Двадцать четвертая Летняя Многопредметная Школа Кировской области

Вишкиль. 3-28 июля 2008 г.

9 класс, группа профи

Преподаватели:
А. В. Пастор, А. Л. Глазман, Д. М. Столяров

Центр масс. 04.07.2008

1. В треугольнике ABC длины сторон $AB = C$, $BC = A$, $CA = B$. Доказать, что если в точки A, B и C поставлены массы A, B и C соответственно, то центром масс полученной системы является центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Найти, в каком отношении центр вписанной окружности делит каждую биссектрису.

2. На сторонах AB, BC, CD и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки K, L, M и N соответственно, причем $AK : KB = DM : MC = p$, $BL : LC = AN : ND = q$. Пусть точка P — точка пересечения отрезков KM и LN. Найдите, в каком отношении точка P делит каждый из отрезков KM и LN.

3. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты точки K, L и M соответственно так, что $AK : KL = 2 : 1$, $BL : LC = CM : AM = 1 : 2$. ML и CK пересекаются в точке P. Найдите, в каком соотношении точка P делит отрезки CK и ML.

4. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки K и L так, что $\frac{BK}{KC} = \frac{CL}{LD}$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника AKL лежит на диагонали BD.

5. Через точку P, расположенную внутри параллелограмма $ABCD$, проведены прямые, параллельные сторонам параллелограмма. Они пересекают стороны AB, BC, CD и DA в точках K, L, M и N соответственно. Пусть Q — точка пересечения средних линий четырехугольника $KLMN$, а S — центр параллелограмма. Докажите, что точка Q лежит на отрезке PS и определите, в каком отношении она делит этот отрезок.

6. Пусть M — центр тяжести треугольника ABC, I — центр его вписанной окружности, S — центр окружности, вписанный в треугольник,

образованный средними линиями треугольника ABC, и N — точка Нагеля треугольника ABC (т. е. точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания вневписанных окружностей с противоположными данным вершинам сторонами). Докажите, что точки N, M, I и S лежат на одной прямой, причем $MN = 2IM$ и $IS = SN$.

7. Центрально симметричная фигура на клетчатой бумаге состоит из n "уголков" четырех клеток и k прямоугольников размером 1×4. Докажите, что n четно.

8. В квадрате 10×10 расставлены числа от 1 до 100 следующим образом: в первой строке (слева направо по порядку) 1, 2, ... 10, во второй — 11, 12, ... 20, ..., в десятой — 91, 92, ... 100. Разрешается взять любой прямоугольник 1×3 и сделать следующую операцию: прибавить к крайним числам по 1, а из среднего отнять 2, или сделать обратную операцию. Через некоторое время оказалось, что в квадрате опять присутствуют все числа от 1 до 100. Докажите, что они расположены на первоначальных местах.

Вступительная олимпиада. 04.07.2008

1. Решите уравнение $[x^3] = \{x^2\} + 11$ ($[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x, $\{x\} = x - [x]$).

2. В треугольнике ABC $AB < AC$. Прямая, проходящая через вершину B параллельно AC, пересекает биссектрису внешнего угла A в точке D. Прямая, проходящая через вершину C параллельно AB, пересекает эту биссектрису в точке E. На стороне AC выбрана точка F так, что $FC = AB$. Доказать, что $DF = FE$.

3. Все клетки клетчатой плоскости покрашены в 5 цветов так, что в любом кресте из 5 клеток все цвета различны. Докажите, что и в любом прямоугольнике 1×5 все цвета различны.

4. Докажите, что для любого натурального числа n существует число, кратное n и с суммой цифр, равной n.

5. На плоскости отмечено N точек так, что попарные расстояния между ними не менее 1. Докажите, что можно выбрать из них не менее $[\frac{n}{7}]$ точек так, чтобы попарные расстояния между выбранными точками были не менее, чем $\sqrt{3}$.

Поворотная гомотетия. 05.07.2008

Определение. *Поворотной гомотетией* с коэффициентом k и углом φ называется композиция гомотетии с коэффициентом k и поворота на

угол φ, имеющих общий центр ($H_O^k \circ R_O^\varphi$). При этом можно считать, что $k > 0$ и $0^\circ \le \varphi < 360^\circ$.

1. Докажите, что преобразование подобия является поворотной гомотетией с коэффициентом $k \ne 1$ и углом φ тогда и только тогда, когда для любого вектора $\overrightarrow{a}$ данное преобразование переводит его в вектор $k \cdot \overrightarrow{a_\varphi}$ (где $\overrightarrow{a_\varphi}$ — вектор, полученный из вектора $\overrightarrow{a}$ поворотом на угол φ).

2. а) Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке P, причем все точки A, B, A_1, B_1, P различны. Докажите, что существует единственная поворотная гомотетия, переводящая точку A в A_1, а B в B_1, причем её центром является точка пересечения описанных окружностей треугольников AA_1P и BB_1P. б) Докажите, что центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок AB в отрезок A_1B_1 совпадает с центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AA_1 в отрезок BB_1. в) Даны четыре прямые общего положения. Выведете из пунктов а) и б) то, что описанные окружности четырех треугольников, образованных этими прямыми, пересекаются в одной точке.

3. Середины сторон BC и B_1C_1 правильных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают (вершины обоих треугольников перечислены по часовой стрелке). Найдите величину угла между прямыми AA_1 и BB_1, а также отношение длин отрезков AA_1 и BB_1.

4. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B. Прямые p и q, проходящие через точку A, пересекают окружность S_1 в точках P_1 и Q_1, а окружность S_2 — в точках P_2 и Q_2. Докажите, что угол между прямыми P_1Q_1 и P_2Q_2 равен углу между окружностями S_1 и S_2.

5. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 и A_1; точки M и M_1 — середины отрезков AC и A_1C_1 соответственно. Прямая BM пересекает описанную окружность треугольника A_1BC_1 в точке K_1, а прямая BM_1 — описанную окружность треугольника ABC в точке K. Сами описанные окружности пересекаются в точке P, а прямые A_1C_1 и AC — в точке T. Докажите, что точки M, M_1, K, K_1, P и T лежат на одной окружности.

Теория чисел и многочлены (повторение). 05.07.2008

1. а) Найдите все простые числа p такие, что $2^p+1 \,\vdots\, p$. б) Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что $2^n + 1 \,\vdots\, n$.

2. Для всех нечетных n докажите, что $2^{n!} - 1 \,\vdots\, n$.

Определение. Пусть $p \in \mathbb{P}$ и α — вычет по модулю p. Вычет α является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами по модулю p, если $f(\alpha) \equiv 0 \pmod p$. (Два многочлена сравнимы по модулю p, если сравнимы их коэффициенты при каждой степени x.)

3. а) Докажите, что если α — корень многочлена $f(x)$ по модулю p, то

$$f(x) \equiv (x-\alpha)g(x) \pmod p$$

для некоторого многочлена $g(x)$ с целыми коэффициентами. б) Докажите, что если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — корни многочлена $f(x)$ по модулю p, то

$$f(x) \equiv (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)g(x) \pmod p$$

для некоторого многочлена $g(x)$ с целыми коэффициентами. в) Докажите, что многочлен степени $n > 0$ может иметь не более n корней по модулю p. г) Докажите, что

$$x^{p-1} - 1 \equiv (x-1)(x-2)\ldots(x-(p-1)) \pmod p.$$

д) Выведите из предыдущих пунктов теорему Вильсона.

