Двадцать шестая Летняя многопредметная школа Кировской области

Вишкиль. 3-28.VII.2010 г.

ЛМШ—2010

Математика — 9

материалы занятий обычных групп

Преподаватели:

Баева Любовь Владимировна

Пономарева Ирина Николаевна

Семенов Александр Николаевич

Семенова Ирина Александровна

Атучин Михаил Михайлович

Ефремов Руслан Сергеевич

Пикалов Павел Сергеевич

Хамидулин Андрей Геннадьевич

Оглавление

Вступительный тест 3 июля

1. Выполните деление $\frac{1+i}{1-i}$.
2. Нарисуйте множество: $1 < |z - 3i| < 2$.
3. Найдите функцию $f(x)$, если $2f(x) + f(-x) = x - 2$.
4. Решите уравнение: $2x^3 + 5x^2 - x - 1 = 0$.
5. Существует ли взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел и множеством нечетных отрицательных. Ответ обоснуйте.
6. Найдите $\sin 75^\circ$.
7. Какое преобразование переводит треугольник *ABC* в треугольник образованный серединами сторон.
8. Известно, что $x^{2010} + x^{256} + 1 = f(x)(x - 3) + a$, где $f(x)$ — многочлен и a — число. Найдите a.
9. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, а M — середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC. Укажите все равные отрезки с концами в указанных точках.

10. Опишите ГМТ центров окружностей ортогональных двум данным неконцентрическим окружностям.

Вступительная олимпиада 4 июля

11. Найдутся ли такие четыре различных натуральных числа, что сумма любых двух из них является степенью тройки?
12. Числа p и q целые. Известно, что неравенство $x^2 + px + q \le 0$ не имеет целых решений. Докажите, что у него нет и действительных решений.
13. Последовательность a0, a1, a2,… такова, что $a_{m+n} + a_{m-n} = (a_{2m} + a_{2n})/2$ для любых целых $m \ge n \ge 0$. Кроме того, $a_1 = 1$. Найдите a_{1000}.
14. Сиденья карусели раскрашены в n цветов так, что для каждых двух различных цветов число пар соседних сидений этих цветов одно и то же. При каком наименьшем числе сидений это возможно?
15. На высоте BH остроугольного треугольника ABC выбрана точка M. Точки P и Q лежат на сторонах AB и BC соответственно, причем $\angle PMC = \angle QMA = 90^\circ$. Докажите, что PQ и AC параллельны.
16. В записи точного квадрата более миллиона цифр. Сколько, самое меньшее, среди этих цифр может быть четных?

Вступительное занятие 4 июля

Задача. Найти последовательность наибольшей длины такую, что сумма любых p последовательных ее членов положительна, а сумма любых q последовательных — отрицательна.

1. Рассмотрите (p,q) =(2,3), (2,7), (3,5).

2. Пусть $p > q$. Докажите, что если существует последовательность длины s для пары (p,q), то существует последовательность длины $s–q$ для $(p–q,q)$.

3. Что окажется в конце применения таких операций.

4. Докажите, что последовательностей длины p+q–НОД(p,q) не существует.

Попробуем построить пример длины p+q–НОД(p,q)–1.

5. Пусть такой пример для p и q имеется. Постройте тогда пример для pd и qd. Далее будем считать p и q взаимно простыми.

Сопряжение 5 июля

Определение. Рассмотрим числа вида $z = a + b\sqrt{p}$, где a и b - рациональные числа, а p - рациональное, не квадрат. Назовем их, например, *хорошими*.

1. Докажите, что различным парам a и b соответствуют различные хорошие числа (при одном и том же p).

2. Покажите, что числа $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \times z_2$ и z_1/z_2 также являются хорошими.

Определение. Назовем число $a - b\sqrt{p}$ сопряженным к числу $a + b\sqrt{p}$. Обозначим $a - b\sqrt{p} = \overline{a + b\sqrt{p}}$.

3. Докажите, что

а) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;

б) $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$;

в) $\overline{z_1^n} = \overline{z_1}^n$;

г) $\overline{z_1 / z_2} = \overline{z_1} / \overline{z_2}$.

4. Докажите, что если $a + b\sqrt{p}$ - корень многочлена с целыми коэффициентами, то $a - b\sqrt{p}$ также является корнем этого многочлена.

5. Докажите, что уравнение $(x + y\sqrt{5})^4 + (z + t\sqrt{5})^4 = 2 + \sqrt{5}$ не имеет решений в рациональных числах x, y, z, t.

6. Докажите, что ни для каких натуральных чисел k и n равенство $(3 + 5\sqrt{2})^k = (5 + 3\sqrt{2})^n$ не может выполняться.

7. Докажите, что ни для каких натуральных чисел k и n равенство $(3 + 7\sqrt{2})^k = (7 + 3\sqrt{2})^n$ не может выполняться.

8. Определите цифры в разрядах десятых и сотых в десятичной записи числа $(5 + 2\sqrt{6})^{2009}$.

9. Докажите, что $(5 + \sqrt{17})^n + (5 - \sqrt{17})^n$ делится на 2^n, но не делится на 2^{n+1}.

Для самостоятельного решения.

10. Определите первые десять цифр после запятой в десятичной записи числа $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2008}$.

11. Определите первые сто цифр после запятой в десятичной записи числа $(7 + \sqrt{50})^{2009}$.

12. Пусть $(1+\sqrt{2})^n = a + b\sqrt{2}$. Докажите, что $a^2 - 2b^2 = (-1)^n$.

