

209. *(Китайская теорема об остатках)* Пусть натуральные числа n_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ попарно взаимно просты. Докажите, что система сравнений

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{n_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{n_2} \\ \ldots\ldots \\ x \equiv a_k \pmod{n_k} \end{cases}$$

имеет единственное решение по модулю $n_1 n_2 \ldots n_k$.
Замечание. *Пересечение классов по взаимно простым модулям является классом по модулю произведения.*

16 июля. 3 день 3 четырехдневки.

Инверсия и ее свойства.

210. Каждая из четырех окружностей касается внешним образом двух других. Докажите, что эти точки касания лежат на одной окружности.

Определение. *Инверсия* с центром в точке O и радиусом R – это преобразование плоскости, действующее по следующему правилу: чтобы найти образ A' точки A, проведем луч OA и отложим на нем отрезок $OA' = \frac{R^2}{OA}$.

211. Пусть при инверсии с центром в точке O точка A переходит в точку A', а точка B – в точку B'. Докажите, что $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$.

212. Найдите неподвижные точки преобразования инверсии.

213. Докажите, что различные точки инверсия переводит в различные.

214. Найдите образ при инверсии
- а) прямой, проходящей через центр O;
- б) прямой, не проходящей через центр O;
- в) окружности, проходящей через центр O;
- г) окружности, не проходящей через центр O;

215. Верно ли, что при инверсии центр окружности переходит в центр ее образа?

216. Постройте образ при инверсии правильного треугольника,
- a) вписанного в окружность инверсии;
- b) описанного около окружности инверсии.

217. Докажите, что при инверсии касающиеся прямые и окружности переходят в касающиеся прямые и окружности.

218. Решите задачу 210 с помощью инверсии.

17 июля. 4 день 3 четырехдневки.

Классы вычетов по модулю многочленов.

219. Пусть $f(x)$ – фиксированный многочлен. Рассмотрим на множестве многочленов от переменной x такое отношение: $a(x) \sim b(x) \Leftrightarrow (a(x) \Leftrightarrow b(x)) \,\vdots\, f(x)$. Докажите, что это отношение эквивалентности.

Определение. множество многочленов, эквивалентных в смысле введенного в задаче 219 отношения, называется *классом* или *вычетом* по модулю $f(x)$.

220. Как устроены классы по модулю многочлена
a) x^3; b) $x^n \Leftrightarrow 1$; c) $x^2 + x + 1$?

221. Найдите обратный к классу $\overline{x+2}$ в классах по модулю многочлена $x^2 + x + 1$.

222. Существует ли обратный к классу $\overline{x^2 + x + 1}$ в классах по модулю многочлена $x^3 \Leftrightarrow 1$.
Замечание. *Работа с многочленами во многом похожа на работу с целыми числами: и те, и другие можно складывать, умножать, делить с остатком; алгоритм Евклида поиска НОД для чисел и для многочленов абсолютно одинаков.*

Аналогично, все операции над классами сводятся к соответствующим операциям над представителями и поиском класса результата. При этом результат от выбора представителей не зависит (почему?). Однако, в ситуации с целыми числами получается конечное число вычетов, а для многочленов это не так.

223. Докажите, что в любом классе по модулю многочлена существует многочлен наименьшей степени, причем единственный. Что это за многочлен?

Определение. Многочлен называется *неприводимым*, если он не раскладывается в произведение многочленов меньших степеней.

Замечание. *Неприводимые многочлены являются аналогами простых чисел.*

224. Докажите, что в классах по модулю неприводимого многочлена любой ненулевой класс обратим.

225. Пусть $(f(x), g(x)) = 1$, $a(x)$ и $b(x)$ фиксированы. Как устроено множество многочленов $P(x)$ таких, что $P(x) \equiv a(x) \pmod{f(x)}$ и одновременно $P(x) \equiv b(x) \pmod{g(x)}$? Докажите, что хотя бы один такой многочлен существует.