4. Докажите, что $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$ (где p — простое число, большее 2).

5. Пусть p — нечетное простое число, a, b, c — вычеты по модулю p, причем $a \not\equiv 0 \pmod p$, а $D = b^2 - 4ac$. Докажите, что если D — квадратичный вычет по модулю p, то сравнение $ax^2+bx+c \equiv 0 \pmod p$ имеет два корня, если D — квадратичный невычет по модулю p, то сравнение $ax^2+bx+c \equiv 0 \pmod p$ не имеет корней, а если $D \equiv 0 \pmod p$, то это сравнение имеет один корень.

Теория чисел-2 (первообразные корни и показатели). 06.07.2008

1. Пусть $p = 3k+2 \in \mathbb{P}$. а) Докажите, что сравнение $x^3 \equiv 1 \pmod p$ имеет единственное решение. б) Докажите, что для любого вычета a сравнение $x^3 \equiv a \pmod p$ имеет единственное решение.

2. Пусть $p = 3k+1 \in \mathbb{P}$. а) Докажите, что сравнение $x^3 \equiv 1 \pmod p$ имеет три решения. б) Докажите, что для любого вычета a сравнение $x^3 \equiv a \pmod p$ либо не имеет решений, либо имеет три решения. в) Найдите количество таких вычетов a, для которых сравнение $x^3 \equiv a \pmod p$ имеет решение.

3. Докажите следующую формулу: $n = \sum\limits_{d|n} \varphi(d)$.

Определение. Пусть $(a, m) = 1$. Наименьшее натуральное число d такое, что $a^d \equiv 1 \pmod{m}$ называется *показателем, которому принадлежит a по модулю m.*

4. а) Докажите, что если a принадлежит показателю d по модулю m, то $d \mid \varphi(m)$. б) Пусть $p \in \mathbb{P}$. Докажите, что для любого $d \mid p-1$ существует ровно $\varphi(d)$ вычетов, принадлежащих показателю d по модулю p.

Определение. Числа, принадлежащие показателю $\varphi(m)$ (если такие существуют), называются *первообразными корнями* по модулю m.

Из задачи 4б) следует, что по простому модулю p существует ровно $\varphi(p-1)$ первообразных корней.

5. Докажите, что для любых натуральных чисел a и n, больших единицы, $\varphi(a^n - 1) \,\vdots\, n$.

6. а) Пусть $p \in \mathbb{P}$, $p > 2$. Докажите, что любой делитель числа $2^p - 1$ представим в виде $2kp + 1$, где $k \in \mathbb{N}$. б) Пусть $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что любой делитель числа $2^{2^n} + 1$ представим в виде $2^{n+1}k + 1$, где $k \in \mathbb{N}$.

Инверсия. 06.07.2008

Определение. Пусть S — окружность с центром O радиуса r. *Инверсией* относительно окружности S называется преобразование плоскости, которое любую точку $A \neq O$ переводит в точку A', лежащую на луче OA такую, что $|OA| \cdot |OA'| = r^2$. Для точки O это преобразование неопределено. Точка O называется *центром инвесии*, S — *окружность инвесии*, r^2 — *степень инвесии.*

1. Пусть инверсия с центром O переводит окружность S в S'. Докажите, что точка O — центр гомотетии, переводящей S в S'.

2. Окружность S касается окружностей S_1 и S_2, имеющих различные радиусы, внешним образом в точках A и B. Докажите, что прямая AB проходит через центр гомотетии, переводящей S_1 в S_2.

3. Пусть A' и B' — образы точек A и B соответственно при инверсии с центром в точке O и радиусом R. Докажите, что $|A'B'| = \frac{|AB| \cdot R^2}{|OA| \cdot |OB|}$.

4. В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей. Для каждой пары окружностей через точку их касания проводится общая касательная. а) Докажите, что все получившиеся прямые проходят через одну точку. б) Найдите эту точку.

5. Точки A, B и C лежат на одной прямой, а точка P — вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP, BCP, CAP и точка P лежат на одной окружности.

Инверсия-2. 07.07.2008

1. Докажите, что инверсия сохраняет углы между окружностями и прямыми.

2. Две окружности, пересекающиеся в точке A, касаются третьей окружности в точках B_1, C_1 и четвертой в B_2, C_2. Докажите, что описанные окружности треугольников AB_1C_1 и AB_2C_2 касаются.

3. На плоскости даны четыре окружности. Каждая из них касается внешним образом ровно двух из оставшихся окружностей. Докажите, что все четыре получившиеся точки касания лежат на одной окружности.

4. Точки L и M выбраны на описанной окружности треугольника ABC таким образом, что AL и AM — биссектрисы соответственно внутреннего и внешнего углов треугольника. На продолжениях отрезков AM и AL выбраны точки P и Q соответственно таким образом, что $AM = MP$, $AL = LQ$. Описанные окружности треугольников AMQ и ALP вторично пересекаются в точке S. Докажите, что прямые AS и BC параллельны.

Разнобой. 07.07.2008

1. Двое играют в следующую игру. Каждый игрок по очереди вычеркивает одно число из ряда 1, 2, 3, ..., 127 до тех пор, пока не останется два числа. Если сумма этих чисел делится на 5, то выигрывает первый игрок, если не делится — то второй. Кто выиграет при правильной игре: первый или второй?

2. Даны простые числа p и q такие, что $p^2+1 \vdots q$ и $q^2-1 \vdots p$. Докажите, что число $p+q+1$ — составное.

3. Докажите, что не существует натуральных $n > 1$ таких, что $2^n - 1 \vdots n$.

4. Дан квадрат $ABCD$. Точки P и Q лежат на сторонах AB и BC соответственно, причем $BP = BQ$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок PC. Докажите, что $\angle DHQ = 90^\circ$.

5. Пусть $a, b, c > 0$. Докажите неравенство $\frac{c}{ab} + \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)$.

6. 100 прямых общего положения делят плоскость на части. Докажите, что переходя каждым ходом в соседнюю по стороне часть, нельзя ообойти эти части и вернуться на исходную позицию.

Полярное преобразование. 09.07.2008

Определение. Пусть ω — окружность с центром O радиуса r, P — точка, отличная от O. *Полярой* точки P называется прямая p, перпендикулярная OP и проходящая через точку P' (образ P при инверсии относительно ω). Точка P называется *полюсом* прямой p.

1. а) Пусть точка P лежит вне окружности ω. Докажите, что ее поляра проходит через точки касания касательных к ω, проведенных через P. б) Пусть $A \in b$, a — поляра точки A, B — полюс прямой b. Докажите, что $B \in a$.

2. На окружности отмечены точки A, B, C, D, E, F. Прямые AB и DE пересекаются в точке U, прямые BC и EF — в точке V, а прямые CD и FA — в точке W. (Некоторые из точек A, B, C, D, E, F могут совпадать, в этом случае в качестве соединяющей их прямой рассматривается касательная в этой точке.) а) Пусть X и Y — вторые точки пересечения описанной окружности треугольника BEV с прямыми AB и DE соответственно. Докажите, что соответствующие стороны треугольников XYV и ADW параллельны. б) **(Теорема Паскаля)** При помощи пункта а) докажите, что точки U, V и W лежат на одной прямой.

3. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Пусть E — точка пересечения его диагоналей, F — точка пересечения продолжений сторон AD и BC, G — точка пересечения продолжений сторон AB и CD, H — точка пересечения касательных к описанной окружности в точках C и D.

а) Докажите, что точки E, F, H лежат на одной прямой.

б) Докажите, что EF — поляра точки G, а FG — поляра точки E.

4. На окружности с центром O отмечены точки A, B и C. Пусть E — точка пересечения касательной, проведенной к окружности в точке A, и прямой, проходящей через O параллельно AC, а F — точка пересечения касательной, проведенной к окружности в точке B, и прямой, проходящей через O параллельно BC. Докажите, что прямая EF касается данной окружности.

5. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, AC, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что точки пе-

ресечения прямых AB и A_1B_1, AC и A_1C_1, BC и B_1C_1 лежат на одной прямой.

6. Через центр вписанной окружности треугольника проведены прямые, перпендикулярные его биссектрисам. Докажите, что точки пересечения этих прямых со сторонами, на которые опущены биссектрисы, лежат на одной прямой.

Теория чисел-3 (закон взаимности). 10.07.2008

1. Пусть p — нечетное простое число, $t = \frac{p-1}{2}$, $0 < x \le t$ и $(a, p) = 1$. Докажите, что а) $ax \equiv (-1)^{[\frac{2ax}{p}]} \cdot r_x \pmod p$, где $0 < r_x \le t$; б) $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum_{x=1}^{t}[\frac{2ax}{p}]}$.

2. Пусть p — нечетное простое число, $t = \frac{p-1}{2}$, $0 < x \le t$ и a — нечетое число, взаимно простое с p. Докажите, что а) $\left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum_{x=1}^{t}[\frac{ax}{p}]+\frac{p^2-1}{8}}$; б) $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$; в) $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum_{x=1}^{t}[\frac{ax}{p}]}$.

3. (Квадратичный закон взаимности Гаусса.) Докажите, что $\left(\frac{q}{p}\right) \cdot \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$ для любых различных нечетных простых чисел p и q.

4. а) Пусть $(m, n) = 1$. Докажите, что число a является квадратичным вычетом по модулю mn тогда и только тогда, когда оно является квадратичным вычетом по модулям m и n. б) Пусть p — нечетное простое число, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что a является квадратичным вычетом по модулю p^n тогда и только тогда, когда a является квадратичным вычетом по модулю p. в) Докажите, что a является квадратичным вычетом по модулю 2^n (где $n > 3$) тогда и только тогда, когда a является квадратичным вычетом по модулю 8.

5. Пусть $x_1 = 1, y_1 = 100,\ x_{n+1} = x_n^{237} + y_n,\ y_{n+1} = y_n^{237} + x_n$. Докажите, что $x_n y_n$ не делится на 239 ни при каком натуральном n.

Геометрия: поляра и прочее. 10.07.2008

1. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Точка O — центр его описанной окружности, T — точка пересечения диагоналей, P и Q — точки пересечения продолжений сторон. Докажите, что точки P, Q, T и O образуют *ортоцентрическую четверку* (т. е. любая из них является ортоцентром треугольника, образованного тремя другими).

2. На окружности даны 5 точек U, V, A, B, C. Прямые UA и VB пересекаются в точке M, прямые UB и VA — в точке M_1, прямые UB и VC — в точке N, прямые UC и VB — в точке N_1, прямые UC и VA — в точке P и прямые UA и VC — в точке P_1. Докажите, что прямые MM_1, NN_1 и PP_1 пересекаются в одной точке или параллельны.

3. Дан описанный четырехугольник $ABCD$. Его вписанная окружность касается сторон AB и CD в точках M и N. Докажите, что прямые AC, BD и MN пересекаются в одной точке.

4. Пусть точка M лежит на описанной окружности треугольника ABC. Рассмотрим произвольную точку R. Пусть прямые AR, BR и CR пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что точки пересечения прямых MA_1 и BC, MB_1 и CA, MC_1 и AB лежат на одной прямой, проходящей через точку R.

Комбинаторика. 11.07.2008

1. Все грани многогранника являются треугольниками. Каждая грань окрашена в один из двух цветов так, что количество ребер, по которым граничат одноцветные грани, минимально. Докажите, что граней одного цвета не более, чем в полтора раза больше, чем граней другого.

2. Пусть d и n — натуральные числа, причем n делится на d. Набор целых чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ назовем *выделенным*, если

(i) $0 \le x_1 \le \ldots \le x_n \le n$;

(ii) $x_1 + \ldots + x_n$ делится на d.

Докажите, что ровно половина всех выделенных наборов удовлетворяет условию $x_n = n$.

3. Ребра связного кубического графа (т. е. графа, все вершины которого имеют степень 3) раскрашены в три цвета так, что из каждой вершины выходят ребра разных цветов. Одно ребро удалили. Докажите, что связность сохранилась.

4. Определение. Свойство P называется наследственным, если для любого обладающего свойством P графа G любой подграф графа G также обладает свойством P.

а) Пусть $P(n)$ — наибольшое количествро ребер в графе с n вершинами, обладающим наследственным свойством P. Докажите, что $P(v) \le \frac{v}{v-2}P(v-1)$.

Найдите при помощи пункта **а** наибольшое количество ребер в графе на v вершинах без б) треугольника; в) полного графа на 4 вершинах.

5. В выпуклом многограннике все грани — правильные 5, 6 и 7-угольники. Докажите, что граней-пятиугольников ровно на 12 больше, чем граней-семиугольников.

6. В ряду 1100 мест, на первые 100 мест слева продано n билетов (где $100 \leq n \leq 1000$). Зрители заходят по одному слева. Каждый зритель идет до своего места, садится, если это место свободно, а если его место занято, то громко возмущается, смещается на одно место вправо, занимает это место, если оно свободно, а если занято, то опять громко возмущается и смещается на одно место вправо, и так далее, пока не найдет свободное место. Докажите, что количество громких возмущений не зависит от порядка входа зрителей.

7. В школе изучаются $2n$ предметов, а ученики получают только двойки и тройки. Никакие два ученика не учатся одинаково, и ни про каких двух учеников нельзя сказать, что один учится лучше другого (т. е. по всем предметам не хуже, и хотя бы по одному предмету лучше). Докажите, что количество учеников не превосходит C_{2n}^{n}.

Неравенства. 11.07.2008

1. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$. Докажите неравенство $2(1-a+a^2)(1-b+b^2) \geq 1+a^2b^2$.

2. Пусть $x, y, z > 0$. Докажите, что $\sqrt{x+\sqrt[3]{y+\sqrt[4]{z}}} \geq \sqrt[32]{xyz}$.

3. Для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ докажите неравенства а) $\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_1} \geq a_1+a_2+\ldots+a_n$;

б) $\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\ldots\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right) \geq (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)$.