Теорема Чевы 5 июля

1. (*Тригонометрическая теорема Чевы*) На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что AA_1, BB_1 и CC_1 конкурентны тогда и только тогда, когда выполняется $\frac{\sin ABB_1}{\sin B_1BC}\frac{\sin BCC_1}{\sin C_1CA}\frac{\sin CAA_1}{\sin A_1AB} = 1$.
2. Внутри треугольника ABC выбрана точка P. Докажите, что существует точка Q такая что лучи AP и AQ, BP и BQ, CP и CQ симметричны относительно биссектрис углов A, B и C соответственно.
3. Луч делит угол на два угла с градусной мерой α и β. Докажите, что этот луч можно восстановить по величине $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.
4. Внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием AB взяты точки M и N так, что $\angle CAM = \angle ABN$ и $\angle CBM = \angle BAN$. Докажите, что точки C, N и M лежат на одной прямой.
5. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены правильные треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 конкурентны.
6. Через точки A и D, лежащие на окружности, проведены касательные, пересекающиеся в S. На дуге AD взяты точки B и C. Прямые AC и BD пересекаются в точке P, а AB и CD - в точке Q. Докажите, что точки S, P и Q лежат на одной прямой.

7. В треугольнике ABC выбрана точка X. Прямая AX пересекает описанную окружность ABC в точке A_1. Окружность касается изнутри дуги BC в точке A_1 и стороны BC в точке A_2. Аналогично определяются точки B_2 и C_2. Докажите, что AA_2, BB_2 и CC_2 конкурентны.

Для самостоятельного решения

8. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ $\angle BAC = \angle EAF$, $\angle DCE = \angle BCA$, $\angle AEF = \angle DEC$. Докажите, что прямые AD, BE, CF конкурентны.
9. XA, XB - касательные к окружности из точки X. C - точка на окружности. Докажите, что $\frac{\sin AXC}{\sin CXB} = \frac{AC^2}{CB^2}$.

10. Вписанная окружность касается сторон AB, BC, CA треугольника ABC в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. На дугах A_1C_1, C_1B_1, B_1A_1 выбраны точки B_2, A_2, C_2 соответственно. Докажите, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 конкурентны тогда и только тогда, когда прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 конкурентны.

Гомотетия   6 июля

Определение. *Гомотетией* с центром O и коэффициентом $k\neq 0$ называется преобразование плоскости, которое каждую точку X отображает в такую точку X', что $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$. Гомотетию обозначают H_O^k.

Свойства гомотетии.

а) При гомотетии все расстояния изменяются в $|k|$ раз.

б) Гомотетия переводит прямую в параллельную ей прямую, окружность в окружность.

в) Гомотетия сохраняет направленные углы.

г) Гомотетия имеет единственную неподвижную точку.

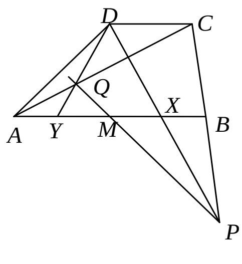
Упражнения

1. Каким преобразованием является гомотетия с коэффициентом k=1, –1?
2. Докажите, что композиция двух гомотетий с общим центром и коэффициентами k_1 и k_2 является гомотетией с тем же центром и коэффициентом k_1k_2.
3. а) есть 2 параллельных неравных отрезка. Найдите все гомотетии, переводящие один в другой.

   б) есть 2 неравные неконцентрические окружности. Вопрос тот же, что и в пункте а).

Задачи

4. Некоторое преобразование плоскости любой вектор $\bar{a}$ переводит в вектор $k\bar{a}$ при фиксированном k. Докажите, что если $k\neq 1$, то это гомотетия.
5. Пусть O_1 и O_2 – две точки. Докажите, что при $k_1k_2\neq 1$ композиция $H_{O_2}^{k_2} \circ H_{O_1}^{k_1}$ - гомотетия, найдите ее центр и коэффициент. Какое преобразование будет при $k_1k_2=1$?
6. Некоторое преобразование плоскости изменяет все расстояния в k раз, т.е. $A_1B_1=kAB$ для любых двух точек A и B (A_1 и B_1 – их образы). Докажите, что это преобразование является композицией некоторого движения и гомотетии.
7. ***Теорема о трех колпаках.*** На плоскости даны три непересекающиеся окружности разных радиусов, ни одна из которых не лежит внутри другой. Для каждой пары окружностей отметили точку пересечения их общих внешних касательных. Докажите, что три полученные точки лежат на одной прямой. Можно ли заменить некоторые пары внешних касательных на внутренние?
8. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD. Произвольная точка P прямой BC, отличная от точек B и C, соединена с вершиной D и с серединой M основания AB. Пусть X – точка пересечения AB и PD, Q – точка пересечения AC и PM, Y – точка пересечения AB и DQ. Докажите, что M – середина XY.



9. Три окружности одинаковых радиусов вписаны в углы A, B, C треугольника ABC. Четвёртая окружность касается внешним образом всех этих трёх окружностей. Доказать, что её центр лежит на прямой, проходящей через центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC.

Для самостоятельного решения

10. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке D, DM – ее диаметр. Прямая BM пересекает сторону AC в точке K. Докажите, что $AK=DC$.
11. Трапеции $ABCD$ и $APDQ$ имеют общее основание AD, причем длины всех их оснований попарно различны. Докажите, что точки пересечения AB и CD, AQ и DP, BQ и CP лежат на одной прямой.
12. В каждый угол треугольника ABC вписана окружность, касающаяся описанной окружности внутренним образом. Пусть A_1, B_1, C_1 – точки касания этих окружностей с описанной окружностью. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

Комплексные числа 6 июля

Определение. Комплексные числа — это числа вида $a+bi$, где a и b — действительные числа, а число i таково, что $i^2=-1$. При этом a называется действительной частью числа $z=a+bi$ (обозначается $\operatorname{Re} z$), а b — мнимой (обозначается $\operatorname{Im} z$).