226. *(Китайская теорема об остатках)* Пусть многочлены $f_i(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ попарно взаимно просты. Докажите, что система сравнений

$$\begin{cases} P(x) \equiv a_1(x) \pmod{f_1(x)} \\ P(x) \equiv a_2(x) \pmod{f_2(x)} \\ \ldots\ldots \\ P(x) \equiv a_k(x) \pmod{f_k(x)} \end{cases}$$

имеет единственное решение по модулю $f_1(x)f_2(x)\ldots f_k(x)$.

227. Рассмотрим классы по модулю многочлена x^2+1. Докажите, что это множество устроена так же, как комплексные числа (в смысле операций над элементами).

17 июля. 4 день 3 четырехдневки.

Матбой.

228. Числа 1, 2, 3, ..., 101 расположены в ряд в каком-то порядке. Докажите, что из этого ряда всегда можно вычеркнуть 90 чисел так, что оставшиеся расположены в порядке возрастания или в порядке убывания.

229. Докажите, что шахматную доску размером $4 \times n$ (при произвольном n) нельзя обойти ходом шахматного коня, побывав на каждом поле ровно один раз и вернувшись на исходную клетку.

230. В таблице $N \times N$, заполненной числами, все строки различны (две строки называются различными, если они отличаются хотя бы в одном элементе). Докажите, что из таблицы можно вычеркнуть один столбец так, что в оставшейся таблице опять все строки будут различны.

231. На какое количество нулей может оканчиваться число вида $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ при натуральных n? (Найдите все возможные ответы).

232. Значение трехчлена $ax^2 + bx + c$ при всех целых x является четвертой степенью целого числа. Докажите, что тогда $a = b = 0$.

233. На горе 1001 ступенька, на некоторых из них лежит по одному камню. Сизиф берет любой камень и переносит его на ближайшую сверху свободную ступеньку (если следующая ступенька свободна, то на нее, а если она занята, то на несколько ступенек вверх до первой свободной). После этого Аид скатывает на одну ступеньку вниз любой камень, ступенька под которым свободна. Камней 500 и первоначально они лежат на нижних 500 ступеньках. Сизиф и Аид действуют по очереди, начинает Сизиф. Цель Сизифа положить камень на верхнюю ступеньку. Может ли Аид помешать ему?

234. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 60^0. Доказать, что биссектриса одного из углов, образованного высотами, проведенными из вершин B и C, проходит через центр O описанной окружности треугольника.

235. На плоскости дан некоторый параллелограмм, точка M и прямая l. С помощью одной линейки провести через точку M прямую, параллельную прямой l.

19 июля. 1 день 4 четырехдневки.

Функция Эйлера.

236. Пусть n – натуральное число, $\overline{a}$ – обратимый класс по модулю n. Докажите, что существует такое натуральное число l, что $\overline{a}^l = \overline{1}$.

237. Пусть $\overline{0}$, $\overline{1}$, ..., $\overline{n \Leftrightarrow 1}$ – множество всех классов по модулю n. Докажите, что набор классов $\overline{0} \cdot \overline{a}$, $\overline{1} \cdot \overline{a}, \ldots, \overline{n \Leftrightarrow 1} \cdot \overline{a}$ совпадает с исходным.

238. Пусть $\overline{c}_1, \overline{c}_2, \ldots, \overline{c}_s$ – множество всех различных обратимых классов по модулю n. Докажите, что набор классов $\overline{c}_1 \cdot \overline{a}, \overline{c}_2 \cdot \overline{a}, \ldots, \overline{c}_s \cdot \overline{a}$ совпадает с исходным.

239. Докажите, что если $(a, n) = 1$, а s – количество взаимно простых с n классов, то $a^s \equiv 1 \pmod{n}$.

Определение. Количество чисел, взаимно простых с n и меньших его, обозначается $\varphi(n)$. Эта функция называется *функцией Эйлера.*

240. Найлите:

a) $\varphi(2)$; b) $\varphi(3)$; c) $\varphi(p)$; d) $\varphi(p^k)$;

где p – простое, а k – натуральное.