4. (Неравенство Шура). Докажите, что при всех положительных x, y и z и $p \geq 1$ справедливо неравенство

$$x^p(x-y)(x-z)+y^p(y-x)(y-z)+z^p(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Определение. Пусть $A = (a_1, \ldots, a_n)$ и $B = (b_1, \ldots, b_n)$ — невозрастающие наборы целых неотрицательных чисел (т. е. $a_1 \geq \ldots \geq a_n$ и $b_1 \geq \ldots \geq b_n$). Набор A *мажорирует* набор B (обозначение $A \succ B$), если выполняются следующие условия: $a_1 \geq b_1$, $a_1+a_2 \geq b_1+b_2$, $\ldots$, $a_1+\ldots+a_{n-1} \geq b_1+\ldots+b_{n-1}$, $\quad a_1+\ldots+a_n = b_1+\ldots+b_n$.

5. (Неравнество Мюрхеда.) Даны положительные числа $x_1, \ldots, x_n$ и два невозрастающих набора целых неотрицательных

чисел $(a_1, \ldots, a_n) \succ (b_1, \ldots, b_n)$. Докажите, что

$$\frac{1}{n!} \sum_{(i_1,\ldots,i_n)} x_{i_1}^{a_1} \ldots x_{i_n}^{a_n} \geq \frac{1}{n!} \sum_{(i_1,\ldots,i_n)} x_{i_1}^{b_1} \ldots x_{i_n}^{b_n},$$

где суммирование ведется по всем возможным перестановкам чисел $1, \ldots, n$.

Определение. Выражение $\sum\limits_{(i_1,\ldots,i_n)} x_{i_1}^{a_1} \ldots x_{i_n}^{a_n}$ называется *орбитой* одночлена $x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$.

6. Пусть $x, y, z > 0$. Докажите, что $8(x^3 + y^3 + z^3)^2 \geq 9(x^2 + yz)(y^2 + zx)(z^2 + xy)$.

Теория чисел-4. 12.07.2008

1. $a - b \,\vdots\, p$, где $p \in \mathbb{P}$. Докажите, что $a^p - b^p \,\vdots\, p^2$.

Определение. Для простого числа p и натуральных чисел a и n будем писать, что $p^n \parallel a$, если $a \,\vdots\, p^n$, но $a \not\vdots\, p^{n+1}$ (т. е. простое число p входит в разложение на простые множители числа a с показателем n).

2. (Лемма Гензеля.) Даны простое число p и натуральные числа a и n, причем $a - 1 \,\vdots\, p$. Пусть $p^t \parallel a - 1$. а) Докажите, что если $n \not\vdots\, p$, то $p^t \parallel a^n - 1$. б) Пусть натуральное число k таково, что $p^k \parallel n$. Докажите, что если $p > 2$ или $t > 1$, то $p^{t+k} \parallel a^n - 1$, а если $p = 2$ и $t = 1$, то $2^{k+2} \mid a^n - 1$.

3. а) Сколькими нулями оканчивается число $4^{5^6} + 6^{5^4}$? б) Укажите наибольшую степень числа 1979, на которую делится число $1978^{1979^{1980}} + 1980^{1979^{1978}}$.

4. Решите в натуральных числах уравнение $z^x + 1 = (z + 1)^y$.

5. С каким показателем простое число p входит в разложение на простые множители числа $n!$?

6. Найдите количество коэффициентов многочлена $(1 + x)^{1988}$, не делящихся на 3.

Разнобой. 12.07.2008

1. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке X. Точка A' — середина этой стороны. Докажите, что прямая $A'I$ (где I — центр вписанной окружности) делит пополам отрезок AX.

2. Докажите, что в последовательности $a_n = 2^n - 1$ существует отрезок произвольной длины, состоящий только из составных чисел.

3. Доска $2n \times 2n$ разбита на доминошки. Ее разрезали по диагонали. Докажите, что количество треугольничков в полученных частях равны.

4. Даны попарно различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажите, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

5. Существует ли такая выпуклая фигура, что она не покрывает полукруг радиуса 1, но двумя ее экземплярами можно покрыть круг радиуса 1?

6. Даны четыре окружности S_1, S_2, S_3, S_4. Пусть S_1 и S_2 пересекаются в точках A_1 и A_2, S_2 и S_3 — в точках B_1 и B_2, S_3 и S_4 — в точках C_1 и C_2, S_4 и S_1 — в точках D_1 и D_2. Докажите, что если точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на одной окружности S (или прямой), то и точки A_2, B_2, C_2, D_2 лежат на одной окружности (или прямой).

Гармонические четырехугольники. 13.07.2008

Определение. *Симедианой* треугольника называется прямая, симметричная его медиане относительно биссектрисы угла, из которого проведена медиана.

1. а) Пусть BM — симедиана треугольника ABC. Докажите, что $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|AB|^2}{|BC|^2}$. б) **(Точка Лемуана.)** Докажите, что симедианы треугольника пересекаются в одной точке.

Определение. Вписанный четырехугольник называется *гармоническим*, если произведения длин его противоположных сторон равны.

2. а) Пусть $ABCD$ — гармонический четырехугольник, M — точка пересечения его диагоналей. Докажите, что $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|AB|^2}{|BC|^2} = \frac{|AD|^2}{|DC|^2}$. б) Докажите, что каждая диагональ гармонического четырехугольника является симедианой треугольиков, на которые разбивает четырехугольник другая диагональ.

Определение. *Двойным отношением* упорядоченной четверки точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой, называется величина $(A, B, C, D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$. В случае, если $(A, B, C, D) = -1$, четверка точек A, B, C, D называется *гармонической*.

3. а) Пусть $ABCD$ — гармонический четырехугольник, M — точка пересечения его диагоналей, P — точка пересечения касательной к

его описанной окружности в точке B и прямой AC. Докажите, что точки A, C, M, P образуют гармоническую четверку точек. б) Докажите, что вписанный четырехугольник $ABCD$ является гармоническим тогда и только тогда, когда касательные к его описанной окружности в точках B и D пересекаются на прямой AC, либо параллельны этой прямой. в) Докажите, что гармонический четырехугольник однозначно задается тремя своими вершинами (порядок обхода вершин также известен) и укажите способ его построения по трем данным вершинам. г) Диагональ BD вписанного четырехугольника $ABCD$ является симедианой треугольника ABC. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ гармонический.

4. Пусть N — середина диагонали AC гармонического четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $\angle BNC = \angle DNC$.

5. В окружности S проведены две параллельные хорды AB и CD. Прямая, проведенная через C и середину AB, вторично пересекает S в точке E. Точка K — середина отрезка DE. Докажите, что $\angle AKE = \angle BKE$.

6. Пусть PT и PB — две касательные к окружности, AB — ее диаметр, и TH — перпендикуляр, опущенный из точки T на AB. Докажите, что прямая AP делит пополам отрезок TH.

Выпуклость. 13.07.2008

Определение. Фигура называется *выпуклой*, если вместе с любыми двумя своими точками содержит соединяющий их отрезок.

1. Докажите, что а) многоугольник является выпуклой фигурой тогда и только тогда, когда он лежит по одну сторону от любой прямой, содержащий ее сторону; б) выпуклый многоугольник является пересечением конечного количества полуплоскостей.

