Девятнадцатая Летняя многопредметная школа Кировской области
Вишкиль, 2–27 июля 2003 года

9 класс, группа профи

МАТЕРИАЛЫ ЗАНЯТИЙ

Самойлов Л. М.
Лузгарев А. Ю.
Игнатенков Е. Н.

Вступительный тест

1. Найдите $\sqrt[3]{i}$.
2. Назовем натуральное число a *замечательным*, если для некоторого k выполнено
$$ak \equiv 1 \pmod{100}.$$
Сколько имеется замечательных чисел от 1 до 100?
3. Сколькими способами можно расселить семь человек в 2-х, 3-х и 4-х местную комнату, если Иванов и Петров в одной двуместной комнате жить не должны?
4. Найдите $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$, где x_1, x_2 — корни уравнения $2x^2 + 3x - 1 = 0$.
5. При каких a число 2 является корнем уравнения $x^3 + ax^2 + 5x - 8a = 3$?
6. Докажите, что для любого натурального n число $5^{2^n} - 1$ делится на 2^{n+2}.
7. Дайте определение поворота.
8. Найдите знаменатель бесконечной убывающей геометрической прогрессии, если известно, что ее первый член равен 3, а сумма равна 4.
9. Найдите минимальное необходимое количество взвешиваний, за которое можно определить одну фальшивую монету из ста, если известно, что она легче настоящей?
10. На плоскости заданы окружность, треугольник и точка. Рассматриваются все отрезки, один конец которых лежит на окружности, второй конец — на контуре треугольника, а середина — в заданной точке. Сколько таких отрезков может получиться (укажите все возможности)?

Вступительная олимпиада

1. 12 кандидатов в мэры рассказывали о себе. Через некоторое время один сказал: “До меня соврали один раз”. Другой сказал: “А теперь — дважды”. “А теперь — трижды”, — сказал третий, и так далее, до 12-го, который сказал: “А теперь соврали 12 раз”. Тут ведущий прервал дискуссию. Оказалось, что по крайней мере один кандидат правильно посчитал, сколько раз соврали до него. Так сколько раз всего соврали кандадаты?
2. На плоскости горит лампочка. Три круга расположены так, что область, освещаемая лампочкой, ограничена. Верно ли, что хотя бы два из этих кругов имеют общую точку?
3. Найдите все целочисленные решения уравнения $(n + 2)^4 - n^4 = x^3$.
4. Можно ли натуральные числа большие, чем 2003, разбить на три непустых непересекающихся множества так, чтобы произведение любых двух элементов из разных множеств лежало бы в третьем множестве?
5. Длина каждого ребра замкнутой ломаной равна 1, а расстояние между любыми вершинами ломаной не превосходит 1. Докажите, что число звеньев ломаной нечетно.

О бесконечном

Упр0. Верны ли следующие утверждения?

а) В ряду натуральных чисел найдётся сколь угодно много последовательных составных чисел.

б) В ряду натуральных чисел найдётся бесконечно много последовательных составных чисел.

Зад0. Можно ли выписать натуральные числа в ряд так, чтобы каждое число оказалось выписаным бесконечное число раз?

Зад1. Докажите, что среди 11 бесконечных десятичных дробей найдутся две, совпадающие в бесконечном числе позиций.

Зад2. а) Даны три последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$; $b_1, b_2, \ldots$; $c_1, c_2, \ldots$. Докажите, что найдутся такие p и q, что $a_p \le a_q$, $b_p \le b_q$, $c_p \le c_q$.

б) Верно ли аналогичное утверждение, если имеется не 3, а бесконечное число последовательностей?

Зад3. Известно, что человечество бессмертно, а каждый человек смертен. Число людей в каждом поколении конечно. Докажите, что найдется бесконечная мужская цепочка, начинающаяся с Адама.

Для самостоятельного решения

Зад1. Можно ли среди чисел $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}, \ldots$ выделить а) сколь угодно длинную; б) бесконечно длинную арифметическую прогрессию?

Теорема Хелли

Опр. Плоская фигура называется *выпуклой,* если она целиком содержит любой отрезок, соединяющий две ее точки.

Зад1. На прямой дано n выпуклых фигур, любые две из которых имеют общую точку. Докажите, что и все фигуры имеют общую точку.

Зад2. На плоскости даны 4 выпуклых фигуры, каждые три из которых имеют общую точку. Докажите, что и все эти фигуры имеют общую точку.

Теорема Хелли. На плоскости дано n выпуклых фигур, каждые три из которых имеют общую точку. Докажите, что и все эти фигуры имеют общую точку.

Зад3. На плоскости заданы несколько полуплоскостей, внутренности которых покрывают всю плоскость. Докажите, что из этих полуплоскостей можно выбрать три, внутренности которых тоже покрывают всю плоскость.

Зад4. На столе сидит несколько комаров, любых троих из которых можно прибить круглой кружкой радиуса 1. Докажите, что их всех можно прибить этой кружкой одновременно.

Для самостоятельного решения

Теорема Юнга. На плоскости дано несколько точек, расстояние между любыми двумя из которых не превосходит 1. Докажите, что все эти точки можно накрыть кругом радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Комплексные числа

Опр1. *Комплексное число* — это вектор на плоскости с ортонормированными базисными векторами 1 и i. Таким образом, каждое комплексное число можно единственным образом записать в виде $z = a + b \cdot i$, где $a, b \in \mathbb{R}$. На множестве комплексных чисел естественным образом определена операция сложения, а умножение производится с учетом дистрибутивности и правила $i \cdot i = -1$. При этом a называется *вещественной частью* ($a = \operatorname{Re} z$), b — *мнимой частью* ($b = \operatorname{Im} z$) комплексного числа z. Множество комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

Зад1. Вычислите выражение: $\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$

Зад2. Чему равно i^n, где n — целое число?

Опр2. Комплексное число $\overline{z} = a - b \cdot i$ называется *комплексно сопряженным* к числу $z = a + b \cdot i$.

Свойства. 1. Сопряженное число к сумме двух комплексных чисел равно сумме чисел, сопряженных к слагаемым: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$.

2. Сопряженное число к произведению двух комплексных чисел равно произведению чисел, сопряженных к множителям: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$.

Опр3. Произведение комплексного числа на сопряженное ему число называется *квадратом модуля комплексного числа.*

Лемма. Модуль комплексного числа — действительное неотрицательное число.

Предложение 1. На множестве $\mathbb{C}$ определена операция деления на ненулевое число.

Упр3. а) Каков геометрический смысл модуля комплексного числа? б) Докажите, что модуль произведения чисел равен произведению модулей: $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Зад4. Решите уравнения: а) $z^2 = 5 - 12i$; б) $z^2 - (1+i)z + 6 + 3i = 0$

Опр4. *Аргумент* α не равного нулю комплексного числа равен углу поворота от положительной полуоси $O1$ в сторону положительной мнимой полуоси Oi до направления комплексного числа. Обозначение: $\alpha = \arg(z)$.

Теорема 1. Преобразование умножения на комплексное число с модулем единица является поворотом плоскости.

Предложение 2. Любое ненулевое комплексное число z можно единственным образом записать в виде $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, где $r > 0$, $\alpha \in [0; 2\pi)$, причем $r = |z|$, $\alpha = \arg z$.

Теорема 2. При умножении комплексных чисел их аргументы складываются: $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

Формула Муавра. Докажите, что $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено: $\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi) = (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)^n$.

Опр5. Пусть $z \in \mathbb{C}$. *Корнем* n-ой степени из z называется множество всех чисел ω таких, что $\omega^n = z$.

Зад5. Найдите а) $\sqrt{i}$; б) $\sqrt[3]{i}$; в) $\sqrt[6]{1}$.

Зад6. а) Докажите, что корней n-ой степени не более, чем n. б) Опишите множество $\sqrt[n]{1}$. в) Корней из ненулевого числа ровно n. г) Найдите $\sqrt[3]{1 + i\sqrt{3}}$.

Зад7. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ — все корни n-ой степени из 1. Найдите а) их сумму; б) их произведение.

Зад8. Докажите равенство:

$$\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}, \quad \text{где } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Для самостоятельного решения

Зад1. Найдите $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$.

Зад2. Найдите $\sqrt[3]{\frac{8+24i}{3-i}}$.

Зад3. Найдите сумму s-тых степеней всех корней n-ой степени из 1.

Зад4. Вычислите суммы:

а) $\cos x + C_n^1 \cos 2x + \cdots + C_n^n \cos(n+1)x$;

б) $\sin x + C_n^1 \sin 2x + \cdots + C_n^n \sin(n+1)x$.

Гомотетия

Опр. *Гомотетией* с центром в точке O и коэффициентом k называется геометрическое преобразование плоскости, которое сопоставляет каждой точке A точку A_1, для которой выполнено равенство $\overline{OA_1} = k \cdot \overline{OA}$. Гомотетию с центром в O и коэффициентом k будем обозначать H_O^k.

Замечание. Легко видеть, что при гомотетии точка, ее образ и центр гомотетии лежат на одной прямой. У гомотетии или ровно одна неподвижная точка (ее центр), или все точки плоскости.

Упр1. Докажите, что если $A_1 = H_O^k(A)$, $B_1 = H_O^k(B)$, то $\overline{A_1 B_1} = k \cdot \overline{AB}$.

Упр2. Докажите, что при гомотетии прямые переходят в параллельные прямые, окружности — в окружности.

Упр3. Докажите, что для любой точки A верно следующее: $H_O^k(H_O^{1/k}(A)) = A$.

Зад4. Докажите, что в трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка, в которой пересекаются продолжения боковых сторон, лежат на одной прямой.

Зад5. Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Прямая пересекает эти окружности в точках P, Q, R, S, расположенных последовательно. Докажите, что $\angle PAQ = \angle RAS$.

Зад6 (прямая Эйлера). В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот (ортоцентр), M — точка пересечения медиан. Докажите, что точки M, H, O лежат на одной прямой (*прямая Эйлера*), причем $\overline{MH} = 2 \cdot \overline{OM}$.

Предложение. Композиция двух гомотетий с коэффициентами k_1 и k_2 является гомотетией с коэффициентом $k_1 k_2$, причем ее центр лежит на прямой, соединяющей центры этих гомотетий.

Зад7. Общие внешние касательные к парам окружностей S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_1 пересекаются в точках A, B и C соответственно. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

Для самостоятельного решения

Зад1. Окружность касается равных сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC в точках P и K и внутренним образом касается описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что середина отрезка PK является центром вписанной окружности треугольника ABC.

Зад2. Докажите, что в любой выпуклый многоугольник можно поместить два многоугольника, подобных исходному с коэффициентом $\frac{1}{2}$ так, чтобы они не имели общих внутренних точек.

Зад3. Три окружности одинаковых радиусов вписаны в углы A, B, C треугольника ABC. Четвертая окружность касается внешним образом всех этих трех окружностей. Доказать, что ее центр лежит на прямой, проходящей через центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC.

Многочлены над $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}$ для препов

1. Вводим обозначения: $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$.

   Упр-2. Являются ли многочленами: $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x^2+1}$, $\sin x$?

2. Вспоминаем теорему о рациональных корнях.

   Упр-1. А не будет ли $\sin 10^\circ$ иррациональным числом?

   Упр0. Пусть $f \in \mathbb{Z}[x]$. а) Докажите, что $f(a) - f(b)$ делится на $a - b$, где a, b — различные целые числа.

   б) Известно, что $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Докажите, что $f(n)$ кратно трем для любого целого n.

3. Вспоминаем теорему Безу. Решаем следующую задачу:

   Зад0. f дает остаток $x+1$ при делении на x^2+1 и остаток 3 при делении на $x+2$. Найдите остаток при делении f на $(x^2+1)(x+2)$.

4. Вспоминаем определение неприводимого (над чем-нибудь) многочлена, вспоминаем существование разложение, единственность упоминаем без доказательства, отсылаем на будущий ликбез.

Зад1. Докажите, что многочлен $(x-1)(x-2)(x-3)-1$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

Зад2. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные целые числа. Докажите, что многочлен

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)-1$$

неприводим над $\mathbb{Z}$.

Критерий Эйзенштейна. Пусть $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$, причем для некоторого простого p коэффициент a_n не делится на p, коэффициенты $a_0, \ldots, a_{n-1}$ делятся на p, но коэффициент a_0 не делится на p^2. Тогда f неприводим над $\mathbb{Z}$.

Зад3. Докажите, что многочлен $x^n - a$ неприводим над $\mathbb{Z}$, если a — произведение различных простых чисел.

Зад4. Докажите, что многочлен $x^{p-1} + \cdots + x + 1$ неприводим над $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда p — простое число.

Опр. Пусть $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$. Наибольший общий делитель коэффициентов $a_0, \ldots, a_n$ называется *содержанием* многочлена f и обозначается $\mathrm{cont}(f)$.

Лемма Гаусса. $\mathrm{cont}(fg) = \mathrm{cont}(f) \cdot \mathrm{cont}(g)$.

Теорема. Многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$ неприводим над $\mathbb{Q} \iff$ неприводим над $\mathbb{Z}$.

Для самостоятельного решения

Зад1. Функция $f(x)$ такова, что $f(n) = \frac{1}{n}$ для любого натурального n. Может ли f являться многочленом?

Зад2. Многочлен f дает остаток $ax + b$ при делении на $x^2 - 2$ и остаток $cx + d$ при делении на $x^2 + 3$. Найдите остаток при делении $f(x)$ на $(x^2 - 2)(x^2 + 3)$.

Зад3. а) $f(x)$ принимает значение 5 при пяти различных целых значениях x. Докажите, что $f(x)$ не имеет целых корней.
б) $f(x)$ принимает значение 1 при трех различных целых значениях x. Докажите, что $f(n) \neq -1$ при целых n.

Зад4. При каких a многочлен $x^3 + y^3 + z^3 + axyz$ делится на многочлен $x + y + z$?

Зад5. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные целые числа. Докажите, что многочлен

$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2+1$$

неприводим над $\mathbb{Q}$.