241. Докажите, что если n и k взаимно просты, $\overline{a}$ – класс по модулю n, то набор $\overline{a}$, $\overline{a+k}$, $\overline{a+2k}$, …, $\overline{a+(n \Leftrightarrow 1)k}$ исчерпывает множество всех классов по модулю n.

242. Докажите, что если m и n взаимно просты, то $\varphi(nm) = \varphi(n)\cdot\varphi(m)$.

243. Пусть $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$ – разложение числа n на простые множители. Выразите значение $\varphi(n)$ через n и p_i.

244. *(Формула включений и исключений)* Рассмотрим N некоторых объектов. Пусть есть какие-то k свойств $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, которыми могут обладать или не обладать рассматриваемые объекты. Обозначим за $N(\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_l} \overline{\alpha_{i_{l+1}}} \dots \overline{\alpha_{i_{l+m}}})$ (где $1 \leqslant i_j \leqslant k$, $i_s \neq i_t$ при $s \neq t$) количество объектов, обладающих свойствами $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_l}$ и не обладающих свойствами $\alpha_{i_{l+1}}, \dots, \alpha_{i_{l+m}}$.

Докажите, что $N(\overline{\alpha_1} \dots \overline{\alpha_k}) = N \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{k} N(\alpha_i) + \sum\limits_{1\ \ i_1<i_2\ \ k} N(\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}) + \dots + (\Leftrightarrow 1)^k N(\alpha_1 \dots \alpha_k)$.

245. Пользуясь формулой включений и исключений (см. задачу 244), найдите другое решение задачи 243.

19 июля. 1 день 4 четырехдневки.

Транспозиции.

246. В ряд как попало стоит рота солдат. Им требуется выстроиться по росту. Смогут ли они это сделать, если прапорщик разрешает за один раз меняться местами только каким-нибудь двум соседним солдатам?

247. Числа от 1 до 25 выписаны в ряд слева направо. За какое наименьшее количество перестановок соседних чисел можно переставить их в обратном порядке?

Определение. Назовем *беспорядком* расположение двух чисел (не обязательно стоящих рядом), при котором левое меньше правого.

Определение. *Транспозицией* называется перестановка двух (не обязательно стоящих рядом) элементов.

248. Докажите, что транспозиция соседних элементов меняет четность количества беспорядков.

249. Числа от 1 до 30 выписаны в ряд слева направо. Можно ли их переставить в обратном порядке, если за один шаг разрешается поставить в обратном порядке

a) любые три числа; b) любые четыре числа?

250. Докажите, что транспозиция любых элементов меняет четность количества беспорядков.

251. Физрук выстроил ребят в ряд. Хулигану Васе все никак не нравится свое место, поэтому каждые пять секунд он меняется местами с каким-либо школьником, но только если между ним и Васей стоит четное число других детей. Могло ли через некоторое время случиться так, что все ребята стоят на тех же местах, что и первоначально, а два Васиных соседа оказались переставлены местами?

19 июля. 1 день 4 четырехдневки.

Задачи на инверсию.

252. Построить окружность, касающуюся трех данных окружностей, имеющих общую точку.

253. Построить окружность, касающуюся двух данных окружностей, причем одной из них в заданной точке.

254. Построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся данной окружности и данной прямой.

255. Построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных окружностей.

256. *(Задача Аполлония)* Построить окружность, касающуюся трех данных непересекающихся окружностей.

257. Пусть $\widetilde{AB}$ – дуга окружности, и точка C – середина дополнительной дуги. Окружности ω_1 и ω_2 вписаны в двухугольник, образованный дугой $\widetilde{AB}$ и хордой AB, и касаются внешним образом. Проведем через точку касания окружностей ω_1 и ω_2 их общую касательную a. Докажите, что прямая a проходит через точку C.

Определение. Точки A и B называются симметричными относительно окружности с центром O радиусом R, если при инверсии с центром O радиусом R точка A переходит в точку B.

258. Пусть точка A симметрична точке A' относительно окружности ω и точка $C \in \omega$. Докажите, что отношение CA/CA' не зависит от произвола выбора точки C.