1. Докажите, что комплексные числа z_1 и z_2 равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части.
2. Убедитесь, что комплексные числа замкнуты относительно сложения, вычитания, умножения и деления (не на нуль).

Определение. Два комплексных числа называются сопряженными, если они отличаются только знаком мнимой части. Обозначение сопряжения вам уже знакомо.

3. Вычислите:

а) $(3+5i)-(1-2i)$; б) $(1+2i)(3-4i)$; в) $\dfrac{2+3i}{-i}$; г) $\dfrac{8-27i}{2+3i}$; д) $(\sqrt{2}-i^n)(\sqrt{2}+i^n)$;

е) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2010}$.

4. Убедитесь, что выполняются следующие свойства комплексно сопряженных чисел:

а) $\bar{\bar{z}}=z$;

б) $\bar{z}+z$, $\bar{z}z$ – действительные числа;

в) $\overline{(z_1 \pm z_2)}=\overline{z_1} \pm \overline{z_2}$;

г) $\overline{(z_1 z_2)}=\bar{z}_1\bar{z}_2$; д) $\overline{z^n}=\bar{z}^n$;

е) $\overline{1/z}=1/\bar{z}$; ж) $\overline{(z_1/z_2)}=\overline{z_1}/\overline{z_2}$.

5. Найдите все такие числа z, что а) $z=\bar{z}$; б) $z=-\bar{z}$.
6. Докажите, что если z — комплексный корень многочлена с действительными коэффициентами, то $\bar{z}$ – тоже его корень.
7. Найдите многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, корнем которого является $a+bi$.

8. Существует ли многочлен пятой степени с действительными коэффициентами, среди корней которого есть числа $2 - i$, 2, $1 + 2i$?

Определение. Корнем n-ой степени из комплексного числа z называется комплексное число w такое, что $w^n = z$.

9. Вычислите $\sqrt{3-4i}$.
10. Решите в комплексных числах уравнение:
а) $x^2 = i$; *б)* $x^4 = 1$; *в)* $x^2 - (2 + i)x + 2i = 0$.

Комплексная плоскость 6 июля

Поставим в соответствие каждому комплексному числу $x + yi$ точку (x,y) на координатной плоскости.

1. Изобразите на комплексной плоскости: а) $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$; б) $\mathrm{Re}(z) < 1$; в) $\mathrm{Re}(z^2) = 0$.

По какому правилу складываются комплексные числа на комплексной плоскости?

Модулем комплексного числа $z = x + yi$ (обозначается $|z|$) называется длина вектора $\overline{OZ}$, вычисляемая по формуле $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Докажите: $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.
3. Докажите, что $|z_1 - z_2|$ — это расстояние между точками z_1 и z_2.
4. Докажите: $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.
5. Докажите: $|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|$.
6. Докажите: $|1/z| = 1/|z|$.

Определение. Аргументом ненулевого комплексного числа z (обозначается $\arg z$) называется ориентированный угол между положительным направлением действительной оси и вектором $\overline{OZ}$. Для числа $z = 0$ аргумент не определен. Значения аргумента данного комплексного числа определяется неоднозначно, но все они отличаются на слагаемое $2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

7. Изобразите на комплексной плоскости числа 1, i, i^2, $1 + i$, $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)i$. Найдите их модули и аргументы.
8. Модуль комплексного числа равен 2, а аргумент $-930°$. Найдите его действительную и мнимую части.
9. Какое преобразование комплексной плоскости задается формулой $f(z) = \bar{z}$?
10. Какое преобразование комплексной плоскости задается формулой $f(z) = z + z_0$, где z_0 — константа?
11. Какое преобразование комплексной плоскости задается формулой $f(z) = az$, где a — действительное?
12. Какое преобразование комплексной плоскости задается формулой $f(z) = 1/z$.
13. Изобразите на комплексной плоскости множества:
а) $|z| = 1$; б) $z \cdot \bar{z} = 2$; в) $|z| = \mathrm{Re}\, z$; г) $\arg(z - 2) = \pi$; д) $|z - 5| > 2$;
е) $1 < |z - 1 + i| \le 3$; ж) $|z - i| = |z - 2i + 3|$.

Для самостоятельного решения

1. Вычислить: а) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{2010}$; б) $\sqrt[3]{-2+2i}$.
2. На комплексной плоскости найти множество точек, удовлетворяющих условию:

а) $\mathrm{Im}(z^2) = 0$; б) $\mathrm{Im}(z^2) = \mathrm{Im}(z)$; в) $\mathrm{Re}(z^2) = \mathrm{Im}(z)$; г) $\mathrm{Im}\frac{1}{z} < -\frac{1}{2}$; д) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| < 1$; е) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| < 2$;

ж) $|z - i| > |z+1|$; з) $\begin{cases} \mathrm{Re}\, z > 1 \\ |z-2| < 3 \end{cases}$?

Тригонометрическая форма комплексных чисел 7 июля

Определение. Запись $|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой записи* комплексного числа z.

Два ненулевых комплексных числа равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а аргументы отличаются на угол, кратный 2π.

1. Запишите комплексные числа в тригонометрической форме:

а) $\sqrt{5}\cos(\pi/\sqrt{5}) - i\sqrt{5}\sin(\pi/\sqrt{5})$; б) $-3(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)$; в) $\dfrac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi}$.

2. Пусть $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Найдите произведение и частное этих комплексных чисел. Сделайте вывод.

3. Выведите формулу для вычисления z^n. (Она называется *формулой Муавра*.)

4. Вычислите $\dfrac{(1-i)^7(-\sqrt{3}+i)^{10}}{(1+i)^{15}}$, используя тригонометрическую форму.