Теорема Рамсея для графов

Зад1. а) Среди любых шести человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.
б) Среди любых 10-ти человек есть либо трое попарно знакомых, либо четверо попарно незнакомых.
в) Докажите, что в отряде 9 класса найдутся 4 попарно знакомых или 4 попарно незнакомых школьника.
г) Докажите, что на Земле есть либо 100 попарно знакомых человек, либо 100 попарно незнакомых.

Задачу 1г) естественно переформулировать на языке графов.

Опр. Число $R(m, n)$ определим как наименьшее R (если оно существует!), при котором в любой раскраске полного графа K_R в красный и синий цвета найдется либо красный K_m, либо синий K_n.

Упр1. а) Найдите $R(2, n)$ и $R(m, 2)$. Покажите, что $R(m, n) = R(n, m)$.

б) Докажите, что $R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1)$. Докажите, что $R(m, n)$ существует при всех m и n.
в) Оцените $R(5, 5)$ сверху. Позволяет ли полученная оценка утверждать, что среди всех девятиклассников в ЛМШ есть либо 5 попарно знакомых, либо 5 попарно незнакомых?
г) Получите оценку для $R(n, m)$ сверху (например, через C_n^k).
д) Найдите хотя бы одну пару (n, m) (см. задачи для самостоятельного решения), для которой наша оценка не точна. Почему тогда она не будет точной и для всех бóльших пар?

Замечание. Известно, что $25 \leq R(4, 5) \leq 28$ и $43 \leq R(5, 5) \leq 49$. Поскольку для точного вычисления $R(n, m)$ ничего лучшего чем полный перебор всех раскрасок полных графов не придумано, то есть мнение, что даже $R(5, 5)$ узнается еще нескоро.

Зад2. а) Каждый из 17-ти ученых переписывается со всеми остальными. В переписке речь идет только об одной из трех тем. Докажите, что какие-то трое ученых переписываются по одной и той же теме.
б) В выпуклом 66-угольнике каждое ребро и диагонали покрасили в один из 4-х цветов. Докажите, что найдется составленный из этих отрезков треугольник одного цвета.

Замечание. Известно, что число 66 можно заменить на 64, но нельзя на 50.
в) Пусть a_n – последовательность натуральных чисел, образованная по следующему закону: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = (n+1)a_n + 1$. Полный граф на $a_n + 1$ вершине покрасили в n цветов. Докажите, что при этом образовался треугольник одного цвета.
г) Как-нибудь оцените a_n сверху.

Теорема Рамсея для графов. Для любых чисел n, r найдется столь большое число $R = R(n, r)$ что при произвольном раскрашивании ребер графа K_R в r цветов найдется одноцветный подграф K_n

Упр2. а) “Склеив 2 цвета”, выведите теорему Рамсея для 3-х цветов из теоремы для 2-х цветов.
б) Выведите теорему Рамсея для нескольких цветов из теоремы Рамсея для двух цветов. Получите явные оценки для числа R.

Для самостоятельного решения

Зад1. Верно ли, что среди любых 6-ти чисел найдутся либо три попарно взаимно простых либо три, имеющие общий делитель?

Зад2. Среди любых 9-ти человек есть либо трое попарно знакомых, либо четверо попарно незнакомых. А среди 8-ми?

О геометрическом

Зад1. Даны угол ABC и точка M внутри него. Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку M.

Зад2. Постройте треугольник ABC по сторонам AB и AC и биссектрисе AD.

Зад3. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке D, DM — ее диаметр. Прямая BM пересекает сторону AC в точке K. Докажите, что $AK = DC$.

Зад4. Треугольник со сторонами a, b и c существует тогда и только тогда, когда существуют такие положительные числа x, y и z, что $a = y + z$, $b = x + z$, $c = x + y$.

Зад5. Пусть a, b и c — длины сторон треугольника, $P = a + b + c$, $Q = ab + bc + ca$. Докажите, что $3Q < P^2 < 4Q$.

Зад6. Пусть a, b и c — длины сторон треугольника. Докажите, что

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3.$$

Для самостоятельного решения

Зад1. Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC, D — точка касания ее со стороной AC, B_1 — середина стороны AC. Докажите, что прямая B_1O делит отрезок BD пополам.

Зад2. Пусть a, b и c — длины сторон треугольника. Докажите, что

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0.$$

Зад3. С помощью одного только циркуля а) удвойте данный отрезок, б) поделите данный отрезок пополам.

Числовые поля

Задача для обсуждения. *Уравнением Пелля* называется уравнение $x^2-dy^2=1 (d\in\mathbb{N})$, которое надо решить в целых числах.

а) Если уравнение Пелля имеет два решения с $y\neq 0$, то оно имеет еще одно решение с $y\neq 0$.

б) Если уравнение Пелля имеет одно решение с $y\neq 0$, то оно имеет бесконечно много решений.

Упр1. а) Докажите, что сумма, разность, произведение и частное чисел вида $a+b\sqrt{3}$ (где a, b — рациональны) — число того же вида. б) Докажите, что если число представляется в виде $a+b\sqrt{3}$, где a, b — рациональны, то оно представляется так единственным образом.

Опр1. Множество действительных (комплексных) чисел, замкнутое относительно четырех арифметических действий, и содержащее ненулевые элементы, называется *числовым полем.*

Упр2. Докажите, что всякое числовое поле содержит все рациональные числа.

Упр3. Являются ли числовыми полями множества выражений вида а) $a+bi$, б) $a-b\sqrt{2}$, в) $a+b\sqrt{d}$ (где a, b, d — рациональные числа)?

Упр4. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе: $\dfrac{1}{1+2\sqrt{2}-3\sqrt{3}+\sqrt{6}}$.

Упр5. Являются ли числовыми полями множества выражений вида а) $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$, б) $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$ (где a, b, c, d — рациональные числа)?

Зад1. Из чисел какого вида состоит наименьшее числовое поле, содержащее $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ одновременно (укажите общий вид элементов этого поля и докажите, что других чисел в нем нет)? Это поле естественно обозначить через $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$.

Предложение. а) Пересечение двух числовых полей — числовое поле. б) Для любого подмножества $M\subset\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) существует наименьшее (по включению) числовое поле, содержащее M (это поле обозначается $\mathbb{Q}(M)$).

Зад2. а) Опишите поле $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$.

б) Избавьтесь от иррациональности в знаменателе: $\dfrac{1}{1+2\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}$.

Зад3. Существует ли числовое поле, отличное от $\mathbb{Q}$, не содержащее ни одного квадратного корня из целого числа?

Зад4. Докажите иррациональность числа $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$.

Зад5. Докажите иррациональность числа $\sqrt{a_1}+\dots+\sqrt{a_n}$, где $a_1,\dots,a_n$ — различные натуральные числа, свободные от квадратов.

Для самостоятельного решения

Зад1. Докажите, что $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=\mathbb{Q}(\alpha)$ для некоторого $\alpha\in\mathbb{R}$.

Зад2. Полностью опишите числовое поле $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1},\sqrt{d_2})$ (то есть найдите общий вид элементов, докажите единственность представления в таком виде).

Зад3. Опишите минимальное числовое поле, в котором каждое квадратное уравнение с рациональными коэффициентами имеет корень.

Зад4. Докажите, что в выражении можно избавиться от иррациональности в знаменателе: $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\dots+\sqrt[2003]{2003}}$.

Шары и перегородки (ликбез)

Упр1. Сколькими способами 48 комаров могут сесть на 6 школьников, если а) на некоторых школьников может никто не сесть, б) на каждом школьнике кто-нибудь да сидит?

Зад1. Сколькими способами в книжку из 48 листов можно положить 5 закладок? а) Две закладки не могут лежать рядом. б) Две закладки могут лежать рядом.

Зад2. Сколько решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ а) в натуральных числах? б) в целых неотрицательных числах?

Зад3. На полке стоят 12 книг. Сколькими способами можно выбрать с полки 5 книг, чтобы никакие не стояли рядом?

Зад4. Сколько есть решений уравнения $x + y + z = 100$ в натуральных числах от 1 до 60?

Зад5. Докажите равенство: $0 \cdot C_n^0 + 1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + \dots + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^n$.

Зад6. Дана клетчатая доска $m \times n$. *Хромая ладья* — это фигура, которая может ходит только на одну клетку вправо или вниз. Сколькими способами она может дойти из левой верхней клетки в правую нижнюю?

Зад7. Найдите сумму квадратов элементов n-той строки треугольника Паскаля.

Аффинная геометрия

Опр. Геометрическое преобразование называется *аффинным*, если оно обладает следующими свойствами:

1. взаимная однозначность;
2. если два отрезка равны между собой, параллельны и одинаково направлены, то такими же будут и их образы (это позволяет отождествлять наше преобразование с некоторой функцией f на множестве векторов);
3. $f(\overline{a} + \overline{b}) = f(\overline{a}) + f(\overline{b})$, $f(t\overline{a}) = tf(\overline{b})$ для любого действительного числа t. (функция f *линейна*).

Свойства аффинных преобразований:

1. Прямые (параллельные, пересекающиеся) переходят в прямые (параллельные, пересекающиеся), а отрезки — в отрезки.
2. Сохраняется отношение длин (отношение, в котором точка делит отрезок равно отношению, в котором ее образ делит образ этого отрезка).
3. *(Основное свойство аффинных преобразований)* Для любых двух треугольников на плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ найдется единственное аффинное преобразование, переводящее A в A_1, B в B_1, C в C_1. (С помощью аффинного преобразования любой треугольник можно перевести в любой.)

Опр. *Растяжением* плоскости относительно оси l с коэффициентом k называется преобразование плоскости, при котором каждая точка M переходит в такую точку M', что $\overline{OM'} = k\overline{OM}$, где O — проекция точки M на прямую l. (Растяжение с коэффициентом меньше 1 называется *сжатием.*)

Зад1. Докажите, что растяжение плоскости является аффинным преобразованием.

Опр. *Аффинной системой координат на плоскости* называется система из двух различных прямых, проходящих через точку O с выбранными на них направлениями и масштабами (то есть заданы единичные векторы $\overline{e_1} = \overline{OE_1}$ и $\overline{e_2} = \overline{OE_2}$). *Аффинными координатами* точки M в данной аффинной системе координат называется пара чисел (x_1, x_2) такие, что $\overline{OM} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2}$.

Предложение. Для того, чтобы задать аффинное преобразование плоскости с введенной на ней аффинной системой координат, необходимо и достаточно указать точку O' и два неколлинеарных вектора $\overline{e_1}'$ и $\overline{e_2}'$

Зад2. Через каждую вершину треугольника проведены две прямые, делящие противоположную сторону треугольника на три равные части. Докажите, что диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, образованного этими прямыми, пересекаются в одной точке.

Зад3. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC через точку B проведена прямая, параллельная стороне CD и пересекающая диагональ AC в точке P, а через точку C — прямая, параллельная стороне AB и пересекающая диагональ BD в точке Q. Докажите, что прямая PQ параллельна основаниям трапеции.

Зад4. На сторонах AB, BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки K, L, M соответственно, делящие эти стороны в одинаковых отношениях. Пусть b, c, d — прямые, проходящие через B, C, D параллельно прямым KL, KM и ML соответственно. Докажите, что прямые b, c, d проходят через одну точку.

Зад5. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AH, медиана AM, медиана BN и чевиана BG, причем точка G делит сторону AC в таком же отношении, в каком точка H делит сторону BC. Обозначим точку пересечения BN и AH через K и точку пересечения AM и BG через L. Докажите, что $KL \parallel AB$.

Зад6. Докажите, что два четырехугольника переводятся друг в друга аффинным преобразованиям тогда и только тогда, когда диагонали этих четырехугольников делятся точками пересечения в соответственно равных соотношениях.

Зад7. Аффинное преобразование циклически меняет местами вершины треугольника ABC, т. е. переводит точку A в точку B, точку B в точку C, а точку C в точку A. Найдите все неподвижные точки этого преобразования.

Зад8. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника параллельна одной из его сторон. Докажите, что аффинным преобразованием этот пятиугольник можно перевести в правильный пятиугольник.

Числа Каталана

Обозначение. Через T_n обозначим количество способов расставить n открывающих и n закрывающих скобок так, чтобы запись была корректной.

Упр0. Дайте строгое определение правильного скобочного выражения.

> Выпишите все ПСВ для $n = 0, 1, 2, 3, 4$. (1,1,2,5,14) Докажите, что если ПСВ прочитать с конца, то получится ПСВ. Это то же, что последовательности из $+1$ и -1 с полож. част суммами

Зад1. Докажите, что числа T_n удовлетворяют соотношениям $T_0 = T_1 = 1$, $T_{n+1} = T_0T_n + T_1T_{n-1} + ... + T_nT_0$.

Зад2. Обозначим через T_n число способов разбить $(n+2)$-угольник на треугольники непересекающимися диагоналями. Покажите, что числа T_n удовлетворяют соотношениям $T_0 = T_1 = 1$, $T_{n+1} = T_0T_n + T_1T_{n-1} + ... + T_nT_0$.

> Дополнительно вспомнить о том, что число таких диагоналей и число таких треугольников не зависит от разбиения.

Зад3. Обозначим через T_n число способов разбить $2n$ точек на окружности на пары и соединить точки из одной пары отрезками так, чтобы отрезки не пересекались. Покажите, что числа T_n удовлетворяют соотношениям $T_0 = T_1 = 1$, $T_{n+1} = T_0T_n + T_1T_{n-1} + ... + T_nT_0$.

Зад4. В очереди в кассу кинотеатра стоят $2n$ зрителей, у половины из них полтинники, у половины рубли. Билет стоит рубль. Изначально касса пуста и сдачу давать не может. Обозначим через T_n количество очередей, которые смогут целиком пройти через эту кассу.

а) Покажите, что числа T_n здесь те же самые, что и в предыдущих задачах.

б) Сопоставим очереди схему: путь по линиям сетки из точки $(0,0)$ в точку (n,n).

в) Докажите, что число "плохих" очередей равно C_{2n}^{n-1}, тогда число искомых равно $\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$.

Опр. Числа $T_n = \frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$ называются **числами Каталана**.

Зад5. Докажите, что количество способов расставить $2n$ солдат разного роста в 2 шеренги так, чтобы в строках (слева направо) и столбцах (сверху вниз) они стояли по росту, равно T_n.