259. Пусть A' и B' — образы точек A и B при инверсии с центром O и радиусом R. Известно, что $AO = a$, $BO = b$ и $AB = c$. Найти $A'B'$.

260. *(Теорема Птолемея)* Доказать, что в четырехугольнике, вписанном в окружность, сумма произведений противоположных сторон равна произведению его диагоналей.

(Указание: Примените инверсию с центром в одной из вершин четырехугольника и предыдущую задачу.)

20 июля. 2 день 4 четырехдневки.

Инверсия: углы, комлексная интерпретация.

Определение. *Обобщенной окружностью* называется окружность или прямая.

Определение. Пусть A – точка пересечения двух обобщенных окружностей ω_1 и ω_2. *Углом* между обобщенными окружностями ω_1 и ω_2 в точке A называется угол между касательными прямыми, проведенными к ω_1 и ω_2 в точке A.

261. Пусть точки A и B симметричны относительно обобщенной окружности ω_1. Проведем через точки A и B обобщенную окружность ω_2. Докажите, что $\omega_1 \perp \omega_2$.

262. Обобщенная окружность ω_2 переходит в себя при инверсии относительно окружности ω_1 тогда и только тогда, когда $\omega_1 \perp \omega_2$.

263. Постройте окружность, перпендикулярную двум данным окружностям и проходящую через данную точку.

264. Пусть ω_1' и ω_2' – образы обобщенных окружностей ω_1 и ω_2 при инверсии относительно окружности ω. Докажите, что угол между ω_1 и ω_2 равен углу между ω_1' и ω_2'. Разберите все варианты взаимного расположения ω, ω_1 и ω_2.

265. Пусть точки A и B симметричны относительно обобщеннной окружности ω. Сделаем инверсию и обозначим через A', B' и ω' соответственно образы A, B и ω. Докажите, что A' и B' симметричны относительно ω'.

266. На плоскости даны четыре окружности $\omega_1, \ldots, \omega_4$, причем $\omega_{1,2} \perp \omega_{3,4}$. Пусть окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точке O. Найдите образ картинки при инверсии относительно O.

267. *(Поризм Штейнера)* Пусть ω' и ω'' — две непересекающиеся окружности и ω'' лежит внутри круга, образованого окружностью ω'. Нарисуем окружность ω_1, касающуюся ω' и ω'' (ω' — внутренним, а ω'' — внешним образом). Будем далее строить окружности в направлении по часовой стрелке от ω_1 так. Пусть ω_2 касается окружностей ω', ω'' и ω_1. Легко видеть (докажите!), что такая окружность ω_2 единственна. Аналогично, пусть окружность ω_3 касается ω', ω'' и ω_2, окружность ω_4 касается ω', ω'' и ω_3 и т.д. Допустим, что окружность ω_n касается ω_1. Докажите, что тогда при любом выборе окружности ω_1 окружность ω_n всегда будет касаться ω_1.

268. Преобразование инверсии можно рассматривать как функцию f на комплексной плоскости. Найдите $f(z)$ для инверсии

а) с центром в 0 радиусом 1;
б) с центром в 0 радиусом R;
в) с центром в z_0 радиусом R.

269. Докажите, что композиция двух инверсий с совпадающими центрами является гомотетией.

270. Докажите, что композиция двух инверсий с несовпадающими центрами является композицией инверсии и подобия второго рода (меняющего ориентацию).

20 июля. 2 день 4 четырехдневки.

Периодичность.

271. Найти сотую цифру после запятой в десятичной записи дроби $\frac{3}{14}$.

Определения.
Последовательность a_1, a_2, ... называется *периодической*, если существует такое натуральное T, что для всех $n > N$ верно равенство: $a_{n+T} = a_n$.
Начало последовательности a_1, a_2, ..., a_N называется *предпериодом.*
Число T называется *периодом* последовательности.

272. Даны две периодические последовательности: $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$. Докажите, что последовательность $\{a_i + b_i\}$ также периодична.

273. Даны две периодические последовательности: $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ с периодами 4 и 12 соответственно. Каким может быть период последовательности $\{a_i + b_i\}$?