5. Запишите в тригонометрической форме какое-нибудь число $z \neq 1$, являющееся корнем 2009-ой степени из 1.

6. Выведите формулу, которая позволяет вычислить все корни n-ой степени из данного числа z.

7. Докажите, что все корни n-ой степени из комплексного числа z являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат.

8. Найдите все значения корней: а) $\sqrt{-i}$; б) $\sqrt[4]{-1}$; в) $\sqrt[3]{1}$.

9. Чему равна сумма всех корней а) 6-ой степени из 1; б) 3-ей степени из 1; в) n-ой степени из 1?

10. Какое преобразование плоскости задает умножение на комплексное число z_0?

11. Запишите формулу поворота на угол α вокруг точки z_0.

Для самостоятельного решения

12. Вычислите: а) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{i\sqrt{2}}{2}\right)^n$; б) $\sqrt[3]{-i}$.

13. При каких значениях a среди комплексных чисел z таких, что $|z-2-2i| \le a$, найдётся ровно одно такое, что $z^3 \in \mathbf{R}$?

14. Множество M содержит все комплексные числа вида $z = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$, где $0 \le \varphi \le \pi$. Изобразите множество T комплексных чисел ω, где $\omega = \bar{z} \cdot \dfrac{1-3i}{1+2i}$, причём z пробегает множество M.

Теорема Чевы 2 — 7 июля

1. В квадрате $ABCD$ выбрана точка P, так что треугольник ABP – равнобедренный с углом при вершине 150º. Найдите $\angle CPD$.
2. Докажите, что в правильном многоугольнике $A_1A_2...A_{2n}$ диагонали A_1A_{n+2}, $A_{2n-1}A_3$ и $A_{2n}A_5$ пересекаются в одной точке.
3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC угол при вершине A равен 100º. Внутри треугольника ABC взята точка M так, что $\angle MBC = 20^\circ$ и $\angle MCB = 10^\circ$. Найдите величину угла BAM.
4. В треугольнике ABC углы при вершинах B и C равны 40º. BD – биссектриса угла B. Докажите, что $BD + DA = BC$.
5. Пусть $\alpha = \dfrac{\pi}{7}$. Докажите, что $\dfrac{1}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{\sin 2\alpha} + \dfrac{1}{\sin 3\alpha}$.
6. В треугольнике ABC точка E - середина стороны BC, точка D лежит на стороне AC, $AC = 1$, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ABC = 100^\circ$, $\angle ACB = 20^\circ$ и $\angle DEC = 80^\circ$. Чему равна сумма площади треугольника ABC и удвоенной площади треугольника CDE.
7. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол при вершине B равен 20º. На сторонах BC и AB взяты точки D и E соответственно так, что $\angle DAC = 60^\circ$ и $\angle ECA = 50^\circ$. Найдите угол ADE.

Для самостоятельного решения

8. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC угол при вершине A равен 80º. Внутри треугольника ABC взята точка M так, что $\angle MBC = 30^\circ$ и $\angle MCB = 10^\circ$. Найдите величину угла AMC.

9. В треугольнике ABC $\angle ABC = 30^\circ$, $\angle ACB = 20^\circ$. На стороне BC выбирается точка D так, что $\angle ADC = 80^\circ$. На стороне AC отмечается точка E так что $BD = CE$. Найдите $\angle EBC$.

Комплексные числа и геометрия — 9 июля

1. Пусть z_1, z_2 — комплексные числа. Дайте геометрическое описание множеств всех чисел z, удовлетворяющих соотношениям: а) $\arg\dfrac{z-z_1}{z-z_2} = 0$; б) $\arg\dfrac{z_1-z}{z-z_2} = 0$.

<u>Определение.</u> *Комплексное число* $V(z_2, z_1, z_0) = \dfrac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$ *называется* ***<u>простым</u>*** ***<u>отношением трех точек</u>*** (***<u>трех комплексных чисел</u>***) z_2, z_1, z_0.

2. **Критерий коллинеарности трех точек.** Докажите, что три точки z_2, z_1, z_0 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $V(z_2, z_1, z_0)$ — вещественное число, или, что то же самое, $\dfrac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = \dfrac{\bar{z}_2 - \bar{z}_0}{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}$.
3. Убедитесь, что уравнение любой прямой можно записать в виде $Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0$, где C — чисто мнимое, и в виде $B'z + \bar{B}'\bar{z} + C' = 0$, где C' — действительное. Верно и обратное при $B \neq 0 \neq B'$.
4. Докажите, что направленный угол между векторами $\overrightarrow{Z_0Z_1}$ и $\overrightarrow{Z_0Z_2}$ равен аргументу отношения $V(z_2, z_1, z_0)$.
5. Докажите, что уравнение касательной, проходящей через точку p центральной окружности, имеет вид $p\bar{z} + z\bar{p} = 2p\bar{p}$.
6. Докажите, что касательные, проходящие через точки a и b центральной окружности, пересекаются в точке $z = \dfrac{2ab}{a+b}$.
7. **Теорема Ньютона**. Докажите, что в описанном около окружности четырехугольнике середины диагоналей коллинеарны с центром окружности.

Для самостоятельного решения

8. **Прямая Эйлера.** Центр масс M треугольника лежит между ортоцентром H и центром O описанной окружности, причем $2OM = MH$. (Возьмите хорошую окружность, вспомните центр масс, поймите каким должен быть ортоцентр и докажите, что он такой и есть.)
9. Докажите, что прямые, проходящие через точки a и b, c и d центральной окружности, параллельны при $ab = cd$ и перпендикулярны при $ab + cd = 0$.