Зад6. В очереди в кассу кинотеатра стоят n зрителей с полтинниками, m с рублями, в начале в кассе p полтинников, цена билета полтинник. Найдите количество очередей, которые целиком смогут пройти через эту кассу.

Помимо простого обобщения решения зад4 рассмотреть индукционное решение при p=0 двойной индукцией по (m,n) или одинарной по их сумме. Ответ: $C_{n+m}^{m} - C_{n+m}^{m-p-1}$ (при $n+p+1>m$), что при $p=0$ есть $\frac{n-m+1}{n+1}C_{n+m}^{m}$. Намекнуть также о наклонных прямых

Зад7. а) (Лемма Рени) Пусть $x_1,\ldots,x_m$ – последовательность чисел ±1 с суммой 1. Тогда ровно у одного из m ее циклических сдвигов частичные суммы все положительны.

б) Выведите из леммы Рени формулу для чисел Каталана, используя задачу про очередь.

Считаем число последовательностей из $+1$ и -1 с полож част суммами и общей суммой $+1$;

Для самостоятельного решения

Зад0. Рассмотрим произведение $a_1a_2...a_n$. Сколькими способами можно расставить в нем скобки так, чтобы однозначно можно было восстаносить порядок выполнения операции произведения?

Зад1. Есть таблица из двух строк длин $n \geq m$ (диаграмма Юнга из двух строк). Сколькими способами пожно расставить в ней числа от 1 до $n+m$ так, чтобы слева направо и сверху вниз они убывали?

Ответ: $C_{n+m}^{m} - C_{n+m}^{m-p-1} = \frac{n-m+1}{n+1}C_{n+m}^{m}$

Зад2. а) В очереди стоят n зрителей с рублями, m с трешками, изначально касса пуста, цена билета рубль. Найдите количество очередей, которые целиком смогут пройти через эту кассу.

Ответ $C_{n+m}^{m} - 2C_{n+m}^{m-1}$

б) Сколькими способами $3n$ точек на окружности можно разбить на n непересекающихся треугольников?

Ответ $\frac{1}{(3-1)n+1}C_{3n}^{n} = \frac{3}{n-1}C_{3n-1}^{n-2}$

Зад3*. а) В предыдущей задаче рассматриваем очереди с 1-рублями и k-рублями;

б) разбиваем kn точек на n групп по k точек.

О бесконечном–2

Зад1. За дядькой Черномором выстроилось чередой бесконечное число богатырей различного роста. Доказать, что он может приказать части из них выйти из строя так, чтобы в строю осталось бесконечное число богатырей, стоящих в порядке возрастания или убывания.

Зад2. В некотором царстве с целью упрощения процесса торговли выпустили неограниченное число монет достоинством в $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ тугриков, где $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$. Докажите, что в некоторый момент эту процедуру можно оборвать: найдётся такое число N, что а) любую сумму, которую можно уплатить со сдачей выпущенными монетами, на самом деле можно уплатить со сдачей монетами достоинством в $n_1, n_2, \ldots, n_N$ тугриков;

б) то же самое, но суммы уплачиваются без сдачи.

Зад3. Имеется несколько геометрических прогрессий. Докажите, что найдется натуральное число, которое не входит ни в одну из них.

Зад4. В письме Георгу Кантору барон Мюнхгаузен утверждал, что он умеет так выписывать в ряд натуральные числа без единицы, что только конечное число из них не больше своего номера в этой последовательности. Не приврал ли барон?

Зад5. Каждое конечное слово в языке племени Мумбо-Юмбо Совет Шаманов объявил либо приличным, либо неприличным. Докажите, что в любом бесконечном слове можно откинуть несколько начальных букв так, что оставшееся бесконечное слово можно будет нарезать либо только на приличные слова, либо только на неприличные.

Матбой между собой

1. Два бога по очереди выписывают цифры бесконечной десятичной дроби. Первый своим ходом приписывает в хвост любое конечное число цифр, второй — одну. Если в итоге получится периодическая дробь (возможно, с предпериодом), выигрывает первый, иначе — второй. Кто выиграет в этой битве богов?

2. Дана клетчатая доска размером 2003×3002. Двое по очереди закрашивают по одному квадрату произвольного размера. Закрашиваемые квадраты не должны пересекаться. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

3. Докажите, что для каждого простого числа p существует натуральное число k такое, что число $2pk+1$ — простое.

4. Докажите, что наибольшее число треугольников, на которые можно разбить правильный треугольник так, чтобы в каждой вершине разбиения (включая вершины исходного треугольника) сходилось одинаковое число ребер, равно 19.

5. Во время линейки кормилось кровью 2003 комара. Каждый комар испил крови ровно 45 школьников. При этом любые два комара вкусили крови ровно из одного общего школьника. Докажите, что есть страдалец, которым питались все комары.

6. На окружности расположена конечная система дуг, длина каждой из которых меньше, чем $\frac{1}{3}$ длины окружности. Верно ли, что если любые две дуги имеют общую точку, то и все дуги имеют общую точку?

7. Докажите, что существует многочлен от двух переменных с действительными коэффициентами, который принимает все положительные значения, но нигде не обращается в нуль.

8. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ или на ее продолжении взята точка M такая, что $\angle MAD = \angle AMO$ (O — точка пересечения диагоналей параллелограмма). Докажите, что $MD = MC$.

Разложение многочленов над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$

Обозначение. Пусть K — числовое поле. Обозначим $K[x]$ множество многочленов с коэффициентами из K, а $K(x)$ — множество рациональных дробей (в числителе и знаменателе — многочлены).

Опр1. *Наибольшим общим делителем (НОДом)* двух многочленов, один из которых ненулевой, называют многочлен наибольшей степени, делящий оба этих многочлена.

Упр1. Пусть многочлены $f, g \in K[x]$ и $h = \text{НОД}(f, g)$ со старшим коэффициентом 1. Если все коэффициенты у f и g на самом деле лежат в меньшем числовом подполе L, то у h — тоже.

Опр2. Многочлен степени > 0 называется *приводимым в* $K[x]$ (или *приводимым над* K), если он может быть разложен в произведение двух многочленов меньшей степени из $K[x]$, и *неприводимым* в противном случае.

Зад1. Приводим ли $x^4 + 1$ а) в $\mathbb{C}[x]$; а) в $\mathbb{R}[x]$; б) в $\mathbb{Q}[x]$?

Основная теорема арифметики. Всякий ненулевой многочлен над любым полем может быть разложен в произведение числа и неприводимых многочленов со старшим коэффициентом 1, причем такое разложение единственно с точностью до порядка сомножителей.

Упр2. Пусть $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ – многочлен. Тогда для некоторой $M > 0$ при всех $|x| > M$ выполнено $|x^n| > |a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0|$.

Предложение. У всякого многочлена нечетной степени из $\mathbb{R}[x]$ есть действительный корень.

Следствие. Всякий многочлен из $\mathbb{R}[x]$ нечетной степени > 2 приводим в $\mathbb{R}[x]$.

Опр3. Числовое поле K *алгебраически замкнуто* $\Leftrightarrow$ каждый непостоянный многочлен из $K[x]$ имеет корень в K.

Упр3. Являются ли алгебраически замкнутыми следующие числовые поля:

$$\text{а) } \mathbb{Q};\ \text{ б) } \mathbb{R};\ \text{ в) } \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots)?$$

Упр4. Числовое поле алгебраически замкнуто $\Leftrightarrow$ каждый многочлен степени > 0 раскладывается на линейные множители.

Основная теорема алгебры. Числовое поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел алгебраически замкнуто.

Следствие. Всякий многочлен n-той степени из $\mathbb{C}[x]$ можно представить (единственным образом) в виде $a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$, где $a, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$.

Упр5. Пусть z — комплексный корень алгебраического уравнения с действительными коэффициентами. Тогда $\overline{z}$ — тоже корень этого уравнения.

Предложение. В $\mathbb{R}[x]$ всякий многочлен степени выше 2 — приводим.

Теорема. В $\mathbb{R}[x]$ всякий многочлен может быть разложен (единственным образом) в произведение многочленов 1-й и 2-й степени.

Зад2. Разложите на неприводимые в $\mathbb{R}[x]$ множители многочлены а) $x^5 - 1$; б) $x^6 - 1$; в) $x^{2n-1} - 1$; г) $x^{2n} - 1$.

Зад3. Существуют ли такие натуральные числа m и n, что $(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n$?

Зад4. Докажите, что поле $\mathbb{C}$ нельзя *упорядочить*.

Теорема. Многочлен $f \in \mathbb{R}[x]$ принимает неотрицательные значения при всех $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что он представляется в виде суммы квадратов двух многочленов из $R[x]$.

Для самостоятельного решения

Упр0. Пусть α — комплексный корень многочлена, у которого нет вещественных корней. Докажите, что $\mathbb{R}(\alpha) = \mathbb{C}$.

Зад1. Многочлен $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, и $f(\sqrt{2}) = 0$. Докажите, что $f(x)$ делится на $x^2 - 2$.

Зад2. Найдите 123-ю цифру после запятой в десятичной записи числа $(6 + \sqrt{35})^{2003}$.

Зад3. Докажите, что в $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ число $5 + 4\sqrt{2}$ не является суммой трех квадратов.

Зад4*. Найдите все решения уравнения $x^2 - 2y^2 = 1$ в целых числах.

Поля

Опр1. *Полем K* называется множество, где определены операции сложения и умножения, причем выполняются следующие свойства:

а) Сложение ассоциативно, коммутативно, обладает нейтральным элементом (он обозначается 0) и обратными элементами.

б) Умножение ассоциативно, коммутативно, обладает нейтральным элементом (он обозначается 1) и для каждого ненулевого элемента существует обратный к нему по умножению.

в) Сложение и умножение связаны дистрибутивным законом: $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.

г) При этом 0 не совпадает с 1.

Опр2. Если K и L — поля, и $K \subset L$, то K называют *подполем* в L, а L — *расширением* K.

Упр1. Покажите, что всякое числовое поле — поле.

Упр2. а) Существует ли расширение поля $\mathbb{R}$? б) Существует ли расширение поля $\mathbb{C}$?

Вопрос. Существуют ли конечные поля?

Опр3. Если $a \cdot b = 0$, но $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то a и b называются *делителями нуля.*

Упр3. а) Докажите, что в поле нет делителей нуля.

б)При каких n множество $\mathbb{Z}_n$ является полем?

Зад1. Существует ли конечное поле из четырех элементов?

Опр4. Два поля K и L называются *изоморфными*, если существует такая биекция φ между их элементами, при которой сумма переходит в сумму, произведение — в произведение, нулевой элемент — в нулевой, единичный — в единичный.

Упр4. Докажите, что для изоморфизма φ разность переходит в разность, а частное — в частное.

Зад2. Пусть α — вещественный корень многочлена x^3-2, а β — невещественный. Докажите, что $\mathbb{Q}(\alpha)$ и $\mathbb{Q}(\beta)$ изоморфны.

Зад3. Изоморфны ли $\mathbb{Q}\sqrt{2}$ и $\mathbb{Q}\sqrt{3}$?

Опр5. Наименьшее натуральное число n такое, что $\underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ раз}} = 0$, называется *характеристикой* поля. Если такого числа n не существует, то говорят, что поле имеет *характеристику 0.*

Упр5. Докажите, что а) характеристика поля есть либо 0, либо простое число; б) в каждом поле содержится либо $\mathbb{Q}$, либо $\mathbb{Z}_p$, причем ровно одно из этих полей; в) приведите пример бесконечного поля с конечной характеристикой.

Упр6. а) Докажите, что в поле характеристики p выполняется равенство: $(x+y)^p = x^p + y^p$.

б) Разложите на множители над $\mathbb{Z}_p$ многочлен $x^p - x$.

в) Докажите с помощью этого *теорему Вильсона*: $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ при простом p.

Для самостоятельного решения

Зад1. Существует ли расширение $\mathbb{R}$, где уравнение $x^2+1=0$ не имеет корней?

Зад2. Существуют ли изоморфные, но не совпадающие подполя в $\mathbb{R}$?

Зад3. Квадрат разрезан на прямоугольные треугольники с катетами а) 3 и 4; б) 1 и 2. Докажите, что число треугольников — четно.

Геометрия $\mathbb{C}$

Упр0. Докажите тождество $|z+\omega|^2+|z-\omega|^2 = 2|z|^2+2|\omega|^2$ и укажите его геометрический смысл.

Зад1. Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин правильного n-угольника до произвольной прямой, проходящей через его центр, постоянна.

Зад2. Точка M лежит на окружности, описанной вокруг равностороннего треугольника ABC. Докажите, что величина $MA^4+MB^4+MC^4$ не зависит от выбора точки M.

Зад3 (Теорема Наполеона). На сторонах треугольника ABC внешним образом построены равносторонние треугольники. Докажите, что их центры лежат в вершинах равностороннего треугольника.

Зад4 (Неравенство Птолемея). Докажите, что для произвольных точек A, B, C, D

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$$

Опр. Пусть z_1, z_2, z_3 — три комплексных числа. Выражение

$$(z_1, z_2, z_3) := \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$

называется *простым отношением* этих чисел. Если же z_1, z_2, z_3, z_4 — четверка различных простых чисел, то выражение

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$$

называется *двойным отношением этих чисел.*

Упр1. Для того, чтобы точки z_1, z_2 и z_3 лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы $(z_1, z_2, z_3) = (\overline{z}_1, \overline{z}_2, \overline{z}_3)$ (иначе говоря, чтобы простое отношение (z_1, z_2, z_3) было вещественным).

Упр2. Для того, чтобы точки z_1, z_2, z_3 и z_4 лежали на одной прямой или окружности, необходимо и достаточно, чтобы двойное отношение (z_1, z_2, z_3, z_4) было вещественным.

Упр3. Если z — точка пересечения касательных в точках ω_1 и ω_2 к единичной окружности, то $z = \dfrac{2}{1/\omega_1 + 1/\omega_2} = \dfrac{2}{\overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2}$.

Упр4. а) Напишите уравнение прямой, проходящей через точки z_1 и z_2. б) Покажите, что уравнение любой прямой имеет вид $az + b\overline{z} + c = 0$.

Зад5. (Задача Ньютона) В описанном около окружности четырехугольнике середины диагоналей коллинеарны с центром окружности.