274. Дана последовательность $\{a_i\}$. Известно, что T_1 и T_2 – ее периоды. Докажите, что (T_1, T_2) – также ее период.

Будем рассматривать последовательность цифр после запятой в десятичной записи дроби $\frac{m}{n}$.

275. Докажите, что эта последовательность периодична.

276. Известно, что $(n, 10) = 1$. Докажите, что

a) $\varphi(n)$ – период этой последовательности;
b) предпериод отсутствует;
c) наименьший период делит $\varphi(n)$.

277. Докажите, что если $n = 2^k 5^l n_1$, где $(n_1, 10) = 1$, то длина предпериода рассматриваемой последовательности равна $\max(k, l)$.

278. Найти длину периода последовательности, заданной дробью $\frac{k}{37}$.

279. Доказать, что дробь $0,1234567891011121314151617 18\ldots$ непериодична.

280. Докажите, что в ряду Фибоначчи найдется число, делящееся на 2000.

281. В тридесятом царстве у каждого за́мка и каждой развилки сходится по три дороги. Рыцарь выехал из своего за́мка и по очереди поворачивает то направо, то налево. Докажите, что рано или поздно он приедет к своему за́мку.

21 июля. 3 день 4 четырехдневки.

Симметрические многочлены.

282. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются кубы корней квадратного уравнения $x^2+6x+10=0$.

283. Решить систему уравнений

a) $\left\{\begin{array}{rcl} x^3+y^3 &=& 35 \\ x+y &=& 5 \end{array}\right.$; b) $\left\{\begin{array}{rcl} x^3+y^3 &=& 8 \\ x^2+y^2 &=& 4 \end{array}\right.$; c) $\left\{\begin{array}{rcl} x^5+y^5 &=& 33 \\ x+y &=& 3 \end{array}\right.$.

284. Дан график кубической параболы и две прямые, параллельные оси абсцисс, пересекающие график в трех точках каждая. Пусть абсциссы этих точек $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5<x_6$. Докажите, что $x_2 \Leftrightarrow x_1+x_6 \Leftrightarrow x_5=x_4 \Leftrightarrow x_3$.

285. Доказать, что если x_1 и x_2 корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ с целыми коэффициентами p и q, то при любом натуральном n число $x_1^n+x_2^n$ является целым.

286. Выразите x^n+y^n через $x+y$ и xy.

Определение. Многочлен от x,y называется *симметрическим*, если он не изменяется при замене x на y, а y на x.

Определение. Симметрические многочлены $\sigma_1=x+y$, $\sigma_2=xy$ называются *элементарными симметрическими многочленами* от x и y.

287. *(основная теорема о симметрических многочленах)* Любой симметрический многочлен от x и y можно представить в виде многочлена от σ_1,σ_2.

288. Докажите, что каждую степенную сумму $x^k+y^k+z^k$ можно представить в виде многочлена от $x+y+z$, $xy+xz+yz$ и xyz.

Определение. Назовем многочлен $f(x,y,z)$ от трех переменных *симметрическим*, если при любой перестановке этих переменных он остается неизменным.

289. Какие многочлены будут элементарными симметрическими многочленами от трех переменных?

Определение. Симметрический многочлен с наименьшим числом членов, одним из слагаемых которого является одночлен $x^k y^l z^m$ называется *симметрической оболочкой* этого одночлена.

290. Докажите, что симметрическая оболочка любого одночлена выражается через σ_1, σ_2 и σ_3.

291. Докажите основную теорему о симметрических многочленах от трех переменных.

292. Разложить на множители многочлен $6x^4 \Leftrightarrow 11x^3y \Leftrightarrow 18x^2y^2 \Leftrightarrow 11xy^3+6y^4$.

293. Решить иррациональное уравнение $\sqrt[4]{97 \Leftrightarrow x}+\sqrt[4]{x}=5$.

21 июля. 3 день 4 четырехдневки.

Построения одним циркулем.

В рамках этой серии задач все построения требуется проводить одним циркулем.
Прямая считается заданной, если заданы две ее точки.