Комплексные числа и преобразования плоскости

9 июля

1. Какие преобразования комплексной плоскости задают функции: а) $z' = \bar{z}$; б) $z' = z + z_0$; в) $z' = \varepsilon_\alpha z$, где через $\varepsilon_\alpha = \cos\alpha + i\sin\alpha$; г) $z' = rz$, где r — действительное число; д) $z' = z_0 z$, где z_0 — комплексное число?
2. Как с помощью комплексных чисел задать
   а) поворот на угол α вокруг произвольной точки z_0 комплексной плоскости;
   б) поворотную гомотетию с центром z_0, углом α и коэффициентом k ($k > 0$)?
3. Докажите с помощью комплексных чисел, что а) композиция двух центральных симметрий есть параллельный перенос; б) композиция двух поворотов есть поворот, если сумма углов поворотов не кратна 360°, и перенос, если кратна; в) композиция двух гомотетий есть гомотетия или параллельный перенос.

4. Докажите, что преобразование комплексной плоскости является подобием тогда, и только тогда, когда оно задается формулой $z' = az + b$ (сохраняющее ориентацию) или $z' = a\bar{z} + b$ (меняющее ориентацию), где $a \neq 0$ и b — комплексные числа.
5. Какие в предыдущем пункте получаются преобразования в зависимости от a и b? Выразите их параметры через a и b.
6. Когда подобие имеет неподвижные точки? Найдите их.

Для самостоятельного решения

7. Докажите, что композиция двух поворотных гомотетий есть либо параллельный перенос, либо поворотная гомотетия.

Функциональные уравнения 9 июля

Во всех задачах, если явно не указано, требуется найти все функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, удовлетворяющие заданным условиям при любых действительных значениях переменных.

1. При каких значениях a, b, c функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ удовлетворяет условию $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$.
2. $f(x+y) = f(x)\cos y - f(y)\sin x$.
3. $f((x+y)^2) = f(x^2) + f(y^2) + 2xy$.
4. $xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y)$.
5. $xf(x) + f(-\frac{1}{x}) = 2,\ x \neq 0$.
6. Найдите две функции удовлетворяющие $f(f(x)) = f(x) + x$.
7. $f(x) \leq x,\ f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.
8. $f(x+2) \leq f(x) \leq f(x+3)$. Докажите, что $f(x)$ — периодическая функция.
9. Функция f такова, что для любых положительных x, y выполняется $f(xy) = f(x) + f(y)$. Найдите $f(2010)$, если $f\left(\frac{1}{2010}\right) = 1$.
10. $f^2(x+y) = f^2(x) + f^2(y)$.

Для самостоятельного решения

11. При всех $a, b \in \mathbf{R}$, кроме случая $a = b = 1$, найдите все функции f, для которых $f(xy) = f(x)ay + f(y)bx$.
12. $2f(x) + f(1-x) = x^2$.
13. Для каких γ существует ненулевая функция такая, что $f(\gamma(x+y)) = f(x) + f(y)$.

Комплексные числа и правильные многоугольники

10 июля

8. Докажите: если O — центр правильного n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$, то $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$.
9. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки P плоскости до всех вершин правильного n-угольника равна $n(R^2+d^2)$, где R — радиус описанной окружности, а d — расстояние от точки P до ее центра.
10. Следствие 1. Сумма квадратов расстояний от произвольной точки P описанной окружности правильного n-угольника до всех его вершин равна $2nR^2$, где R — радиус окружности.
11. Следствие 2. Сумма квадратов длин всех сторон и всех диагоналей правильного n-угольника равна n^2R^2, где R — радиус описанной окружности.
12. В многоугольнике $Z_1Z_2\ldots Z_n$ каждую вершину Z_k отразили относительно Z_{k+1}, получая при этом A_k (индексы считаем зацикленными). Полученный многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ оказался правильным. Докажите, что исходный многоугольник тоже был правильным.

Комплексные числа и алгебра 10 июля

13. Через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ выразите каждое из чисел $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$.

В следующих задачах вычислите суммы.

14. а) $\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\ldots$; б) $\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\ldots$.
15. $\binom{n}{1}-\frac{1}{3}\binom{n}{3}+\frac{1}{9}\binom{n}{5}-\ldots$.
16. а) $\cos\varphi+\ldots+\cos n\varphi$; б) $\sin\varphi+\ldots+\sin n\varphi$.
17. а) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\ldots+\cos^2 nx$; б) $\sin^2 x+\sin^2 2x+\ldots+\sin^2 nx$.

Для самостоятельного решения

18. Докажите, что длина стороны правильного девятиугольника равна разности длин его наибольшей и наименьшей диагоналей.
19. $S_0=\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\ldots$, $S_1=\binom{n}{1}+\binom{n}{5}+\binom{n}{9}+\ldots$,
$S_2=\binom{n}{2}+\binom{n}{6}+\binom{n}{10}+\ldots$, $S_3=\binom{n}{3}+\binom{n}{7}+\binom{n}{11}+\ldots$.
20. а) $\cos 0+\binom{n}{1}\cos\varphi+\ldots+\binom{n}{n}\cos n\varphi$; б) $\sin 0+\binom{n}{1}\sin\varphi+\ldots+\binom{n}{n}\sin n\varphi$.

Поворотная гомотетия 10 июля

1. Докажите, что центр поворотной гомотетии, переводящей точку A в A_1, а точку B в B_1, совпадает с центром поворотной гомотетии, переводящей точку A в B, а точку A_1 в B_1.
2. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, пересекающая окружности в точках P_1 и P_2. Докажите, что при поворотной гомотетии вокруг точки B, переводящей S_1 в S_2, точка P_1 переходит в P_2.
3. а) Пусть P – точка пересечения прямых AA_1 и BB_1. Доказать, что если среди точек A, B, A_1, B_1 и P нет совпадающих, то вторая общая точка описанных окружностей треугольников PAB и PA_1B_1 является центром поворотной гомотетии, переводящей точку A в A_1, а точку B в B_1, причем такая поворотная гомотетия единственна.