Зад6. (Теорема Паскаля) Точки пересечения прямых, содержащих противоположные стороны вписанного шестиугольника, лежат на одной прямой.

Зад7. Каждую сторону n-угольника в процессе обхода против часовой стрелки продолжили на ее длину. Оказалось, что концы построенных отрезков лежат в вершинах правильного n-угольника. Докажите, что исходный n-угольник тоже правильный.

Метод спуска

Упр0. Покажите, что $x^3 + py^3 + p^2z^3 = 0$ не имеет нетривиальных решений в целых числах при простом p.

Упр1. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2xyzt$ имеет в целых числах только нулевое решение.

Упр2. Найдите все целочисленные решения уравнения $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$.

Упр3. Опишите все целочисленные решения уравнения $x^2 + y^2 = z^2$ (*пифагоровы тройки*).

Теорема. Докажите, что уравнение $x^4 + y^4 = z^2$ не имеет нетривиальных целочисленных решений.

Теорема Лагранжа. Каждое целое положительное число является суммой четырех квадратов.

Доказательство. а) $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(m^2 + n^2 + k^2 + l^2) =$ сумма четырех квадратов;

б) При простом p сравнение $x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$ имеет решения;

в) Предположим, что для простого p существует такое целое $1 < m < p$, что mp — сумма четырех квадратов. Тогда существует такое $0 < n < m$, что np — сумма четырех квадратов.

Зад1. Имеется 101 гиря, каждая весит целое число граммов. Известно, что любые 100 из них можно разбить на 2 группы одинакового веса, по 50 гирь в каждой. Докажите, что все гири весят одинаково.

Упр4. А если в предыдущей задаче веса всех гирь рациональны?

Зад2. Можно ли разрезать куб на несколько различных кубиков?

Зад3. При $n \neq 4$ не существует правильного n-угольника с вершинами в узлах целочисленной сетки.

Для самостоятельного решения

Зад1. Найдите все решения уравнения $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$ в целых числах.

Зад2. На окружности расположено n различных натуральных чисел. Каждую секунду между соседними числами записывается их среднее арифметическое, после чего старые числа стираются. Докажите, что через несколько шагов получится набор, в котором не все числа будут целыми.

Линейные системы

Наша цель — решить следующие задачи.

Задача 1. По краям прямоугольной таблицы стоят числа. Докажите, что в пустые клетки таблицы можно записать числа так, что каждое записанное число будет средним арифметическим своих соседей по стороне. Более того, это можно сделать единственным образом.

Задача 2. В стаде 101 корова. Если выкинуть любую буренку, то оставшихся можно разделить на два равных по численности и суммарному весу стада. Докажите, что все кормилицы весят одинаково.

Опр1. Две СЛУ (от одинакового набора переменных) называются *эквивалентными*, если у них совпадают множества решений.

Опр2. Рассмотрим элементарные преобразования СЛУ трех типов:

ЭП1) к строке прибавляем другую строку, умноженную на число;

ЭП2) строку умножаем на ненулевое число;

ЭП3) меняем местами две строки.

Упр1. Если одна СЛУ получается из другой путем применения ЭП1-ЭП3, то эти СЛУ эквивалентны.

Теорема (метод Гаусса). При помощи ЭП1-ЭП3 каждую СЛУ можно привести к ступенчатому виду, т.е. к виду

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + \cdots\cdots\cdots\cdots + b_{1n}x_n & = & d_1 \\ \quad b_{2k}x_k + \cdots\cdots\cdots + b_{2n}x_n & = & d_2 \\ \qquad b_{3l}x_l + \cdots\cdots + b_{3n}x_n & = & d_3 \\ \qquad\quad \ddots \qquad\qquad\quad \vdots & \vdots & \vdots \\ \qquad\qquad b_{rs}x_s + \cdots + b_{rn}x_n & = & d_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 & = & d_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 & = & d_m \end{cases},$$

где $b_{11}b_{2k}b_{3l}\ldots b_{rs} \neq 0$, $1 < k < l < \cdots < s$.

Упр2. а) У СЛУ может быть 0, 1 или бесконечно много решений (над бесконечным полем!). А над конечным?

б) Как найти все решения произвольной СЛУ?

в) Сколько надо сделать действий, чтобы решить СЛУ размера 100×100?

Теорема 1. Если система из n уравнений с n неизвестными имеет единственное решение при каком-то наборе свободных членов, то она имеет единственное решение при любом наборе свободных членов.

Зад1. Решите задачу 1.

Теорема 2. Если СЛУ с целыми коэффициентами и свободными членами имеет единственное решение, то это — решение в рациональных числах.

Теорема 3. Если СЛУ с целыми коэффициентами и свободными членами имеет какое-то решение, то она имеет решение в рациональных числах.

Зад2. Решите задачу 2.

Для самостоятельного решения

Зад1. На отрезке $[0, 1]$ отмечены концы, а также конечное число точек внутри. Известно, что любая внутренняя отмеченная точка лежит ровно посередине между какими-нибудь отмеченными точками. Докажите, что все отмеченные точки рациональны.

Зад2. Система с целыми коэффициентами имеет решение в положительных действительных числах. Докажите, что она имеет решение в положительных рациональных числах.

Зад3. Решите задачу про 101 корову, предполагая веса комплексными числами.

Зад4*. Прямоугольник можно разрезать на квадраты. Докажите, что его можно разрезать на равные квадраты.

Геометрия масс (ликбез)

Опр. Пусть M – некоторая точка плоскости и m – ненулевое число. *Материальной точкой (м.т.)* mM называется точка M с числом m, и это число называется *массой* материальной точки M (считая, что она может быть и отрицательной), а сама точка M – *носителем* этой м.т. *Центром масс* материальных точек $m_1M_1, m_2M_2, \dots, m_nM_n$ называется такая точка Z, для которой имеет место равенство $m_1\overline{ZM_1} + m_2\overline{ZM_2} + \dots + m_n\overline{ZM_n} = \overline{0}$.

Теорема 1 (Основная теорема). а) Если точка Z служит центром масс системы м.т. $m_1M_1, m_2M_2, \dots, m_nM_n$, причем $m_1 + m_2 + \dots + m_n \neq 0$, то при любом выборе в пространстве точки O справедливо равенство

$$\overline{OZ} = \frac{m_1\overline{OM_1} + m_2\overline{OM_2} + \dots + m_n\overline{OM_n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

б) Обратно, если хотя бы при одном выборе в пространстве точки O выполняется это равенство, то точка Z – центр масс данной системы м.т.

Следствие. Для конечной системы м.т. с ненулевой суммой масс центр масс существует и определяется однозначно.

Далее везде, говоря о системе материальных точек, будем предполагать, что сумма масс ее точек отлична от нуля.

Теорема 2 (Правило рычага). Центр масс Z двух м.т. m_1A и m_2B с неотрицательными массами расположен на отрезке AB, причем $m_1\,|AZ| = m_2\,|BZ|$.

Теорема 3 (Правило группировки). Пусть в системе материальных точек m_1M_1, $m_2M_2, \dots, m_nM_n$ отмечены k м.т. $m_1M_1, m_2M_2, \dots, m_kM_k$ и пусть C – центр масс отмеченных м.т. Если всю массу отмеченных м.т. сосредоточить в их центре масс C, то от этого положение центра масс всей системы не изменится. Иначе говоря, система $m_1M_1, m_2M_2, \dots, m_nM_n$ имеет тот же центр масс, что и система м.т. $(m_1 + m_2 + \dots + m_k)Z, m_{k+1}M_{k+1}, \dots, m_nM_n$.

Зад1. В треугольнике ABC проведена медиана AM, точка P – ее середина. Прямая BP пересекает сторону AC в точке E. Найдите, в каком отношении точка E делит AC.

Зад2. Пусть $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, K, L, M, N – середины сторон AB, BC, CD, DA. Докажите, что точка пересечения отрезков KM и LN является серединой этих отрезков, а также и серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей AC и BD.

Зад3. Пусть $A_1, B_1, \ldots, F_1$ – середины последовательных сторон $AB, BC, \ldots, FA$ произвольного шестиугольника. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $A_1C_1E_1$ и $B_1D_1F_1$ совпадают.

Зад4. (Теорема Чевы) Дан треугольник ABC, точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямых BC, CA, AB соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = 1.$$

Зад5. (Теорема Менелая) Дан треугольник ABC, точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямых BC, CA, AB соответственно. Докажите, что точки AA_1, BB_1, CC_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = -1.$$

Зад6. Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке (ТОЧКА ЖЕРГОННА).

Зад7. Пусть вневписанные окружности треугольника ABC касаются сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке (ТОЧКА НАГЕЛЯ).

Зад8. Стороны треугольника ABC, противолежащие вершинам A, B и C имеют длины a, b и c. а) Докажите, что центр масс системы aA, bB, cC — центр вписанной окружности этого треугольника. б) В каком отношении биссектриса AA' делится точкой пересечения биссектрис?

Зад9. Три мухи равной массы ползают по сторонам треугольника так, что их центр масс остается на месте. Докажите, что он совпадает с точкой пересечения медиан треугольника, если известно, что одна муха проползла по всей границе треугольника.

Зад10. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 так, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке P. Прямые a, b и c соединяют середины отрезков BC и B_1C_1, CA и C_1A_1, AB и A_1B_1. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке, причем эта точка лежит на отрезке PM, где M — центр масс треугольника ABC.

Зад11. (Ван-Обель) Через точку M проведены три прямые AA_1, BB_1, CC_1 (точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах треугольника ABC или на их продолжениях). Докажите, что

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} + \frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MA_1}}.$$

Аффинная геометрия–2

Предложение. Аффинное преобразование f в фиксированной системе координат задается выражениями

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \beta_1, \\ x_2' &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \beta_2, \end{aligned}$$

где $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ и $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \neq 0$.

Опр1. Выражение $\det f = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$ называется *определителем* преобразования f.

Зад1. Докажите, что при аффинном преобразовании f а) площади всех многоугольников умножаются на одно и то же число, б) это число есть $|\det f|$.

Опр2. Аффинный образ окружности называется *эллипсом*. *Большим диаметром* эллипса называется хорда, проходящая через его фокусы. *Малым диаметром* эллипса называется хорда, проходящая через его центр и ортогональная большому диаметру.

Зад2. Докажите, что через любую точку эллипса проходит единственная касательная прямая.

Зад3. Найдите площадь эллипса с данными большим и малым диаметром.

Опр3. Для данного треугольника ABC существует единственное аффинное преобразование, которое переводит правильный треугольник в данный. Образ вписанной окружности правильного треугольника при таком преобразовании называют *вписанным эллипсом Штейнера*, а образ описанной окружности — *описанным эллипсом Штейнера*.

Зад4. Вписанный эллипс Штейнера имеет наибольшую площадь среди всех эллипсов, вписанных в данный треугольник, а описанный — наименьшую среди всех описанных.

Зад5. Докажите, что геометрическое место середин хорд эллипса, параллельных данной прямой, есть хорда, проходящая через центр эллипса.

Зад6. Докажите, что из всех треугольников $A'B'C'$, вписанных в треугольник ABC так, что точки пересечения медиан треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают, наименьшая площадь будет у того, вершины которого делят стороны треугольника ABC пополам.

Зад7. Докажите, что если аффинное преобразование переводит окружность в себя, то оно является или поворотом или симметрией.

Квадратичные вычеты и невычеты

Везде $p \neq 2$ — простое число.

Опр. Число a, не делящееся на p, называют *квадратичным вычетом* по модулю p, если $x^2 \equiv a \pmod p$ для некоторого целого числа x; в противном случае число a называют *квадратичным невычетом*.

Символ Лежандра $\left(\frac{a}{p}\right)$ определяется следующим образом:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если а делится на р,} \\ 1, & \text{если а — квадратичный вычет,} \\ -1, & \text{если а — квадратичный невычет.} \end{cases}$$

Всюду в дальнейшем считаем, что $a \not\equiv 0$ в поле $\mathbb{Z}_p$.

Упр0. Как формулируются определения вычетов, невычетов и символа Лежандра на языке поля $\mathbb{Z}_p$?

Упр1. а) Докажите, что уравнение $x^2 \equiv a \pmod p$ либо не имеет решений, либо имеет два различных решения;

б) Сколько решений имеет уравнение $x^2 \equiv 1 \pmod 8$?

Замечание. Вычетов и невычетов поровну: по $\frac{p-1}{2}$.

Упр2. $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)/2} \pmod p$.

Следствие (мультипликативность). $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$.

Упр3. а) Если $p = 4k+1$, то -1 — квадратичный вычет по модулю p, а если $p = 4k+3$, то -1 — невычет.

б) Решите уравнение $x^2 \equiv -1 \pmod p$ (вспомните о т. Вильсона).

Упр4. Пусть $p \equiv 3 \pmod 4$. Докажите, что если $a^2 + b^2$ делится на p, то a и b делятся на p.

Обобщением символа Лежандра является *символ Якоби*, который обозначается точно так же и определяется следующим образом. Пусть $m = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$, где $p_1, \ldots, p_k$ — нечетные простые числа (не обязательно различные). Тогда

$$\left(\frac{a}{m}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a}{p_k}\right).$$

Упр5. Покажите, что если $\left(\frac{a}{m}\right) = 1$, то **это не означает**, что a — квадрат по модулю m.

Лемма. Пусть p — нечетное простое число, a — взаимно простое с p, и $\pi : i \to ai \pmod{p}$ — перестановка на множестве $\mathbb{Z}_p$. Тогда $\operatorname{sgn} \pi = \left(\frac{a}{p}\right)$, где $\operatorname{sgn} \pi$ — знак перестановки π.

Упр6. Докажите, что многочлен $x^4 + 1$ неприводим над $\mathbb{Z}$, но приводим над каждым $\mathbb{Z}_p$ (при $p = 2$ тоже).

Упр7. Докажите, что простых чисел вида а) $4k - 1$ б) $4k + 1$ бесконечно много.

Зад1. Найдите все натуральные n, для которых существует m такое, что $m^2 + 9$ делится на $2^n - 1$.

Для самостоятельного решения

Зад1. Является ли 2 вычетом по модулю простого числа 2003?