Определение. *Выпуклой оболочкой* множества точек A называется наименьшая по включению выпуклая фигура, содержащая все точки множества A.

2. Докажите, что у произвольного множества точек на плоскости существует выпуклая оболочка.

3. а) Докажите, что выпуклая оболочка конечного множества точек является многоугольником с вершинами в некоторых из этих точек. б) Докажите, что выпуклая оболочка многоугольника совпадает с выпуклой оболочкой множества его вершин.

4. Докажите, что в выпуклый многоугольник площади S и периметра P можно поместить окружность радиуса $\frac{S}{P}$.

5. (Теорема Хелли.) На плоскости дано а) 4; б) n выпуклых фигур, причем любые три из них имеют общую точку. Докажите, что все фигуры имеют общую точку.

6. На плоскости даны несколько фигур, любые три из которых можно покрыть кругом радиуса 1. Докажите, что все эти фигуры можно покрыть кругом радиуса 1.

Геометрический разнобой. 15.07.2008

1. Окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках P и Q, а также описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ABC лежит на отрезке PQ.

2. а) **(Теорема о двойной бабочке.)** На окружности S отмечены точки A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4. Прямая ℓ пересекает прямые A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 в точках X_1, X_2, X_3, X_4 соответственно и прямые B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 в точках X_1, X_2, X_3 соответственно. Докажите, что прямая B_4B_1 проходит через точку X_4.

б) (**Теорема о бабочке.**) Через точку M, являющуюся серединой хорды PQ некоторой окружности, проведены хорды AB и CD. Хорды AD и BC пересекают отрезок PQ в точках X и Y. Докажите, что точка M является серединой отрезка XY.

3. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, AC, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Вневписанная окружность касается стороны AC в точке B_2, и продолжений сторон AB и BC в точках C_2 и A_2 соответственно. На отрезках A_1C_1 и A_2C_2 отмечены точки X и Y соответственно, такие что $XB_1 \perp AC$ и $YB_2 \perp AC$. Докажите, что $AXCY$ — паралеллограмм.

4. Даны два правильных пятиугольника $AB_1B_2B_3B_4$ и $AC_1C_2C_3C_4$ (порядок вершин в обоих случаях дан по часовой стрелке). Докажите, что прямые B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 и B_4C_4 пересекаются в одной точке.

5. Чевианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке P. Перпендикуляры к этим чевианам, восставленные из точки P пересекают прямые BC, AC, AB в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что точки A_2, B_2, C_2 лежат на одной прямой.

6. Четырехугольник $ABCD$ является одновременно вписанным и описанным. Вписанная окружность касается сторон AB, BC, CD и DA четырехугольника в точках A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно. Продолжения сторон четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точках P и Q, а продолжения сторон четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ — в точках P_1 и Q_1. Докажите, что а) точки P, Q, P_1, Q_1 лежат на одной прямой; б) эта прямая перпендикулярна линии центров вписанной и описанной окружностей.

Теорема Форда-Фалкерсона. 15-16.07.2008

1. Для любого потока f и разреза (S, T) сети G докажите, что $|f| = f(S, T)$.

2. (Теорема Форда-Фалкерсона.) В сети G с пропускной способностью c задан поток f. Докажите, что следующие три утверждения равносильны:

1° поток f максимален;

2° существует разрез (S, T) такой, что $|f| = c(S, T)$;

3° в остаточной сети нет дополняющего пути.

Следствие. Величина максимального потока равна пропускной способности минимального разреза.

3. Пусть (S_1, T_1) и (S_2, T_2) — минимальные разрезы в сети G. Докажите, что разрезы $(S_1 \cap S_2, T_1 \cup T_2)$ и $(S_1 \cup S_2, T_1 \cap T_2)$ также являются минимальными.

4. Докажите, что в целочисленной сети (т. е. в сети, пропускные способности всех ребер которой являются целыми числами) существует максимальный поток, причем среди максимальных потоков данной сети найдется целочисленный.

Выведете из теоремы Форда-Фалкерсона следующие утверждения:

5. (Теорема Холла.) Если в двудольном графе с долями A и B для любого множества из k вершин $V \subseteq A$ существует не менее k вершин доли B, смежных хотя бы с одной из вершин множества V, то существует паросочетание, содержащее все вершины из A.

6. (Теорема Менгера.) Даны граф G и его вершины u и v. а) Пусть при удалении любых $k - 1$ ребер в оставшемся графе существует путь между u и v. Тогда в графе G существует k путей между u и v, не имеющие общих ребер. б) Пусть вершины u и v несмежны и при

удалении любых $k-1$ вершин в оставшемся графе существует путь между u и v. Тогда в графе G существует k путей между u и v, не имеющие общих внутренних вершин.

7. (Теорема Кёнига.) На клечатой плоскости расставлено несколько ладей. Тогда наибольшее число небьющих друг друга ладей, которые можно выбрать из них, равно наименьшему числу линий (столбцов и строк), покрывающих все данные ладьи.

Теория чисел-5. (Уравнение Пелля и прочее). 16.07.2008

1. Дано уравнение $x^2 - 5y^2 = 1$. Каждому его целочисленному решению (x, y) поставим в соответствие число $x + y\sqrt{5}$. Это число мы также будем называть решением данного уравнения. Докажите, что а) произведение и частное целочисленных решений дает целочисленное решение; б) если $a + b\sqrt{5}$ и $c + d\sqrt{5}$ — решения такие, что $a, b, c, d > 0$ и $a + b\sqrt{5} < c + d\sqrt{5}$, то $a < c$ и $b < d$; в) все решения данного уравнения представляются в виде $\pm(9 + 4\sqrt{5})^n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

г) В каком виде можно представить все решения уравнения $x^2 - 5y^2 = -1$? д) А уравнения $x^2 - 5y^2 = 4$?

Определение. *Уравнением Пелля* называется уравнение в целых числах вида $x^2 - dy^2 = 1$, где d — свободное от квадратов натуральное число.

Известно, что для любого d уравнение Пелля имеет бесконечно много целочисленных решений.

2. Докажите, что для $d = m^2 + 1$ уравнение Пелля имеет бесконечно много решений и найдите наименьшее натуральнее решение этого уравнения.

3. Докажите, что а) уравнение $(x + 1)^3 - x^3 = y^2$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах; б) для любого натурального решения этого уравнения число y представимо в виде суммы квадратов двух последовательных целых чисел. в) Докажите, что уравнение $(x + 2)^3 - x^3 = y^2$ не имеет решений в целых числах.

4. Пусть $p = 4k + 3 \in \mathbb{P}$ и $a, b \in \mathbb{N}$. Докажите, что если $a^2 + b^2 \vdots p$, то $a, b \vdots p$.

5. Докажите, что число $1996^{1996}+1$ не является степенью выше первой никакого натурального числа.

Аффинные преобразования. 16-17.07.2008

Определение. *Аффинным преобразованием* плоскости называется биекция плоскости на себя, переводящая прямые в прямые.

Определение. *Растяжением* плоскости относительно оси ℓ с коэффициентом k называется преобразование плоскости, при котором каждая точка M переходит в такую точку M', что $\overline{OM'} = k\overline{OM}$, где O — проекция точки M на прямую ℓ. (Растяжение с коэффициентом меньше единицы называется *сжатием.*)

1. Докажите, что растяжение плоскости является аффинным преобразованием.