б) Докажите, что центром поворотной гомотетии, переводящей точку A в B, а точку B в C, является точка пересечения окружности, проходящей через точку A и касающейся прямой BC в точке B, и окружности, проходящей через точку C и касающейся прямой AB в точке B.

4. Даны два правильных пятиугольника с общей вершиной. Вершины каждого пятиугольника нумеруются цифрами от 1 до 5 по часовой стрелке, причем в общей вершине ставится 1. Вершины с одинаковыми номерами соединены прямыми. Доказать, что полученные четыре прямые пересекаются в одной точке.
5. ***Точка Микеля.*** Даны 4 прямые общего положения. Докажите, что 4 описанные окружности вокруг треугольников, образованных этими прямыми, имеют общую точку.
6. Боковые стороны AD и BC трапеции $ABCD$ повернуты около своих середин на угол 90°, после чего они занимают положение A_1D_1 и B_1C_1. Докажите, что $A_1B_1 = C_1D_1$.
7. Точки M и N лежат на сторонах AB и BC квадрата $ABCD$, причем $MB = BN$. Точка H – основание высоты, опущенной из точки B на отрезок MC. Докажите, что $\angle NHD = 90°$.

Для самостоятельного решения

8. Построить квадрат $ABCD$ так, чтобы вершина A находилась в данной точке, а вершины B и C принадлежали данной окружности.
9. Две окружности пересекаются в точках A и B, а хорды AM и AN касаются этих окружностей. Треугольник MAN достроен до параллелограмма $MANC$. Пусть P – середина отрезка BN, а Q – середина отрезка MC. Докажите, что $\angle APQ = \angle ANC$.
10. Окружности $S_1, S_2, \ldots, S_n$ проходят через точку O. Кузнечик из точки X_i окружности S_i прыгает в точку X_{i+1} окружности S_{i+1} так, что прямая X_iX_{i+1} проходит через точку пересечения окружностей S_i и S_{i+1}, отличную от точки O. Доказать, что после n прыжков (с окружности S_1 на S_2, с S_2 на $S_3, \ldots$, с S_n на S_1) кузнечик вернется в исходную точку.

Гауссовы числа 11 июля

Определения. Рассмотрим комплексные числа $x+iy$, где x и y — целые числа. Такие числа называются *гауссовыми*. *Нормой* $N(z)$ гауссова числа z называется квадрат его модуля. Для гауссовых чисел a и $b \neq 0$ говорят, что a *делится* на b, если $a = bc$ для некоторого гауссова числа c. Гауссово число p называется *обратимым*, если $1/p$ является гауссовым. Два гауссовых числа называются *ассоциированными*, если они отличаются обратимым множителем. Гауссово число называется *простым*, если у него ровно два делителя с точностью до ассоциированности. Необратимые и не простые гауссовы числа называются *составными*. Два гауссова числа называются *взаимно простыми*, если у них нет общих делителей, кроме обратимых.

1. Гауссовы числа замкнуты относительно сложения и умножения.
2. Найти все такие гауссовы числа a такие, что а) $N(a) = 0$, б) $N(a) = 1$, в) $N(a) = 3$.
3. Докажите для любых гауссовых a и b соотношение $N(ab) = N(a)N(\mathrm{b})$.
4. Докажите, что произведение двух натуральных чисел, представимых в виде суммы квадратов двух целых чисел, представимо таким же образом.
5. Найти все обратимые гауссовы числа.
6. Докажите, что составное натуральное число не является простым гауссовым.
7. Доказать, что гауссово число, сопряжённое к простому, само является простым.
8. Какие из следующих гауссовых чисел являются простыми, а какие составными:

а) $2+4i$, б) $1+i$, в) $1+7i$?

9. Доказать, что для любых гауссовых чисел a и $b \neq 0$ найдутся гауссовы p и q такие, что $a = bp + q$ и $N(q) < N(b)$.
10. (*Алгоритм Евклида*) Доказать, что для взаимно простых гауссовых a и b найдутся u и v такие, что $au + bv = 1$. Верно и обратное.
11. Если ab делится на p, где p – простое, то хотя бы одно из a и b делится на p.
12. (*Основная теорема арифметики*). Любое гауссово число раскладывается в произведение простых, причем единственным образом, с точностью до ассоциированности.

Для самостоятельного решения

13. Докажите, что два гауссовых числа кратны друг другу тогда и только тогда, когда они ассоциированны.
14. Докажите, что простые числа вида $4k + 3$ являются простыми гауссовыми.
15. Разложите число 1001 на простые гауссовые.

Множества 11 июля

1. Каких натуральных чисел, не превосходящих 1000000, больше: с суммой цифр 31 или с суммой цифр 23?

Определение. *Множества А и В называются* ***равномощными****, если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие.*

2. Докажите, что следующие множества равномощны:
   а) любые два отрезка на плоскости;
   б) граница квадрата и окружность.