Зад2. Докажите, что многочлен $x^4 + ax^2 + b$ приводим над каждым $\mathbb{Z}_p$ (при $p = 2$ тоже) при всех целых a, b. Докажите, что бесконечно много таких многочленов неприводимы над $\mathbb{Z}$.

Зад3. $x_1 = 1, y_1 = 100,\ x_{n+1} = x_n^{237} + y_n,\ y_{n+1} = y_n^{237} + x_n$. Докажите, что $x_n y_n$ не делится на 239.

Гипотеза *abc* и проблема Ферма

Теорема Ферма для многочленов. Пусть $f, g, h \in \mathbb{C}[x]$ — попарно взаимно простые многочлены, не равные константе. Тогда при $n > 2$ равенство

$$f^n(x) + g^n(x) = h^n(x)$$

выполняться не может.

Теорема Мейсона. Пусть $f, g, h \in \mathbb{C}[x]$ — попарно взаимно простые многочлены, не равные константе, для которых $f + g = h$. Тогда $\max\{\deg f, \deg g, \deg h\} \le n_0(fgh) - 1$, где $n_0(r(x))$ – количество различных корней многочлена $r(x)$.

Упр1. Выведите из т. Мейсона решение проблемы Ферма для многочленов.

Производная и кратные корни

Опр. Для одночлена $f(x) = x^n$ определим его *формальную производную* $f'(x) = nx^{n-1}$. Распространим по линейности это определение на все многочлены. Многочлены рассматриваем над любым полем.

Упр2. Докажите следующие свойства (формальной) производной:
а) $(f + g)' = f' + g'$;
б) $(cf)' = cf'$, c — константа;
в) $(fg)' = f'g + g'f$;
г) $(f^n(x))' = nf^{n-1}(x) \cdot f'(x)$;
д) верно ли, что $\deg f' = \deg f - 1$?

Упр3. Если многочлен $f(x)$ имеет число α корнем кратности k, то α будет корнем $f'(x)$ кратности $k - 1$.

Важное замечание. Для полей, содержащих $\mathbb{Q}$ в качестве подполя, кратность будет ровно $k - 1$. Для полей типа $\mathbb{Z}_p$ производная может оказаться нулевой! Поэтому над полями типа $\mathbb{Z}_p$

это свойство производной надо употреблять с большой осторожностью (об этом даже есть целая наука — сепарабельные расширения!)

Упр4. Докажите, что многочлен $x^n - 1 \in \mathbb{C}[x]$ не имеет кратных корней.

Зад1. При каких a многочлен $(x^{100} - ax^{15} + ax^6 - 1)$ делится на $(x-1)^2$?

Зад2. Если многочлен с действительными или рациональными коэффициентами имеет кратные корни, то он приводим над соотв. полем. При этом разложение можно получить явным образом.

Зад3. При каких действительных a многочлен $x^3 + x^2 + ax + 3$ имеет кратный корень?

Зад4. Докажите теорему Мейсона:

а) **Лемма.** Пусть f — ненулевой многочлен. Тогда $\deg f = \deg \text{НОД}(f, f') + n_0(f)$.

б) Докажите, что $f'g + gf'$ делится на $(f, f')(g, g')(h, h')$ и выведите отсюда доказательство теоремы.

Как нам сформулировать аналог теоремы Мейсона для целых чисел?

Опр2. Пусть $m = p_1^{a_1}...p_r^{a_r}$. Положим $n_0(m) = p_1...p_r$.

Гипотеза abc**.** При данном $\varepsilon > 0$ существует такая константа $K(\varepsilon)$, что для любых ненулевых взаимно простых чисел a, b, c с соотношением $a + b = c$ выполнено неравенство

$$\max\{|a|, |b|, |c|\} \leq K(\varepsilon)(N_0(abc))^{1+\varepsilon}.$$

Гипотеза не доказана ни для одного $\epsilon > 0$!

Упр5. Выведите из положительного решения гипотезы abc для некоторого $\varepsilon > 0$ решение проблемы Ферма!!! (для достаточно больших n)

Упр6. Для $\varepsilon = 0$ гипотеза abc неверна. Докажите это, рассмотрев $a_n = 3^{2^n}$, $b_n = -1$, $c_n = 3^{2^n} - 1$.

Для самостоятельного решения

Зад1. При каких p и q многочлен $x^3 + px + q$ имеет кратный корень?

Разрезания и СЛУ

Задача-гроб. Прямоугольник можно разрезать на квадраты. Докажите, что его можно разрезать на равные квадраты.

Зад1. Свяжите с каждым разрезанием прямоугольника $a \times b$ на квадраты некоторую СЛУ со свободными членами a и b, которая в случае существования этого разрезания должна иметь решение в положительных числах.

Зад2. Рассмотрите случай, когда полученная СЛУ имеет единственное решение, причем в положительных числах. Докажите, что в этом случае ее решение рационально.

Зад3. Рассмотрите случай, когда СЛУ имеет более одного решения. Докажите, что этот случай невозможен. Для этого сравните площадь многоугольника $a \times b$ с суммарной площадью квадратов при малом шевелении их сторон.

Для самостоятельного решения

Зад1. Параллелограмм разрезан на правильные треугольники. Докажите, что его можно разрезать и на равные правильные треугольники.

Векторные пространства

Вопрос. Существует ли поле из 1000 элементов?

Упр1. а) Дано 20 неизвестных, известна сумма любых 19 из них. Докажите, что числа можно однозначно определить.

б) Дано 20 целых чисел, известно, что сумма любых 19 из них делится на 5. Докажите, что все числа делятся на 5.

в) Дано 20 целых чисел, известно, что сумма любых 19 из них делится на p. При каких простых p из этого следует, что каждое число кратно p?

Опр1. Система линейных уравнений с нулевыми правыми частями называется *однородной (ОСЛУ).*

Теорема 1. ОСЛУ, в которой неизвестных больше, чем уравнений, имеет нетривиальное решение.

Зад1. Известно, что системе линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 = 0 \end{cases}$$

удовлетворяют тройки $(1, 2, 3)$ и $(0, 0, 4)$. Докажите, что тройки

$$\text{а) } (1, 2, 7);\ \text{б) } (1, 2, -1);\ \text{в) } (5, 10, 15);\ \text{г) } (2, 4, 24)$$

тоже удовлетворяют системе. д) Найдите все множество решений этой системы.

Теорема 2. При покомпонентном сложении и умножении на числа решений ОСЛУ снова получаются решения этой системы.

Теорема 3. С каждой СЛУ свяжем ОСЛУ. Докажите, что решения СЛУ устроены так: каждое решение СЛУ есть сумма решения ОСЛУ и любого фиксированного решения СЛУ.

Опр2. Пусть даны множества V ("векторы") и поле K ("числа"), и векторы можно складывать и умножать на числа, причем сложение в V коммутативно, ассоциативно, обладает нейтральным элементом ("нулем") и обратными. Пусть также выполнены четыре правила: 1) $(k_1 + k_2)v = k_1v + k_2v$; 2) $k(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2$ (дистрибутивность), 3) $1 \cdot v = v$; 4) $(k_1k_2)v = k_1(k_2v)$ (здесь $k, k_1, k_2 \in K$; $v, v_1, v_2 \in V$). Тогда V называется *векторным пространством* над K.

Упр2. Задайте структуру векторного пространства на следующих множествах: а) линейные уравнения вида $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b_n$; б) K^n: строки из n чисел; в) всякие многочлены; г) $K_n[x]$ — многочлены степени не выше n; д) векторы; е) последовательности.

Упр3. Пусть $K \subset L$ — поля. Доказать, что а) L — векторное пространство над K, б) если V — векторное пространство над L, то V — векторное пространство над K.

Упр4. Множество строк — решений однородной системы — образует векторное пространство.

Упр5. Дайте определение изоморфизма пространств и изоморфных пространств.

Упр6. а) Множество векторов в пространстве изоморфно $\mathbb{R}^3$. б) $K_n[x]$ изоморфно K^{n+1}.

Опр3. а) Если в линейном пространстве каждый вектор выражается в виде линейной комбинации через фиксированную систему векторов $\{v_i\}$, $i \in I$, то эта система называется *базой.*

б) Если вдобавок каждый вектор выражается единственным образом, то такая система называется *базисом.*

Теорема 4. В пространстве с конечной или счетной базой существует базис, состоящий из части векторов из базы.

Замечание. Это верно и для любых пространств. Но для доказательства нужны более тонкие рассуждения с мощностями.

Зад2. Если в поле n элементов, то n — степень простого числа.

Для самостоятельного решения

Зад1. Есть ли в поле из 128 элементов подполе из 16 элементов?

Зад2. Сколько существует базисов в пространстве строк длины а) 2; б) 3; в) n над полем из p элементов?

Инвариант Дена

Упр0. Вспомните, почему два равновеликих многоугольника равносоставлены.

Зад1. Можно ли круг разрезать на конечное число частей по отрезкам и дугам окружностей и составить из них квадрат?

Опр1. Два многогранника называются *равносоставленными*, если один из них можно разрезать на конечное число многогранных частей, из которых можно составить другой.

Зад2. а) Докажите, что параллелепипед со ребрами a_1, b_1, c_1 равносоставлен с параллелепипедом со ребрами $a_1, b_2, \dots$ (допиши сам).

б) Докажите, что любые два прямоугольных параллелепипеда равного объема равносоставлены.

3-я ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА: верно ли, что любые два многогранника равного объема равносоставлены?

Опр2. Пусть у многогранника n ребер, $l_1, \dots, l_n$ — длины этих ребер, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — величины соответствующих двугранных углов. *Инвариантом Дена* многогранника называется набор пар $(l_1, \varphi_1), \dots, (l_n, \varphi_n)$ (углы по модулю $2\pi k$), рассматриваемый с точностью до подобия (опр. ниже).

Замечание. Будем рассматривать также наборы, полученные не из многогранников (скажем, пустой набор).

Опр3. С набором можно проводить в ту или обратную сторону следующие преобразования:

1. пару (l, φ) заменять двумя парами (l', φ), (l'', φ), где $l' + l'' = l$;

2. пару (l, φ) заменять двумя парами (l, φ'), (l, φ''), где $\varphi' + \varphi'' = \varphi$ (последнее равенство по модулю $2\pi k$);

3. выкидывать пара вида $(0, \varphi)$ или $(l, 2\pi k)$, где k — целое.

Наборы *подобны*, если они получаются друг из друга одним или несколькими из таких преобразований.

Упр4. Найдите наборы, подобные наборам куба и правильного тетраэдра.

Теорема Дена. Если два многогранника равносоставлены, то их инварианты Дена подобны.

Теорема А. Инварианты Дена куба и правильного тетраэдра не подобны.

Следствие. Куб и правильный тетраэдр не равносоставлены.

Обратная теорема Дена. Если у двух многогранников одинаковы объемы и подобны инварианты Дена, то они равносоставлены.

Доказательства теорем

Лемма 1. Если число φ соизмеримо с π, то при любом l пару (l, φ) можно выкинуть из набора, получив подобный набор.

Упр5. Докажите теорему Дена.

Лемма 2. Угол $\arccos(\frac{1}{3})$ не соизмерим с π, ибо если φ соизмерим с π и $\cos\varphi$ — рационален, то $\cos\varphi = 0$, ± 1 или $\pm\frac{1}{2}$.

Для доказательства теоремы А осталось доказать следующую лемму.

Лемма 3. Если $l \neq 0$ и φ несоизмерим с π, то набор из одной пары (l, φ) не подобен пустому набору.

Здесь длинный разговор об аддитивных функциях, базисе $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$ и о том, как можно без этого базиса обойтись.

Для самостоятельного решения

Зад1. Докажите, что у любой а) прямой б) косой призмы набор Дена подобен пустому набору.

Зад2. Докажите, что любая призма равносоставлена с прямой призмой, а прямая призма равносоставлена с кубом.

Зад3. Найдите все углы, соизмеримые с π, у которых тангенс рационален.

Квадратичный закон взаимности для препов

Теорема(квадратичный закон взаимности Гаусса). Пусть p и q — различные нечетные простые числа. Тогда

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

Следствие(закон взаимности для символа Якоби). Пусть m и n — нечетные взаимно простые числа. Тогда

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}.$$

Отметим свойство: $\left(\frac{-1}{b}\right) = (-1)^{\frac{b-1}{2}}$.

Следствие. Пусть m — нечетное число. Тогда $\left(\frac{2}{m}\right) = (-1)^{(m^2-1)/8}$.

Упр0. Докажите следствие индукцией по нечетным m.

ВАЖНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ. Теперь мы имеем в своем распоряжении все необходимое для решения квадратных уравнений над $\mathbb{Z}_p$.

Упр1. Вычислите: а) $\left(\frac{5}{73}\right)$; б) $\left(\frac{219}{383}\right)$.

Упр2. При каких p число 3 является квадратом по модулю p?

Вычет — $\pm 1 \pmod{12}$, $\pm 5 \pmod{12}$.

Упр3. Имеют ли решения сравнения: а) $x^2 \equiv 4x + 147 \pmod{587}$; б) $5x^2 \equiv 6x + 19 \pmod{97}$?

Зад1. При каких простых p сравнение имеет решения: $x(x-1) \equiv 3 \pmod{p}$?

Зад2. Уравнение $y^2 = x^3 + 7$ не имеет целочисленных решений.

$y^2 + 1 = (x+2)((x-1)^2 + 3)$, откуда -1 вычет по модулю $p = 4k + 3$

Зад3*. Если сравнение $x^2 \equiv n \pmod{p}$ имеет решения по модулю всех p, то n — полный квадрат.

стр 77 в А-Р

Зад4. Докажите, что простых чисел вида $6m + 1$ — бесконечно много.

Рассмотреть $(2p_1 ... p_m)^2 + 3$, использовать то, что -3 — вычет по $\pmod{6} m + 1$ и невычет по $\pmod{6} m + 5$.

Для самостоятельного решения

Зад1. При каких простых p сравнение имеет решения: $x^2 \equiv 6 \pmod{p}$?

$1, 5, 19, 23 \pmod{24}$

Зад2. При каких p сравнение $x^2 + 3x = 1 \pmod{p}$ имеет решения?