294. Дан отрезок AB. Построить точку C так, чтобы точка B была бы серединой отрезка AC.

295. Дан отрезок AB. Посроить отрезок $n\cdot AB$.

296. Даны точки A, B и C. Построить точку C', симметричную точке C относительно прямой AB.

297. Дана окружность ω с центром O, точка A и ее образ A' при инверсии относительно ω. Точка A_1 лежит на луче OA, причем $OA_1=\frac{1}{n}OA$. Построить образ точки A_1.

298. Дана окружность ω с центром O и точка A

a) вне ω;

b) внутри ω.

Построить образ точки A при инверсии относительно окружности ω.

299. Разделить отрезок на n равных частей.

300. На прямой, заданной точками A и B построить несколько точек.

301. Из данной точки опустить перпендикуляр на прямую, заданную двумя точками.

302. Дана окружность ω с центром O и прямая, заданная точками A и B. Построить образ прямой AB при инверсии относително окружности ω.

303. Даны точки A, B и C. Построить окружность, описанную около треугольника ABC.

304. Дана окружность ω с центром O и окружность ω_1 с центром O_1. Построить образ окружности ω_1 при инверсии относително окружности ω.

305. Найти точки пересечения данной окружности и прямой, заданной двумя точками.

306. Найти точку пересечения двух прямых, каждая из которых задана парой точек.

Теорема (Мор–Маскерони). *Любое построение на плоскости, выполнимое с помощью циркуля и линейки, выполнимо с помощью одного лишь циркуля.*

22 июля. 4 день 4 четырехдневки.
Заключительная олимпиада. Основные задачи.

307. В комнатах 3–8 корпуса №7 живут девятиклассники. Некоторые из них иногда пропускают зарядку. В конце смены оказалось, что в соседних комнатах суммарное количество невыходов на зарядку отличается на 1. Может ли оказаться, что девятиклассники из седьмого корпуса прогуляли суммарно 100 зарядок?

308. В классе учатся 6 активистов. Они образовали 30 комитетов, причем любые два комитета отличаются по составу, но имеют общих членов. Докажите, что можно образовать еще 1 комитет с тем же свойством.

309. $ABCDEF$ — вписанный шестиугольник. Докажите, что диагонали AD, BE и CF пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$.

310. Решите в натуральных числах уравнение:

$$5^5 \Leftrightarrow 5^4 + 5^n = m^2.$$

311. Даны прямая l, точка A на ней и точка B вне l. Через точки A и B проведена окружность с центром в точке O. Пусть эта окружность повторно пересекает прямую l в точке C. Найдите геометрическое место середин отрезков OC.

312. Пусть $x_1, \ldots, x_5$ — действительные числа. Докажите, что найдутся такие действительные числа $y_1, \ldots, y_5$, что $x_i \Leftrightarrow y_i \in \mathbb{Z}$ и

$$\sum_{1 \quad i<j \quad 5} (y_i \Leftrightarrow y_j)^2 < 4.$$

Заключительная олимпиада. Задачи на вывод

313. Девять вершин правильного 20-угольника покрашены в белый цвет. Докажите, что существует равнобедренный треугольник с вершинами в покрашенных точках.

314. Пусть K — точка пересечения биссектрис внутреннего угла B и внешнего угла C треугольника ABC; L — точка пересечения биссектрис внутреннего угла C и внешнего угла B. Докажите, что середина отрезка KL лежит на окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

315. На плоскости лежат несколько квадратных салфеток одинакового размера со сторонами, параллельными осям координат. Докажите, что можно воткнуть несколько булавок так, чтобы каждую салфетку проткнула ровно одна булавка.

316. Функция f определена на множестве натуральных чисел и удовлетворяет следующим условиям:

$$f(1) = 1,\ f(3) = 3,\ f(2n) = f(n),$$

$$f(4n+1) = 2f(2n+1) \Leftrightarrow f(n),\ f(4n+3) = 3f(2n+1) \Leftrightarrow 2f(n).$$

Найдите число всех таких значений n, для которых $f(n) = n$, $1 \leqslant n \leqslant 2000$.