Определение. *Множество называется* ***счётным****, если оно равномощно множеству натуральных чисел.*

3. Докажите, что следующие множества счётны:
   а) множество всех целых неотрицательных чисел
   б) множество всех четных чисел;
   в) множество всех целых чисел;
   г) бесконечное подмножество счетного множества;
   д) бесконечное множество непересекающихся отрезков прямой длины не меньше 1,5.
4. Докажите, что любое бесконечное множество содержит счётное подмножество.
5. Докажите, что множество бесконечно тогда и только тогда, когда оно равномощно некоторому своему собственному подмножеству.
6. Может ли король обойти бесконечную шахматную доску, побывав в каждой клетке ровно один раз?
7. Докажите, что произведение счётных множеств счётно. (произведение множеств A и B — это множество всех пар $(a; b)$ где $a \in A$, $b \in B$.)
8. Объединение не более чем счетного числа счётных множеств счетное.
9. Докажите, что следующие множества счётны
   а) $\mathbf{N}^k$ (k – натурально);
   б) $\mathbf{Q}$ (всех рациональных чисел);
   в) $\mathbf{P}_{\text{fin}}(\mathbf{N})$ – всех конечных подмножеств в $\mathbf{N}$
   г) множество всех конечных последовательностей целых чисел.

Для самостоятельного решения

10. Доказать, что объединение бесконечного множества с не более чем счётным равномощно первому из множеств.
11. Докажите, что множество всех алгебраических чисел счётно. (Алгебраическими называются числа, являющиеся корнями многочленов с целыми коэффициентами.)
12. В пространстве дано некоторое количество шаров. Известно, что каждый из шаров пересекается не более чем с 2010 другими. Докажите, что их количество не более чем счетно.

Гауссовы числа - 2 — 12 июля

Упражнение. Пусть z — простое гауссово. Докажите, что оно является делителем
а) натурального числа;
б) простого натурального;
в) единственного простого натурального p

1. Докажите, что если простое натуральное p в сумму двух квадратов целых чисел

а) не разложимо, то оно является простым гауссовым;

б) разложимо, то оно равно произведению двух сопряженных простых гауссовых. При этом разложение в сумму квадратов единственно с точностью до перестановки. Когда получающаяся здесь пара сопряженных ассоциирована?

2. Если $a^2 + b^2$ делится на простое натуральное n, не представимое в виде суммы двух квадратов, то a и b делятся на n.
3. Докажите, что если p — простое натуральное вида $4k + 1$, то $((2k)!)^2 + 1$ делится на p. (Вспомните теорему Вильсона.)
4. Простое натуральное число вида $4k + 1$ представимо суммой двух квадратов целых чисел.

Таким образом, простые гауссовы числа — это число $1 + i$, простые натуральные вида $4k + 3$ и пары сопряженных, на которые раскладываются простые натуральные вида $4k + 1$.

Для самостоятельного решения

1. Докажите, что натуральное число можно представить в виде суммы двух квадратов целых чисел тогда и только тогда, когда в разложение его на простые множители все простые числа вида $4k + 3$ входят в четных степенях.
2. Докажите, что 15 не представимо суммой квадратов двух рациональных чисел.
3. Пусть $n^2 + 1$ делится на $m^2 - 1$ для целых n и m. Каким может быть m?

Абака 12 июля

Функции

1. Даны три неотрицательных числа, не превосходящих 1, сумма всех трёх попарных произведений которых равна 1. Какое наибольшее значение может принимать их сумма квадратов?
2. Дана функция $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \le 3, \\ 10 - x, & x > 3. \end{cases}$ Сколько решений имеет уравнение $f(2+|x|)=6$?
3. Найдите сумму наименьшего и наибольшего значений функции $y=3\cos x-3\cos 2x-2$.
4. Известно, что корнями квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ являются $x_1 = \frac{c-a-b}{2a}$ и $x_2 = \frac{a-b-c}{2a}$. Укажите множество из двух действительных чисел, среди которых хотя бы одно является корнем этого трёхчлена.
5. Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1=1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{[a_n]+10}$ при всех натуральных $n \ge 1$, где $[x]$ – целая часть числа x. Найдите a_{2008}.
6. Найдите наименьшее значение выражения $|x| + |y| + \sqrt{(x+4)^2 + (y-5)^2}$. Укажите все пары $(x;y)$, при которых оно достигается.

Геометрия

1. На плоскости нарисовано три прямоугольника. На какое наибольшее число частей про этом могла разбиться плоскость?
2. *AH* и *CP* – высоты равнобедренного (*AB*=*BC*) треугольника ABC. Найдите величину угла *B*, если известно, что *AC*=2*HP*.
3. На основании *AD* равнобедренной трапеции *ABCD* отмечена точка *N* такая, что четырёхугольник *NBCD* является параллелограммом. Диагонали трапеции *ABCD* пересекаются в точке *E*. Оказалось, что точки *A*, *B*, *E*, *N* лежат на одной окружности. Выразите *AB* через *BC*.
4. *P* – точка пересечения биссектрисы *BD* треугольника *ABC* и ближней к стороне *CA* трисектрисы *CE*. Оказалось, что *DE* = *DC* = *CP*. Найдите углы треугольника *ABC*.
5. В прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, делит её на отрезки, разность которых равна меньшему катету. Найдите отношение большего катета к меньшему.
6. На продолжении гипотенузы *AB* прямоугольного треугольника *ABC* за точку *B* отмечена точка *D* такая, что *DC*=2*BC*. Пусть *H* – основание высоты, проведённой из вершины *C* прямого угла. Найдите угол *BDC* (в градусах), если известно, что расстояние от *H* до катета *BC* равно длине отрезка *HA*.

ТЧ

1. При каком наименьшем натуральном *K* возможно равенство $K \cdot \overline{ОДИН} = \overline{МНОГО}$ (одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры)? Приведите ответ и все решения получающегося ребуса.
2. Найдите наименьшее чётное натуральное число, которое нельзя представить в виде суммы двух натуральных слагаемых, каждое из которых состоит из нечётных цифр.
3. Натуральные числа m и n таковы, что m^2+n^2+m делится на mn. Опишите все такие m.
4. Можно ли из всех 10 цифр составить 2 пятизначных числа так, чтобы одно делилось на другое?
5. При записи цифр четырёхзначного числа в обратном порядке получается другое четырёхзначное число, произведение которого с исходным делится на 1000. Найдите все такие четырёхзначные числа.
6. Сколько решений в цифрах имеет уравнение НОК(a,b)+НОД(a,b)=a+b?