2. Точки A и B лежат на прямой ℓ, а их образы при аффинном преобразовании F, точки A' и B' — на прямой ℓ'. Введем на прямых ℓ и ℓ' системы координат так, что точкам A и A' соответствует координата 0, а точкам B и B' — координата 1. Рассмотрим отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ставящее в соответствие числу a координату образа точки с координатой a.

Докажите, что а) $f(a+b) = f(a) + f(b)$; б) $f(ab) = f(a)f(b)$; в) функция f монотонна.

Теорема Дарбу. Даны аффинное преобразование F и точки A, B и C, лежащие на одной прямой. Тогда $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{F(A)F(B)}}{\overline{F(B)F(C)}}$.

3. а) Даны точки O, O', и две пары неколлинеарных векторов $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ и $\overline{e}_1{}'$, $\overline{e}_2{}'$. Докажите, что существует единственное аффинное преобразование, переводящее O в O', $\overline{e}_1$ в $\overline{e}_1{}'$ и $\overline{e}_2$ в $\overline{e}_2{}'$.

б) Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что существует единственное аффинное преобразование, переводящее точку A в A_1, B — в B_1, C — в C_1.

в) Даны два параллелограмма. Докажите, что существует единственное аффинное преобразование, которое один из них переводит в другой.

4. Через каждую вершину треугольника проведены две прямые, делящие противоположную сторону на три равные части. Докажите, что диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, образованного в пересечении шести проведенных прямых, пересекаются в одной точке.

5. (Прямая Гаусса.) Дан четырехугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые AD и BC — в точке F. Докажите, что середины диагоналей данного четырехугольника и середина отрезка EF лежат на одной прямой.

Матбой профи-8 — профи-9. 17.07.2008

1. Пусть P — точка, лежащая внутри треугольника ABC, а D, E, F — ее ортогональные проекции на прямые BC, CA и AB соответственно. Найти все точки P, для которых сумма

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

минимальна.

2. Дан многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что если для натуральных чисел a и b числа $f(a)$ и $f(b)$ взаимно просты, то a и b также взаимно просты. Докажите, что либо $f(0) = 0$, либо существует такое натуральное число $d > 1$, что $f(n) \vdots d$ при всех натуральных n.

3. Назовем словом любую конечную последовательность букв А и Б. Есть две операции над словами: первая — вставить в любом месте слова букву А, а в конце слова — Б; вторая — вставить в любом месте слова АБ. Докажите, что множество слов, которые можно получить из слова АБ с помощью первой операции совпадает с множеством слов, которые можно получить из слова АБ с помощью второй операции.

4. Пусть G—граф, все степени вершин которого не меньше двух и не больше 100. Докажите, что его вершины можно раскрасить правильным образом в 104 цвета так, чтобы не было вершины, все соседи которой одного цвета.

5. Пусть n, p, q — натуральные числа и $n > p + q$. Рассмотрим целые числа $x_1, \ldots, x_n$, такие, что $x_0 = x_n = 0$ и $x_{i+1} - x_i$ равно либо p, либо $-q$ для любого i. Докажите, что существует пара $(i, j), i < j$, отличная от $(0, n)$, такая, что $x_i = x_j$.

6. В окружности проведены перпендикулярные диаметры AB и CD. Из точки M, лежащей вне окружности, проведены касательные к окружности, пересекающие прямую AB в точках E и H, а также прямые MC и MD, пересекающие прямую AB в точках F и K. Докажите, что $EF = KH$.

7. Сумма положительных чисел x, y и z равна 1. Докажите, что

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) \geqslant 64.$$

8. Имеется квадрат клетчатой бумаги размером $n \times n$ клеток и связная фигура неизвестной формы, состоящая из $n - 1$ клетки. Докажите,

что из этого квадрата можно с гарантией вырезать четыре таких фигуры. Фигура, составленная из клеток, называется связной, если любые две её клетки можно соединить цепочкой её клеток, в которой любые две соседние клетки имеют общую сторону.

9. На плоскости выбрано 2008 точек. Докажите, что среди попарных расстояний между ними хотя бы 40 различных.

10. Кенгуру прыгает по узлам клечатой сетки так, что все его прыжки имеют одинаковую длину. Может ли он вернуться в исходную точку через 239 прыжков?

Матбой профи-9 — профи-10. 17.07.2008

1. Биссектрисы углов A, B, C треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что $S_{ABC_1} + S_{ACB_1} + S_{CBA_1} \geq S_{ABC}$.

2. В графе степени всех вершин не меньше 2 и не больше 100. Докажите, что его вершины можно покрасить в 101 цвет так, чтобы любые две смежные вершины имели разные цвета и для любой вершины смежные с ней не все были одного цвета.

3. В окружности проведены перпендикулярные диаметры AB и CD. Из точки M, лежащей вне окружности, проведены касательные к окружности, пересекающие прямую AB в точках E и H, а также прямые MC и MD, пересекающие прямую AB в точках F и K. Докажите, что $EF = KH$.

4. Вещественные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что для любых i, j выполняется неравенство $a_{i+j} \leq a_i + a_j$. Докажите, что $a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \ldots + \frac{a_n}{n} \geq a_n$.

5. Дан многочлен $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ с рациональными коэффициентами, причем $d < 0$. Произведение каких-то двух корней $P(x)$ рационально. Докажите, что их сумма тоже рациональна.

6. Имеется связная клетчатая фигура из $n - 1$ клетки ($n \geq 2$). Докажите, что из клетчатого квадрата $n \times n$ можно вырезать четыре таких непересекающихся фигуры. (Клетчатая фигура называется связной, если любые две её клетки можно соединить цепочкой её клеток, в которой любые две соседние клетки имеют общую сторону.)

7. На сфере отмечено n различных точек. Докажите, что сферу можно разбить на n конгруэнтных связных областей так, чтобы в каждой области лежала ровно одна отмеченная точка.

8. Назовем словом любую конечную последовательность букв Л и Я. Есть две операции над словами: первая — вставить в любом месте слова букву Л, а в конце слова — Я; вторая — вставить в любом месте слова ЛЯ. Докажите, что множество слов, которые можно получить из слова ЛЯ с помощью первой операции совпадает с множеством слов, которые можно получить из слова ЛЯ с помощью второй операции.

9. Натуральное число n таково, что $4^n + 2^n + 1$ — простое. Докажите, что n – степень тройки.

10. Рассмотрим последовательность рациональных дробей $P_n(x)$, заданную следующим условием:

$$P_1(x) = x; \quad P_2(x) = x^3;$$

$$P_{n+1}(x) = \frac{P_n^3(x) - P_{n-1}(x)}{1 + P_n(x)P_{n-1}(x)}, \qquad n \geq 2.$$

Докажите, что все дроби $P_n(x)$ являются многочленами.

Неравенства-2. 19.07.2008

1. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 + 21x^2y^2z^2 \geq 6xyz(x + y)(y + z)(z + x).$$

2. Пусть $x, y, z > 0$ и $xyz = 1$. Докажите неравенство $\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}$.