Зад3. Докажите, что простых чисел вида $8m + 7$ — бесконечно много.

Рассмотреть $(4p_1...p_m)^2 - 2$

Размерность

Упр0. Что такое база, базис, изоморфизм?

Упр1. а) База является базисом, если через ее вектора однозначно выражается только нулевой вектор.

б) Найдите по паре базисов в рассмотренных ранее пространствах.

Лемма 1. Если в V есть базис из n элементов, то V изоморфно K^n.

Упр2. Зафиксируем различные $x_0, x_1, \ldots, x_n$, и сопоставим каждому многочлену P строку $P(x_0)$, $P(x_1)$, $\ldots$, $P(x_n)$). Является ли такое отображение изоморфизмом векторных пространств $\mathbb{R}_n[x]$ и $\mathbb{R}^{n+1}$?

Опр1. Набор векторов называются *линейно зависимым*, если какой-то из векторов является линейной комбинацией других. Иначе набор называется *линейно независимым.*

Упр3. а) Докажите, что линейно зависимы системы векторов, содержащие: нулевой вектор; равные векторы; линейно зависимые подсистемы.

б) Вектора в базисе линейно независимы.

Лемма 2. В K^n любые $n+1$ строк линейно зависимы.

Теорема. (О корректности определения размерности) Если в пространстве есть конечный базис, то все базисы конечны, и имеют поровну элементов. Это число называется *размерностью* пространства (обозначается $\dim_K V$).

Теорема. Два (конечномерных) пространства одинаковой размерности изоморфны, а разной размерности — не изоморфны.

Зад3. СЛУ двумя способами приведена к ступенчатому виду. Докажите, что получилось поровну ненулевых строк (это число называется *рангом* СЛУ).

Зад4. Рассматриваются шестерки чисел в вершинах шестиугольника такие, что сумма любых трех подряд равна 0. Докажите, что множество таких расстановок образует векторное пространство, и найдите его размерность.

Теорема о размерности башни. Пусть $K \subset L \subset M$ — поля. Докажите, что

$$\dim_K M = \dim_K L \cdot \dim_L M.$$

Упр4. Пусть K — наименьшее числовое поле, содержащее а) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{17}$; б) $\sqrt[5]{2}$; в) $\sqrt[3]{7}$ и $\sqrt{10}$. Найти $\dim_{\mathbb{Q}} K$.

Упр5. Найдите все подполя в $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Для самостоятельного решения

Зад1. Есть n различных чисел $a, b, \ldots, c$. Докажите, что строки

$$(1, 1, \ldots, 1), (a, b, \ldots, c), (a^2, b^2, \ldots, c^2), \ldots, (a^{n-1}, b^{n-1}, \ldots, c^{n-1})$$

линейно независимы.

Зад2. Докажите, что линейная система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = c_1 \\ x_1 + 2^2x_2 + \cdots + n^2x_n = c_2 \\ \vdots \\ x_1 + 2^nx_2 + \cdots + n^nx_n = c_n \end{cases}$$

при любом наборе свободных членов имеет единственное решение.

Зад3*. В квадратной таблице строки линейно зависимы. Докажите, что столбцы — тоже.

Матбой профи-8 — профи-9

1. Докажите, что в полном связном ориентированном графе существует простой цикл, проходящий по всем вершинам.

2. Обозначим через P_k сумму первых k простых чисел. (Например, $P_3 = 2+3+5 = 10$). Докажите, что между числами P_{1998} и P_{1999} содержится точный квадрат.

3. Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, а I_1, I_2, I_3 — центры окружностей, вписанных в треугольники IBC, AIC, ABI соответственно. Докажите, что прямые AI_1, BI_2, CI_3 пересекаются в одной точке.

4. Дан многочлен $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$ с целыми коэффициентами. Докажите, что существует многочлен $Q(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $P(x)Q(x)$ имеет ровно два нечетных коэффициента.

5. Есть n гирь. Известно, что каждая весит целое число граммов и их общий вес меньше $2n$ граммов. Докажите, что с помощью чашечных весов можно определить вес каждой гири.

6. Параболы $y = x^2 + bx + c$ и $x = y^2 + by + c$ имеют ровно одну общую точку. Докажите, что если b — целое нечетное число, то c — точный квадрат.

7. Докажите, что для любых положительных чисел a и b выполняется неравенство

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq 9(a+b) - 16\sqrt{ab}$$

8. На плоскости дан центрально-симметричный выпуклый многоугольник F. Докажите, что к нему можно приложить шесть многоугольников $F_1, \ldots, F_6$, получаемых из F параллельными переносами так, что: 1) каждая из пар F и F_1, F и F_2, $\ldots$, F и F_6 имеет общую точку и не перекрывается; 2) фигуры $F_1, \ldots, F_6$ попарно не перекрываются.

9. Натуральное число называется *хорошим*, если в его разложении на простые множители нет никаких чисел, кроме 2, 3 и 5. Существует ли такое натуральное число n, что среди всех хороших чисел, не превосходящих n, содержится менее 10% точных квадратов? (Единица считается хорошим числом)

10. Дана последовательность из k чисел. Разрешается любое число заменить на сумму чисел, стоящих справа от него. Докажите, что если эту операцию проделать достаточно много раз, то какая-нибудь последовательность повторится два раза подряд.

Матбой профи-9 — профи-10

1. Выписываются подряд все натуральные числа $123\ldots n$. Существует ли такое n, что получившееся число делится на 1999?

2. Диагональ AC вписанного четырехугольника $ABCD$ делится точками P и Q на 3 равные части так, что P лежит между A и Q. Прямые BP и DQ пересекаются в точке R, причем $RA = RC$. Докажите, что если точки L и M делят диагональ BD на три равные части так, что L лежит между B и M, то точка пересечения прямых AL и CM равноудалена от B и D.

3. На плоскости находится правильный 2003-угольник. Разрешается провести прямую и задать вопрос, по какую сторону от нее лежит задуманная точка. За какое минимальное число вопросов можно определить, находится ли задуманная точка вне 2003-угольника?

4. Назовем минором четверку клеток на клетчатой бумаге, центры которых лежат в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными линиям сетки. Какое наибольшее число миноров, не имеющих общих клеток, можно разместить в квадрате 25×25?

5. Все значения многочлена $P(x)$ при неотрицательных x положительны. Докажите, что существует такой ненулевой многочлен $R(x)$, что все коэффициенты $P(x)R(x)$ положительны.

6. На плоскости отметили точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ и провели отрезки $b_1, b_2, \dots, b_n$, каждый из которых соединяет какие-то две из отмеченных точек. Назовем отрезки b_i и b_j смежными, если они имеют общий конец. Оказалось, что точки A_i, A_j соединены отрезком тогда и только тогда, когда отрезки b_i и b_j смежные. Докажите, что из каждой точки выходит ровно два отрезка.

7. Последовательность (a_i) удовлетворяет следующим условиям:

$$a_1 = 0, \quad |a_2| = |a_1 + 1|, \quad |a_3| = |a_2 + 1|, \quad \dots, \quad |a_n| = |a_{n-1} + 1|.$$

Докажите, что $\dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq -\dfrac{1}{2}$.

8. На продолжении стороны BC треугольника ABC за точку C взята точка K такая, что $KC = AC$. Точка M — середина стороны AB. Прямая KM пересекает биссектрису угла C в точке E. Докажите, что $\angle CAE = \angle ABC$.

Геометрические построения

Опр. Скажем, что число α можно *построить с помощью циркуля и линейки (построить ЦЛ),* если на координатной плоскости (с отмеченными единичными отрезками), где можно отметить любую точку с рациональными координатами, можно построить точку с абсциссой или ординатой α.

Упр1. Докажите, что если числа a и b можно построить ЦЛ, то числа а) $a + b$, б) $a - b$, в) ab, г) $\frac{a}{b} (b \neq 0)$ можно построить ЦЛ.

Замечание. Это означает, что множество чисел, которые можно построить ЦЛ, образует числовое поле.

Упр2. Докажите, что если числа a и b можно построить ЦЛ, то числа а) $\sqrt{a^2 + b^2}$, б) $\sqrt{a^2 - b^2}$, в) $\sqrt{ab}$ можно построить ЦЛ.

Упр3. Докажите, что можно построить ЦЛ корни любого квадратного уравнения с рациональными коэффициентами.

Упр4. Докажите, что если числа a, b, d можно построить ЦЛ, то число $a + b\sqrt{d}$ можно построить ЦЛ.

Опр. Назовем расширение F числового поля K *квадратичным*, если $F = K(\alpha)$, где α – действительный корень неприводимого квадратного трехчлена из $K[x]$.

Зад. Пусть координаты точек A, B, C, D лежат в поле K. Докажите, что а) координаты точки пересечения прямых AB и CD лежат в K; б) координаты точек пересечения окружности с центром в A и радиусом AB с прямой CD лежат в квадратичном расширении поля K; в) то же, что в пункте б), для точек пересечения окружностей.

Теорема 1. Число α можно построить ЦЛ тогда и только тогда, когда найдется конечная цепочка (*башня*) квадратичных расширений $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n$, такая, что $\alpha \in F_n$.

Теорема 2. Корень неприводимого кубического многочлена из $\mathbb{Q}[x]$ нельзя построить ЦЛ.

Доказательство опирается на лемму:

Лемма. Пусть имеется башня расширений, как в Теореме 1. Тогда если у квадратного и кубического многочленов из $F_{n-1}[x]$ есть общий корень в поле F_n, то у этого кубического многочлена есть корень в F_{n-1}.

Следствие. Нельзя построить ЦЛ числа а) $\sqrt[3]{2}$; б) $\sin 10^\circ$; в) $\sqrt{\pi}$.

Теорема. С помощью циркуля и линейки нельзя

а) удвоить куб;

б) разделить угол 30° на три равные части;

в) квадрировать круг.

Замечание (Теорема Мора-Маскерони). Все, что можно построить ЦЛ, можно построить при помощи одного циркуля.

Упр. Докажите, что при помощи одной линейки нельзя построить а) отрезок длины $\sqrt{2}$; б) прямой угол.

Предложение. Построение одной линейкой "сохраняется" при аффинных преобразованиях.

Следствие. При помощи одной линейки нельзя построить а) правильный треугольник; б) биссектрису данного угла.

Зад. Докажите, что при помощи одной линейки нельзя построить а) середину данного отрезка; б) центр данной окружности; в) отрезок, вдвое больше данного.

Для самостоятельного решения

Зад. Найдите все такие целые n, что угол в n° можно построить ЦЛ.

Зад. На плоскости дана пара параллельных прямых и отрезок на одной из них. При помощи одной линейки а) поделите его пополам; б) удвойте его.

Зад. Пусть к циркулю и линейке добавлена "разрезалка пополам": прибор, позволяющий провести через данную точку прямую, делящую площадь данной выпуклой фигуры пополам. Докажите, что тогда все три классические задачи можно решить.

Первообразные корни

Опр1. Количество чисел, меньших m и взаимно простых с m, обозначается $\varphi(m)$ (*функция Эйлера*).

Упр1. Рассматривая дроби $1/n, 2/n, ..., n/n$ покажите, что $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

Теорема Эйлера. При $(a, m) = 1$ $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Китайская теорема об остатках. Для взаимно простых m и n отображение $a \pmod{mn} \to (a \pmod{n}, b \pmod{n})$ является биекцией.

Упр2. Для взаимно простых m и n покажите, что

а) a взаимно просто с mn тогда и только тогда, когда a взаимно просто с m и n.

б) $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

Упр3. Получите формулу для функции Эйлера.

Опр2. При $(a, m) = 1$ существует s с условием $a^s \equiv 1 \pmod{m}$. Наименьшее из таких s называется *порядком* (или *показателем*) a по модулю m.

Упр4. Если a имеет порядок s по модулю m, то:

1) числа $1 = a^0, a^1, ..., a^{s-1}$ не сравнимы по модулю m;
2) $a^{s_1} \equiv a^{s_2} \pmod{m} \Leftrightarrow s_1 \equiv s_2 \pmod{s}$;
3) s – делитель $\varphi(m)$;
4) если a имеет порядок st, то a^t имеет порядок s;
5) если a имеет порядок s, b имеет порядок t и $(s, t) = 1$, то ab имеет порядок st.

Зад1. а) $a > 1$. Тогда простые нечетные делители числа $a^p - 1$ или делят $a - 1$, или имеют вид $2px + 1$.

б) $a > 1$. Тогда простые нечетные делители числа $a^p + 1$ или делят $a + 1$, или имеют вид $2px + 1$.

Зад2. Докажите бесконечность множества простых чисел вида $2px + 1$.

Зад3. а) $a > 1$. Тогда $\varphi(a^n - 1)$ кратно n.

б) Докажите, что число всех правильных несократимых дробей со знаменателем $a^n - 1$ кратно n.

Опр3. Число g называется *первообразным корнем* (или *примитивным элементом*) по модулю m, если g имеет порядок $\varphi(m)$ по модулю m.

Упр5. Дайте пару равносильных определений первообразного корня.

Теорема. Существуют первообразные корни по модулю простого p. Более того, их ровно $\varphi(p-1)$ штук.

Важный факт. Примитивные корни существуют только для m вида $2, 4, p^n, 2p^n$, где p – простое нечетное.

Зад4. Докажите, что числа $1, 2, ..., 2002$ можно расставить по кругу так, что для любых трех последовательных a, b, c разность $b^2 - ac$ будет делиться на 2003.

Зад5. Найдите все первообразные корни в $\mathbb{Z}_{29}$.

Зад6. Как в $\mathbb{Z}_p$ решать уравнение $x^d \equiv 1 \pmod{p}$?

Зад7. а) Докажите, что наименьшее k, для которого $2^k - 1 \,\vdots\, 3^n$, равно $\varphi(3^n)$.

б) Существуют первообразные корно по модулю 3^n.

Зад8. Дано простое число $p > 2$ и автомат, который берет карточку (a, b) с условием $a + b = p, a > 0, b > 0$ и заменяет ее на карточку $(a - b, 2b)$ при $a > b$ и на $(b - a, 2a)$ при $b > a$. Докажите, что число карточек, получаемых из начальной, не зависит от a и b и является делителем $p - 1$. Чему равно это число?