3. Для положительных чисел, таких что $a + b + c = 1$, докажите неравенство: $1 + 9abc \geq 4(ab + bc + ac)$.

4. Докажите неравенство для положительных чисел:

$$\frac{a^2(b + c)}{b^2 + c^2} + \frac{b^2(a + c)}{a^2 + c^2} + \frac{c^2(b + a)}{b^2 + a^2} \geq a + b + c.$$

5. Пусть $a, b, c, d > 0$. Докажите неравнество: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2$.

6. Пусть $a, b, c > 0$ и $abc = 1$. Докажите неравенство: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$.

Двойные отношения. 19.07.2008

Определение. *Двойным отношением* упорядоченной четверки точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой, называется величина $(A, B, C, D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$.

Определение. *Двойным отношением* упорядоченной четверки прямых a, b, c, d, называется величина $(a, b, c, d) = \frac{\sin\angle(\overline{a},\overline{c})}{\sin\angle(\overline{b},\overline{c})} : \frac{\sin\angle(\overline{a},\overline{d})}{\sin\angle(\overline{b},\overline{d})}$, где $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ — произвольные векторы, направленные вдоль прямых a, b, c, d.

Замечание. Эта величина не зависит от выбора направлений векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$.

Определение. Точки A, B, C, D лежат на окружности S. Пусть X — произвольная точка этой окружности. Двойным отношением упорядоченной четверки точек A, B, C, D называется величина $(A, B, C, D) = (XA, XB, XC, XD)$.

Замечание. Эта величина не зависит от выбора точки X. В случае, если одна из точек A, B, C, D совпадает с X, в качестве соответствующей прямой рассматривается касательная к окружности S.

1. Докажите, что двойное отношение сохраняется при полярном преобразовании.

2. Докажите, что если $(A, B, C, D) = 1$, то либо $A = B$, либо $C = D$.

3. Докажите, что $(A, B, C, D) + (A, C, B, D) = 1$.

4. Продолжения сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, продолжения BC и AD — в точке F, прямые AC и BD пересекают EF в точках M и N. Докажите, что $(E, F, M, N) = -1$.

5. При помощи проецированя двойных отношений докажите а) теорему Паскаля (в случае, если хотя бы одна из точек прерсечения противоположных звеньев ломаной лежит внутри окружности); б) теорему о бабочке.

6. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ точка M — середина CD, $F = (AD) \cap (BC)$ и $E = (AC) \cap (BD)$. Отличная от M точка N на описанной окружности $\triangle ABM$ такова, что $\frac{AN}{NB} = \frac{AM}{MB}$. Докажите, что точка N лежит на прямой EF.

Блоки и точки сочленения. 20.07.2008

Определение 1. Вершина v связного графа G называется *точкой сочленения*, если при удалении вершины v граф G теряет связность. Граф G

называется *двусвязным*, если он связен и сохраняет связность при удалении любой вершины.

Определение 2. *Блоком* связного графа G называется максимальный по включению двусвязный подграф графа G.

1. Пусть G — связный граф, а B_1 и B_2 — два различных блока этого графа. Тогда множества вершин блоков B_1 и B_2 либо не пересекаются, либо в пересечении имеют ровно одну вершину, являющуюся точкой сочленения.

Определение 3. Пусть $B_1, \ldots, B_n$ — все блоки связного графа G, а $a_1, \ldots, a_m$ — все точки сочленения графа G. Построим *дерево блоков и точек сочленения* $B(G)$ с вершинами $B_1, \ldots, B_n, a_1, \ldots, a_m$, в котором вершины a_i и B_j соединены ребром тогда и только тогда, когда точка сочленения a_i является одной из вершин блока B_j.

2. Докажите, что дерево блоков и точек сочленения связного графа действительно является деревом, причем все его висячие вершины соответствуют блокам.

3. Пусть $b(G)$ — количество блоков связного графа G, а $b(v)$ — количество блоков, которым принадлежит вершина v графа G. Докажите, что

$$b(G) - 1 = \sum_{v \in V(G)} (b(v) - 1).$$

Определение 4. Связный граф G называется *кактусом*, если каждое ребро графа G принадлежит ровно одному простому циклу.

4. а) Докажите, что все блоки кактуса — простые циклы. б) Докажите, что если в графе без мостов все простые циклы нечетны, то это — кактус.

5. В стране 100 городов, соединенных друг с другом дорогами так, что даже если любой город А закроет все дороги, выходящие из него, то и в этом случае из любого города можно будет проехать в любой другой (не считая, конечно, самого города А). Докажите, что страну можно разбить на два суверенных государства, по 50 городов в каждом, так, что в обоих государствах из любого города можно проехать в любой другой.

6. В будущем графе 2000 вершин и изначально нет ребер. Двое игроков по очереди проводят новые ребра графа (кратные ребра и петли не допускаются). Игрок, после хода которого получается двусвязный граф, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

Проективные преобразования. 20-21.07.2008

Определение 1. *Проективным преобразованием* называется биекция проективной плоскости на себя, переводящая прямые в прямые.

Определение 2. *Особой прямой* называется прямая, переходящая в бесконечно удаленную.

1. Докажите, что при проективном преобразовании сохраняется отношение направленных отрезков, лежащих на прямой, параллельной особой.

Теорема 1. Для любых двух четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ существует единственное проективное преобразование, переводящее A в A_1, B в B_1, C в C_1 и D в D_1.

Теорема 2. Прямая ℓ не пересекает окружность S. Тогда существует проективное преобразование, переводящее прямую ℓ в бесконечно удаленную, а окружность S в себя.

Следствие. Существует проективное преобразование, переводящее данную точку внутри окружности в центр, а окружность в себя.

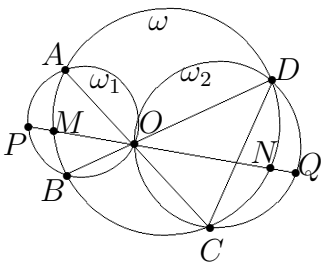
2. Докажите, что проективное преобразование, переводящее прямую ℓ в бесконечно удаленную и окружность S в себя, переводит полюс прямой ℓ в центр окружности S.

3. (Теорема Дезарга.) Рассмотрим два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ на плоскости. Докажите, что точки пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2; B_1C_1 и B_2C_2; A_1C_1 и A_2C_2 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 проходят через одну точку.

4. (Теорема о дважды перспективных треугольниках.) Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке O, и прямые AB_1, BC_1 и CA_1 пересекаются в одной точке O_1. Докажите, что прямые AC_1, BA_1 и CB_1 тоже пересекаются в одной точке O_2.

5. Докажите теорему о бабочке при помощи проективного преобразования.

6. На окружности ω взяты точки A, B, C и D в указанном порядке. Пусть O — точка пересечения отрезков AC и BD, а ω_1 и ω_2 — окружности, описанные около треугольников AOB и COD соответственно. Прямая ℓ проходит через точку O пересекает окружность ω в точках M и N, окружность ω_1 — в точке P и окружность ω_2 —



в точке Q. Докажите, что $PM = NQ$.

(См. рис.; можно считать, что $\angle AOB$ острый, а прямая ℓ проходит между его сторонами).

Разнобой. 21.07.2008

1. Решите в натуральных числах уравнение а) $3^m - 2^n = 1$; б) $2^n - 3^m = 1$.

2. На плоскости даны несколько точек, расстояние между любыми двумя из которых не превосходит 1. Докажите, что их можно покрыть кругом радиуса $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Рассмотрим уравнение $x^n + y^n = z^n$, где n — нечетное число, большее 1. Предположим, что $x + y = p \in \mathbb{P}$. а) Докажите, что это при этом предположении уравнение не имеет натуральных решений. б) Докажите, что оно также ни имеет целых решений, взаимно простых с p.

4. Пусть $p \in \mathbb{P}$. Найдите остаток от деления на p числа $1^n + 2^n + \cdots + (p-1)^n$.

5. На плоскости проведены 3000 прямых общего положения. Докажите, что среди частей, на которые они делят плоскость есть не менее а) 1000; б) 2000 треугольников.

6. (Теорема Турана.) Найдите наиюбольшее возможное количество ребер в графе на v вершинах, не содержащем подграфа K_n (полного подграфа на n вершинах).

Гауссовы числа. 21-22.07.2008

Определение 1. *Гауссовыми числами* называются комплексные числа $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{Z}$. Кольцо гауссовых чисел обозначается $\mathbb{Z}[i]$.

Определение 2. *Нормой* гауссова числа $\alpha = a + bi$ называется число $N(\alpha) = \alpha\overline{\alpha} = a^2 + b^2$.

Определение 3. Гауссово число α *делится* на гауссово число β, если $\beta \neq 0$ и существует гауссово число γ такое, что $\alpha = \beta\gamma$.

Определение 4. Гауссово число α называется *простым*, если оно имеет ровно 8 делителей: ± 1, $\pm i$, $\pm\alpha$, $\pm i\alpha$.

1. Докажите, что для любых гауссовых чисел α и β, где $\beta \neq 0$, существуют гауссовы числа γ и δ такие, что $\alpha = \beta\gamma + \delta$ и $N(\delta) < N(\beta)$.

2. Найдите (3+8i,7-5i).

Основная теорема арифметики для гауссовых чисел. Любое ненулевое гауссово число можно разложить в произведение простых гауссовых чисел, причем это разложение единственно с точностью до порядка сомножителей и домножения на обратимые элементы кольца $\mathbb{Z}[i]$ (т. е. ± 1, $\pm i$).

3. а) Докажите, что любое целое простое число p является либо простым гауссовым числом, либо имеет разложение $p = (a + bi)(a - bi)$, где $a \pm bi$ — простые гауссовы числа. б) Пусть p — простое число вида $4k+3$. Докажите, что p является простым гауссовым числом. в) Пусть p — простое число вида $4k+1$. Докажите, что существуют натуральные числа a и b такие, что $a, b \not\vdots\, p$ и $a^2 + b^2 \vdots\, p$. г) Пусть p — простое число вида $4k+1$. Докажите, что в кольце гауссовых чисел число p является составным и имеет разложение на множители вида $p = (a + bi)(a - bi)$. д) Докажите, что простое гауссово число может быть либо натуральным простым числом вида $4k+3$, либо числом $a+bi$, где a^2+b^2 — простое число вида $4k+1$ или 2 (точнее говоря, любое простое гауссово число может быть получено из указанных выше чисел домножением на ± 1 или $\pm i$).

4. а) При помощи предыдущей задачи выясните, какие простые числа могут быть представлены в виде суммы двух точных квадратов. б) А какие натуральные числа можно представить в виде суммы двух точных квадратов?

5. а) **(Лемма Туэ.)** Пусть $n > 1$ — натуральное число. Тогда для каждого натурального a, взаимно простого с n, существуют такие натуральные $x \le \sqrt{n}$, $y \le \sqrt{n}$, что $ay \equiv \pm x \pmod{n}$. б) При помощи леммы Туэ докажите, что любое простое число вида $4k+1$ представимо в виде суммы двух точных квадратов.

Геометрический разнобой. 22.07.2008

1. Пусть M, N — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC и BA, K — точка пересечения биссектрисы угла A с прямой MN. Докажите, что $\angle AKC = 90^\circ$.

2. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ взята точка P. В треугольники PAB, PBC, PCD, PDA вписаны окружности с центрами O_1, O_2, O_3, O_4 соответственно. Оказалось, что каждая из этих окружностей касается двух соседних. Докажите, что прямые O_1O_2, O_3O_4, AC пересекаются в одной точке или параллельны.

3. Окружность пересекает прямые BC, CA, AB в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2. Пусть ℓ_a — прямая, соединяющая точки пересечения прямых BB_1 и CC_2, BB_2 и CC_1; прямые ℓ_b и ℓ_c определяются аналогично. Докажите, что прямые ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c пересекаются в одной точке (или параллельны).

4. Серединный перпендикуляр к стороне AB треугольника ABC пересекает прямую BC в точке C_1, а серединный перпендикуляр к BC прямую AB в точке A_1. Прямые AC_1 и CA_1 пересекаются в точке B_2. Точки A_2 и C_2 определяются аналогично. Докажите, что точки A_2, B_2, C_2 лежат на одной прямой. докажите, что

5. Пусть M и N — проекции ортоцентра треугольника ABC на биссектрисы внутреннего и внешнего угла B. Докажите, что прямая MN делит сторону AC пополам.

Заключительная олимпиада. 23.07.2008

Довывод

1. Сумма двух натуральных чисел равна 1001. Может ли их произведение делиться на 1001?

2. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B. На стороне AC отмечена точка D. Полуокружность, построенная на отрезке AD как на диаметре, касается стороны BC в точке M. Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.

3. В клетках полоски 1×40 расставлены 20 крестиков и 20 ноликов. За один ход можно поменять местами любые два соседних знака. За какое наименьшее число ходов можно гарантированно сделать так, чтобы все крестики стояли подряд.

4. Дано n ящиков и nk предметов, раскрашенных в n цветов ($n, k \in \mathbb{N}$). Всегда ли можно поместить в каждый ящик ровно по k предметов так, чтобы в каждом ящике лежали предметы не более чем двух цветов.

5. Существует ли бесконечная последовательность простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ такая, что $p_{k+1} = 2p_k \pm 1$?

Вывод

6. Многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ таков, что $f(1) = f(2) = 0$. Докажите, что у него есть коэффициент, меньший -1.

7. В секретной службе 16 агентов, каждый из которых следит за некоторыми из своих коллег. Известно, что если агент A следит за агентом B,

то B не следит за A. Оказалось, что любых 10 агентов можно пронумеровать так, чтобы первый следил за вторым, второй — за третьим, ..., десятый — за первым. Докажите, что существуют 11 агентов, которых можно пронумеровать так, чтобы первый следил за вторым, второй — за третьим, ..., одиннадцатый — за первым.

8. Окружность ω_1 описана около остроугольного треугольника ABC. Точка A' диаметрально противоположна точке A. Окружность ω_2 касается отрезков AB, AC и дуги BC окружности ω_1, не содержащей точки A. Прямая CA' пересекается с биссектрисой угла BAC в точке N. Докажите, что длина отрезка $A'N$ равна длине отрезка касательной, проведенной из точки A' к окружности ω_2.