Для самостоятельного решения

Зад1. Простые делители числа $2^{2^n} + 1$ имеют вид $2^{n+1}x + 1$.

Зад2. Решите уравнение $1 + x + ... + x^6 \equiv 0 \pmod{29}$.

Зад3. Найдите все пары простых p и q, для которых $2^p - 1 \,\vdots\, q$ и $2^q - 1 \,\vdots\, p$.

Зад4. Докажите, что 3 является первообразным корнем по модулю 5^n.

Удобный базис

Наша цель — решить следующую задачу:

Задача. По кругу стоят 128 целых чисел. Раз в минуту между каждыми двумя записанными числами записывается их сумма, а первоначальные числа стираются. Докажите, что со временем все числа станут делиться на 128.

Упр1. Докажите, что для любых различных $x_1, \ldots, x_{n+1}$ и любых $y_1, \ldots, y_{n+1}$ найдется многочлен f степени $\leq n$, для которого $f(x_i) = y_i$.

Зад1. Докажите, что в наборе $(1, 2, \ldots, 100), (1^2, 2^2, \ldots, 100^2), \ldots, (1^{100}, 2^{100}, \ldots, 100^{100})$ ни один вектор не является линейной комбинацией других.

Зад2. Докажите, что существует алгоритм разложения многочлена с целыми коэффициентами на неприводимые множители того же вида. В частности, существует алгоритм проверки неприводимости. (*Алгоритм Кронекера*).

> Говорим об интерполяционных многочленах Ньютона и Лагранжа, оцениваем сложность в алгоритме Кронеккера

Опр1. *Икс в убывающей степени* m: $x^{\underline{m}} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-m+1)$.

Упр2. Докажите, что а) $(x+1)^{\underline{m}} - x^{\underline{m}} = mx^{\underline{m-1}}$; б) $1^{\underline{m}} + 2^{\underline{m}} + 3^{\underline{m}} + \cdots + (n-1)^{\underline{m}} = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1}$.

Упр3. а) Представьте x^4 как линейную комбинацию многочленов $x^{\underline{0}}, x^{\underline{1}}, x^{\underline{2}}, x^{\underline{3}}, x^{\underline{4}}$. б) Найдите формулу суммы $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4$.

Зад3. а) Докажите, что множество последовательностей, где выполнено рекуррентное соотношение $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$, образуют двумерное векторное пространство. б) Найдите все геометрические прогрессии, для которых выполнено это рекуррентное соотношение. в) Найдите явную формулу для последовательности, заданной этим рекуррентным соотношением и условиями $x_1 = 1, x_2 = 2$.

Зад4. Последовательность задана так: $x_1 = x_2 = 1000000$, $18x_{n+2} = 12x_{n+1} - x_n$. Докажите, что найдется n такое, что $x_n < \frac{1}{1000000}$.

Зад5. Найдите явные формулы для рекуррентно заданных последовательностей а) $x_{n+2} = 2x_{n+1} - 5x_n$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; б) $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Зад6. а) На числовой прямой в начале координат стоит 1, а в остальных целых числах — 0. Раз в минуту между каждыми двумя записанными числами записывается их сумма, а первоначальные числа стираются. Как будут распределены числа на прямой через 2 часа 8 минут? б) Тот же вопрос, когда по кругу стоит 1 единица и 127 нулей. в) Докажите, что если утверждение задачи верно для одного набора, и для другого набора чисел, то оно верно и для суммы наборов. г) Решите эту задачу.

Для самостоятельного решения

Зад1. Найдите сумму $1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5$.

Зад2 (Формула Бине). а) Найдите явную формулу для чисел Фибоначчи. б) Докажите, что тысячное число Фибоначчи больше, чем 6^{250}, но меньше, чем 7^{250}.

Зад3. По окружности расставлены p целых чисел (p — простое). Докажите, что через несколько ходов все числа будут делиться на p если а) за ход из каждого числа вычитается его левый сосед; б) перед ходом выбирается некое число k и из каждого числа вычитается его k-ый сосед слева.

Мощности множеств–2

Опр1. Отображение множества A в множество B называется *вложением* (а по науке *инъективным*), если разные элементы переходят в разные.

Теорема Кантора-Бернштейна. Если множество A вкладывается в B, а B вкладывается в A, то множества A и B — равномощны.

Упр1. Докажите, что все следующие множества равномощны ($\Longrightarrow$ континуальны): а) отрезок; б) квадрат; в) плоскость; г) куб; д) множество всех отрезков на плоскости.

Упр2. Докажите, что множество всех подмножеств натуральных чисел континуально.

Зад1. В некотором царстве любое множество подданных образует тайное общество, и каждый подданный доносит ровно на одно тайное общество. Докажите, что есть множество, на которое никто не доносит.

Теорема Кантора. Множество 2^X не только не равномощно X, но даже не отображается на X (то есть при любом отображении X в 2^X в некоторый элемент из 2^X (т. е. подмножество в X) ни один элемент не будет отображаться).

Следствие. Существуют сколь угодно большие мощности.

Опр2. *Алгебраическое число* — это действительное или комплексное число, являющееся корнем многочлена с целыми коэффициентами; остальные числа называются *трансцендентными.*

Зад2. Множество алгебраических чисел счетно.

Теорема (Кантор). Трансцендентные числа существуют, и их большинство!

Факт. Числа e и π — трансцендентны!

Опр3. Иррациональное число α называется *хорошо приближаемым,* если $\forall N, n > 0$ найдется рациональное число $\frac{p}{q}$ такое, что $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Nq^n}$.

Зад3. Приведите пример хорошо приближаемого числа.

Теорема Лиувилля. Хорошо приближаемое число не может быть алгебраическим: если α — корень неприводимого многочлена f степени ≥ 2, то существует такое число $c > 0$, что $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^n}$ для любого целого p и натурального q.

Зад4. В тетрадке у отличницы Оли нарисовано несколько "хитрых" отрезков, с помощью которых Оля строит циркулем и линейкой другие отрезки. Докажите, что коварная Марьиванна может задать на дом построение такого отрезка, что Оля получит двойку.

Опр4. *Конструктивное число* — это действительное или комплексное число, для которого существует конечное описание, как вычислить его с любой точностью. Остальные числа называются *неконструктивными.*

Зад5. Множество конструктивных чисел счетно.

Теорема. Неконструктивные числа существуют, и их большинство!

Зад6. Будет ли континуальным множество всех различных ломаных на плоскости а) с конечным; б) со счетным числом звеньев?

Для самостоятельного решения

Зад1. а) Найдите ошибку в следующем доказательстве несчетности конструктивных чисел: "Пусть все конструктивные числа занумерованы. Укажем алгоритм получения пропущенного конструктивного числа между 0 и 1: i-й знак равен 1, если i-й знак i-го числа равен 2, иначе: i-й знак равен 2. Противоречие" б) Приведите пример неконструктивного числа.

Зад2. Докажите, что число π конструктивно.

Зад3. Какую наибольшую мощность может иметь система различных подмножеств счетного множества так, чтобы а) любые два не пересекались; б) любые два пересекались не более, чем по 10 элементам; в) любые два пересекались не более, чем по конечному множеству; г) среди любых двух одно было подмножеством другого?

Зад4. На первом шаге из отрезка $[0;1]$ вырезают средний интервал длины $\frac{1}{3}$ — $(\frac{1}{3};\frac{2}{3})$, на втором — из каждого из оставшихся отрезков удаляют средние интервалы длины $\frac{1}{9}$, …, на n-ом — из каждого из оставшихся отрезков средние интервалы длины $\frac{1}{3^n}$. Множество, полученное после счетного числа шагов называется *канторовым множеством.*

а) Докажите, что канторово множество непусто. б) Является ли это множество счетным?

Алгебраические расширения

Пусть f — неприводимый над $F \subset \mathbb{C}$ многочлен степени n, α— любой его корень. Как устроено $F(\alpha)$? (В основном нас будет интересовать случай $F = \mathbb{Q}$).

Упр1. Рассмотрим множество линейных комбинаций вида $c_0\alpha^0 + c_1\alpha^1 + \dots + c_{n-1}\alpha^{n-1}$, где $c_i \in F$.

а) Если элемент из $\mathbb{C}$ представляется в таком виде, то он представляется однозначно.

б) Это множество замкнуто относительно сложения и умножения.

в) Используя алгоритм Евклида, покажите, что это множество замкнуто относительно деления.

Теорема 1. $F(\alpha)$ — n-мерное пространство над F. Его базисом являются элементы α^0, α^1, …, α^{n-1}.

Упр2. $F = \mathbb{Q}$, $f(x) = x^5 - 3x + 3$, α — какой-нибудь корень f. Чему равно $\frac{1}{\alpha^3+2}$?

Упр3. Пусть α_1, α_2 — два корня многочлена f. Тогда поля $F(\alpha_1)$ и $F(\alpha_2)$ изоморфны. Приведите пример, показывающий, что они могут не совпадать.

Опр1. Расширение $F \subset E$ называется *конечным*, если пространство E конечномерно над F. Размерность этого пространства называется *степенью* расширения E и обозначается $[E : F]$.

Упр4. Что можно сказать о степени расширения $F(\alpha)$?

Опр2. Элемент $\alpha \in \mathbb{C}$ *алгебраичен над полем* F, если он является корнем некоторого ненулевого многочлена из $F[x]$. Иначе элемент называется *трансцендентным над полем* F.

Упр5. а) Опишите все алгебраические и трансцендентные элементы над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$. б) Если элемент алгебраичен над каким-нибудь полем, то он алгебраичен и над расирением этого поля. в) Многочлен в определении алгебраичности можно считать неприводимым над F.

Теорема 2. Если $F \subset E$ — конечное расширение, то каждый элемент из E алгебраичен над F. Что можно сказать про степень алгебраичности элемента?

Упр6. Докажите, что число $\sqrt[5]{3} - 7\sqrt[5]{9} + 4$ является корнем некоторого многочлена с рациональными коэффициентами. Что можно сказать про степень этого многочлена? Как найти этот многочлен?

Теорема о размерности башни. Пусть $K \subset L \subset M$ — поля. Докажите, что

$$[M : K] = [M : L] \cdot [L : K].$$

Упр7. Выведите из теоремы о башне тривиальное доказательство следующей леммы, которую мы использовали ранее для доказательства неразрешимости двух классических задач на построение:

Лемма. Пусть поле $\mathbb{Q} \subseteq F_1 \cdots \subseteq F_k$ – башня квадратичных расширений. Тогда в F_k не могут содержаться корни неприводимых многочленов третьей степени.

Упр8. Пусть K — наименьшее числовое поле, содержащее а) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{17}$; б) $\sqrt[5]{2}$; в) $\sqrt[3]{7}$ и $\sqrt{10}$. Найти $\dim_{\mathbb{Q}} K$.

Упр9. а) Точно вычислите степень многочлена из упражнения 6.

б) Степень алгебраичности элемента является делителем размерности расширения.

Упр10. Найдите все подполя в $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Упр11. Докажите алгебраичность числа $\sqrt[13]{13} - 3\sqrt[7]{7}$.

Теорема 3. Сумма, произведение и частное алгебраических чисел алгебраичны, то есть алгебраические числа образуют подполе в $\mathbb{C}$.

Упр12. Докажите, что корень многочлена с алгебраическими коэффициентами является алгебраическим числом.

Упр13. А не будет ли поле алгебраических чисел алгебраически замкнутым?

Упр14. Докажите, что следующее число является алгебраическим:

$$\sqrt[3]{\frac{3 - 5\sqrt[4]{8}}{7\sqrt{2} - \sqrt[19]{3}} + 6} - \sqrt[18]{2}$$

Для самостоятельного решения

Зад1. Подполе K в $\mathbb{C}$ таково, что всякий многочлен вида $x^n - 1$ раскладывается на линейные множители в $K[x]$. Обязательно ли K совпадает с $\mathbb{C}$?

Зад3. Докажите, что $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5}) = \mathbb{Q}(\alpha)$ для некоторого α.

Зад3. Опишите все подполя $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$.

Теорема Шура

Факт. Уравнение $x^m + y^m = z^m$ при $m > 2$ не имеет решений в натуральных числах.

Зад1. Докажите, что сравнение $x^m + y^m \equiv z^m (mod\ p)$ при $m > 2$ имеет решения при всех достаточно больших простых p (теорема Шура).

а) Обозначим через g первообразный корень по модулю p. Пусть $n = (m, p-1)$. Тогда m-тые степени ненулевых вычетов по модулю p – это в точности $\{g^{mt}\} = \{g^{nt}\}$. Тем самым можно считать, что $m|p-1$.

б) Каждый ненулевой вычет x можно записать в виде $x = g^{i+mj}$, где $0 \leq i < m$ (и такое i единственно.)

в) Определим раскрашивание: $\chi(g^{i+mj}) = i$. Воспользуйтесь для завершения доказательства теоремой Рамсея (в раскрашенном графе есть одноцветный треугольник). Где использовано, что $m|p-1$?

О семнадцатой проблеме Гильберта

Утв. Любой многочлен с действительными коэффициентами, принимающий только неотрицательные значения, можно представить в виде суммы квадратов двух многочленов.

Вопрос. Верно ли то же самое для многочленов от нескольких переменных?

Пример 1.(Моцкин, 1967) Многочлен $F(x,y) = x^2y^2(x^2+y^2-3)+1$ принимает только неотрицательные значения, но его нельзя представить в виде суммы квадратов многочленов с действительными коэффициентами.

Пример 2. (Робинсон, 1973) Многочлен

$$F(x,y) = x^2(x^2-1)^2+y^2(y^2-1)^2-(x^2-1)(y^2-1)(x^2+y^2-1) = (x^2+y^2-1)(x^2-y^2)^2+(x^2-1)(y^2-1)$$

принимает только неотрицательные значения, но его нельзя представить в виде суммы квадратов многочленов с действительными коэффициентами.

17 проблема Гильберта (решена). Любой многочлен от n переменных с действительными коэффициентами, принимающий только неотрицательные значения, можно представить в виде суммы не более чем 2^n квадратов рациональных функций от этих переменных.

Вопрос. А как обстоят дела с многочленами над другими полями?

Утв2. Докажите, что многочлен x^2+x+4 (всюду принимающий положительные значения) нельзя представить в виде суммы четырех квадратов многочленов с рациональными коэффициентами.

Для самостоятельного решения

Зад1. Докажите, что положительное число $13+8\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ не является суммой никакого числа квадратов в $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Зад2. Многочлен $F(x,y) = 4 + x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2$ принимает только положительные значения, но его нельзя представить в виде суммы квадратов многочленов с действительными коэффициентами.

Зад3. Докажите, что не существует многочленов P, Q, R от переменных x, y, z таких, что выполнено равенство: $(x-y+1)^3P + (y-z-1)^3Q + (z-2x+1)^3R = 1$.

Зад4. Представьте многочлен из примера 1 в виде суммы квадратов рациональных функций.

Указание: сначала можно представить в таком виде $P(x,y,z) = \dfrac{x^6+y^6+z^6}{3} - x^2y^2z^2$ (фактически неравенство между средним арифметическим и геометрическим).

Уравнение Пелля

Зад1. Найдите все решения уравнения $x^2 - 3y^2 = 1$ в целых числах.

Подсказка. Мы будем рассматривать только те решения, у которых $x > 0$ и $y > 0$. Каждой паре (x,y), где $x, y \in \mathbb{Z}$ мы сопоставим число $\alpha = x + y\sqrt{3}$. *Сопряженным* числом называется $\overline{\alpha} = x - y\sqrt{3}$. *Нормой* числа такого вида назовем целое число $N(\alpha) = \alpha \cdot \overline{\alpha} = x^2 - 3y^2$. Наша цель — найти все такие числа с нормой 1. *Произведением* пар (x,y) и (u,v) называется пара, которая соответствует произведению чисел $\alpha = x + y\sqrt{3}$ и $\beta = u + v\sqrt{3}$. Легко понять, что произведение решений — тоже решение.

Вспомните, как мы из одного решения получили бесконечную серию. Обозначим это первое решение (x_0, y_0), и пусть $\alpha = x_0 + y_0\sqrt{3}$. Введем упорядочение на множестве решений: $(x,y) >$

$(u,v) \iff x+y\sqrt{3} > u+v\sqrt{3}$. Для того, чтобы доказать, что любое решение есть степень α, предположите противное и найдите (положительное!) решение, которое меньше, чем α. Остается доказать, что α — наименьшее решение.

Опр1. *Уравнение Пелля* — это уравнение в целых числах вида $x^2 - dy^2 = 1$, где d — положительное число, свободное от квадратов. Как и выше, определяются числа вида $a+b\sqrt{d}$, вводятся *сопряжение*, *норма* и *произведение* на парах (x,y).

Упр1. а) Найдите произведение пар (x,y) и (u,v)

б) Докажите, что $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.

в) Докажите, что произведение решений — тоже решение, степень решения — тоже решение.

Опр2. На множестве пар (x,y) введем упорядочение: $(x,y) > (u,v) \iff x+y\sqrt{d} > u+v\sqrt{d}$. Наименьшее положительное решение уравнения Пелля называется *фундаментальным.*

Замечание. Мы будем искать только решения с $x, y > 0$.

Зад2. Пусть (x,y) — фундаментальное решение уравнения Пелля. Докажите, что любое другое решение есть его степень.

Подсказка. Доказательство выглядит так же, как и в случае $d=3$.

Зад3. Докажите, что уравнение Пелля обладает хотя бы одним решением.

Лемма 1. Если r иррационально, то существует бесконечно много таких рациональных чисел $\frac{x}{y}$, $(x,y)=1$, что $\left|\frac{x}{y} - r\right| < \frac{1}{y^2}$.

Лемма 2. Если d — положительное свободное от квадратов целое число, то существует такая константа M, что неравенство $|x^2 - dy^2| < M$ имеет бесконечное число целочисленных решений. (Например, подойдет $M = 2\sqrt{d}+1$)

Следствие. Существует такое $m \in \mathbb{Z}$, что равенство $x^2 - dy^2 = m$ выполняется для бесконечного числа целых пар (x,y), $x>0, y>0$.

Теорема Уравнение Пелля $x^2 - dy^2 = 1$, где d свободно от квадратов, имеет бесконечно много решений в целых числах; все они — степень фундаментального решения.

Для самостоятельного решения

Зад1. а) Найдите фундаментальное решение уравнения $x^2 - 6y^2 = 1$.

б) Найдите все решения этого уравнения.

Теорема Рамсея

Мы будем разбивать все k-элементные подмножества некоторых множеств на r классов (то есть раскрашивать их в r цветов). В дальнейшем k-элементные подмножества некоторого множества будем называть k-наборами или k-подмножествами.

Теорема Рамсея (конечный случай). Для любых чисел k, l, r $(l \geq k)$ найдется столь большое число $R = R(k,l,r)$ что при произвольном раскрашивании k-подмножеств R-элементного множества в r цветов его некоторый l-набор имеет все k-подмножества одного и того же цвета.

Замечание. Значения $R(k,l,r)$ неизвестны даже примерно даже при относительно небольших k, l, r. Известно только, что они видимо очень большие.

Из соображений удобства (для дальнейшей индукции) теорему Рамсея для раскраски в 2 цвета удобно переформулировать.

Теорема Рамсея для двух цветов. Для любых чисел p, q, k $(p, q \geq k)$ найдется столь большое число $N = N(p,q;k)$, что если в множестве из N и более элементов все k-наборы раскрасить в синий и красный цвета, то либо найдется p-подмножество, содержащее только синие k-наборы, либо найдется q-подмножество, содержащее только красные k-наборы.

Упр1. Выведите теорему Рамсея для нескольких цветов из теоремы Рамсея для двух цветов.

Упр2. (О том, как тяжко приходится преподавателям 9 класса.) Сам по себе каждый девятиклассник хороший. Но любая компания из 4-х девятиклассников запрограммирована по ночам либо кидаться подушками, либо визжать, либо играть в карты при свете фонарика. В корпусе N 7 комнат по 4 человека в каждой. Если во всех комнатах корпуса N ночью дисциплину нарушают одинаково, то кто-то из преподавателей сходит с ума. Допустим, что в ЛМШ приехало **много** девятиклассников и они сами определяют, кто в каком корпусе будет жить, а преподаватели производят переселения почему-то только внутри корпуса. Докажите, что девятиклассники могут сговориться и поселиться по корпусам так, что до конца смены все преподаватели сойдут с ума, и никакие переселения внутри корпуса преподавателей не спасут.

Зад1. а) Пусть имеется выпуклый n-угольник ($n > 3$) и точка внутри него (никакие три точки не лежат на одной прямой). Докажите, что какие-то 4 из этих точек образуют невыпуклый четырехугольник.

б) Докажите, что для кажого n найдется такое число $V(n)$, что среди любых $V(n)$ точек общего положения на плоскости найдутся n, являющиеся вершинами выпуклого n-угольника. Для этого достаточно доказать, что $V(n) \leq N(n, 5; 4)$. Есть гипотеза, что $V(n) = 2^{n-2} + 1$ (известно, что $V(n) \geq 2^{n-2} + 1$).

Зад2. Докажите теорему Рамсея для двух цветов и произвольного k индукцией по k.

а) Обозначим $N = N(m, n; k)$ такое число (если оно существует!), что в любом отряде из N космонавтов можно выбрать либо m человек, любые k из которых образуют совместимый экипаж, либо n человек, любые k из которых образуют несовместимый экипаж (конечно, $n, m \geq k$).

б) Докажите, что $N(m, n, k) \leq N(N(m-1, n; k), N(m, n-1; k); k-1) + 1$.

Для самостоятельного решения

Зад1. В отряде космонавтов 6783 человека, причем среди любых четырех из них можно выбрать троих, образующих слаженный экипаж. Докажите, что можно выбрать пять космонавтов, любые три из которых образуют слаженный экипаж.

Зад2. а) На плоскости нарисовано 19 кругов так, что среди любых четырех какие-то три имеют общую точку. Докажите, что найдутся четыре круга, имеющие общую точку.

б) Можно ли круги заменить на кляксы (то есть существенна ли выпуклость кругов)?

Зад3. В областной думе 100 депутатов. За год работы каждый из них подрался не менее, чем с 76 коллегами. Докажите, что можно выбрать пять депутатов, из которых любые два уже подрались.

Зад4. а) Докажите, что среди любых 9-ти точек общего положения найдутся 5, являющиеся вершинами выпуклого 5-угольника.

б) А вот среди 8-ми точек их может и не найтись.

Заключительная олимпиада

Довывод

1. Альпинист хочет подняться на скалу высотой 1000 метров. После ночевки в лагере у подножья скалы он может подниматься, навешивая веревку, со скоростью 40 метров в час, а после холодной ночевки на скале — 30 метров в час. По готовой веревке он поднимается со скоростью 400 метров в час. За какое минимальное количество дней он может достичь вершины, если он будет работать на скале (включая подъём по веревке) не более 6 часов в день (временем спуска и других операций пренебречь).

2. Для данного натурального числа N построим две последовательности (a_n) и (b_n): $a_1 = b_1 = N$, $a_{n+1} = a_n + S(a_n)$, $b_{n+1} = b_n + \Pi(b_n)$, где $S(m)$ — сумма цифр, $\Pi(m)$ — произведение цифр натурального числа m. Докажите, что при каждом N найдется такой номер k, что $a_k > b_k$.

3. Двое по очереди закрашивают незакрашенные клетки доски 8×8 в желтый и синий цвет соответственно. Выигрывает тот, у кого клетки его цвета образуют большее число связанных фигур (по сторонам). Каков будет результат игры, если оба играют оптимальным образом?

4. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD на сторонах AB и CD выбраны точки K и M. Докажите, что если $\angle BAM = \angle CDK$, то $\angle BMA = \angle CKD$.

5. Каждое из двух натуральных чисел равно сумме трех различных собственных делителей другого (собственным делителем числа называется отличный от него натуральный делитель). Докажите, что эти два числа равны.

Вывод

6. Многочлен $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + 1$ с неотрицательными коэффициентами имеет n действительных корней. Докажите, что $f(2) \geq 3^n$.

7. Масса каждой из 201 гирек, расположенных по окружности — натуральное число, а их общая масса — 500 грамм. Докажите, что из этого набора можно выбрать одну или несколько гирек, расположенных подряд, с общей массой 100 грамм.

8. В треугольнике ABC точки P, Q, R лежат на сторонах BC, AC, AB так, что $AR : RB = BP : PC = CQ : QA$. Известно, что $\angle BAC = \angle QPR$. Докажите, что треугольники ABC и PQR подобны.

Послевывод

9. Докажите, что в последовательности (a_n) различных натуральных чисел, удовлетворяющих условию $a_n < 100n$, найдется число, в десятичной записи которого встречается 2003 девятки подряд.

ПРОГРАММА ЗАЧЕТА

или

Сколько веревочка ни вейся, а конец все равно будет

Множества. Равномощность, счетность и несчетность. Теорема Кантора-Бернштейна, теорема Кантора. Существование трансцендентных и неконструктивных чисел.

Комбинаторика. Шары и перегородки. Числа Каталана, формула для них (два способа доказательства). Теорема Рамсея для графов. Теорема Рамсея. Теорема Эрдёша-Секереша.

Линейная алгебра. СЛУ, ЭП. Метод Гаусса. Число решений. Рациональность решений. Задача про числа в таблице, задача про 101 корову. Разрезания прямоугольника на квадраты. Векторные пространства. База, базис, размерность. Изоморфизм ВП. Порядки конечных полей. Инвариант Дена и третья проблема Гильберта. Убывающие степени. Решение линейных рекуррент. Задача о числах на окружности.

Алгебра. Числовые поля. Доказательство иррациональности чисел. Избавление от иррациональности в знаменателе. Поля, расширения полей, изоморфизм. Характеристика поля. Построения ЦЛ. Неразрешимость классических задач. Присоединение корня неприводимого многочлена. Конечные расширения. Алгебраические элементы, степень алгебраичности. Теорема о башне расширений. Поле алгебраических чисел, его алгебраическая замкнутость.

Теория чисел. Функция Эйлера, теорема Эйлера, китайская теорема об остатках. Метод спуска. Описание пифагоровых троек, уравнение Ферма для $n = 4$. Теорема Лагранжа. Квадратичные вычеты и невычеты. Простейшие свойства символа Лежандра. Квадратичный закон взаимности для символа Лежандра. Символ Якоби и закон взаимности для закона Якоби. Теорема о полных квадратах. Показатели, первообразные корни. Гипотеза abc для чисел, вывод из нее проблемы Ферма. О проблеме Ферма по модулю p (теорема Шура). Уравнение Пелля, теорема о существовании нетривиального решения, описание всех решений.

Многочлены. Теорема Безу, теорема о рациональных корнях, теорема Виета, основная теорема арифметики (два доказательства). Критерий Эйзенштейна, лемма Гаусса, равносильность неприводимости над $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}$. Описание неприводимых многочленов над $\mathbb{R}$. Производная и кратные корни. Теорема Мейсона, вывод из нее теоремы Ферма для многочленов. Представление неотрицательных многочленов в виде сумм квадратов (от одной и нескольких переменных) над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$. Описание целочисленных многочленов. Теорема Лиувилля, пример трансцендентного числа. Задача интерполяции. Алгоритм Кронекера.

Комплексные числа. Определение, алгебраическая и тригонометрическая формы записи, модуль и аргумент. Комплексные числа как движения плоскости. Формула Муавра. Извлечение корней n-ой степени. Вычисление тригонометрических сумм. Невозможность упорядочивания $\mathbb{C}$. Геометрия комплексных чисел: простое и двойное отношение, теоремы Наполеона, Птолемея, Паскаля; задача Ньютона.

Геометрия. Теорема Хелли (на плоскости и в пространстве). Теорема Юнга. Геометрия масс: теоремы Чевы и Менелая. Гомотетия, определение и простейшие свойства. Композиция гомотетий, прямая Эйлера. Аффинные преобразования, функции на множестве векторов. Способы задания аффинных преобразований. Определитель аффинного преобразования, преобразование площадей. Эллипсы (равносильность нескольких определений). Эллипсы Штейнера. Невозможность построений одной линейкой.