Конструктивы

1. Какое наибольшее число ладей можно расставить на шахматной доске 8×8 так, чтобы каждая ладья находилась под боем не более двух ладей? *(Две ладьи бьют*

друг друга, если они стоят в одном вертикальном или горизонтальном ряду и между ними нет третьей ладьи.)

2. В клетки таблицы 5×5 по одному ставят различные натуральные числа от 1 до 25, причём нельзя, чтобы в какой-нибудь строке или в каком-нибудь столбце сумма чисел давала остаток 1 при делении на 3. Какое наибольшее количество чисел можно поставить?
3. Найдите наибольшее натуральное число из различных цифр, у которого любая группа подряд идущих цифр даёт число, делящееся на количество цифр в этой группе.
4. Какое наименьшее количество клеток квадрата 5×5 можно закрасить так, чтобы в любом четырёхклеточном многоугольнике была хотя бы одна закрашенная клетка? Приведите пример.
5. Из какого наибольшего количества различных цифр можно составить натуральное число и его квадрат, в записи которых вместе каждая цифра используется ровно 1 раз? Приведите ответ, пример числа и его квадрата.
6. Из набора гирь массой 1, 2, 3, 4, …, 25, 26 выбрать 6 гирь так, чтобы из них нельзя было выделить два разных набора, суммарные массы которых равны. *(При этом в этих двух наборах могут использоваться не все 6 гирь.)*

Многочлены 14 июля

Полем будем называть некоторое числовое множество, в котором можно складывать, вычитать, умножать и делить (не на 0), и справедливы все привычные нам свойства этих операций. Это не точное определение. Примеры полей: $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{Z}_\mathbf{p}$.

Определение. ***Многочленом*** над полем ***K*** называется выражение вида $A(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — элементы некоторого поля ***K***.

Степенью многочлена $A(x)$ (обозначается $\deg A(x)$) называется наибольший показатель ненулевого одночлена, коэффициент при этом одночлене называется ***старшим***. Степень нулевого многочлена полагается равной $-\infty$.

Два многочлена считаются ***равными*** тогда и только тогда, когда у них равны соответствующие коэффициенты.

Сумма, разность и произведение многочленов определяются следующим образом:

$$C(x)=A(x)\pm B(x)\Rightarrow c_k=a_k\pm b_k$$

$$C(x)=A(x)\times B(x)\Rightarrow c_k=\sum_{m+n=k} a_m\cdot b_n.$$

1. Что происходит со степенями многочленов при их сложении и умножении?

Зафиксируем до конца занятия некоторое поле ***K*** и будем рассматривать только многочлены над ***K***.

2. Какие многочлены будут обратимыми, ассоциированными?

3. ***Теорема о делении с остатком.*** Для любых многочленов $A(x)$ и $B(x) \neq 0$ существуют единственные многочлены $C(x)$ и $R(x)$ такие, что $A(x) = B(x)C(x) + R(x)$ и $\deg B(x) > \deg R(x)$.

Если $R(x) = 0$, то говорят, что $A(x)$ делится на $B(x)$.

Многочлены называются *взаимно простыми*, если все их общие делители обратимы.

4. ***Алгоритм Евклида для многочленов.*** Для взаимно простых многочленов $A(x)$ и $B(x)$ найдутся многочлены $U(x)$ и $V(x)$ такие, что $A(x)U(x) + B(x)V(x) = 1$. Верно и обратное.

Определение. Многочлен называется ***неприводимым***, если у него ровно два делителя с точностью до обратимых множителей.

5. Если произведение $A(x)B(x)$ многочленов делится на неприводимый многочлен $C(x)$, то хотя бы один из множителей делится на $C(x)$.
6. ***Основная теорема арифметики для многочленов***. Любой многочлен раскладывается в произведение неприводимых, причем единственным образом с точностью до перестановки и постоянных множителей.

Определение. ***Наибольшим общим делителем*** многочленов называется общий делитель, кратный любому общему делителю. ***Наименьшим общим кратным*** многочленов называется общее кратное, делящееся на любое общее кратное.

7. Докажите существование НОД и НОК, их единственность с точностью постоянного множителя.
8. Найти НОД$(x^k - 1, x^m - 1)$.
9. Найдите сумму коэффициентов многочлена $(x^2 + 2x - 2)^{2010}$.
10. Найдите все целые x, при которых число $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ делится на число $x^2 + 1$.

Для самостоятельного решения.

11. Найдите сумму коэффициентов при нечетных степенях многочлена $\left(x^4 - 3x^3 - x + 2\right)^{15}$.
12. Докажите, что для любого n многочлен $(x + 1)^{2n+1} + x^{n+2}$ делится на $x^2 + x + 1$.
13. Многочлен $P(x)$ дает остаток 5 при делении на $(x - 2)$ и остаток $7 + i$ при делении на $(x - 3)$. Какой остаток многочлен $P(x)$ дает при делении на $x^2 - 5x + 6$?

Множества — 2   14 июля

13. Докажите, что следующие множества равномощны между собой:
    а) отрезок;
    б) интервал;
    в) прямая;
    г) окружность.

Определение. *Множество, равномощное отрезку* $[0,1]$ *называется континуальным.*

14. Докажите, что множество всех бесконечных последовательностей, состоящих из 0 и 1 континуально.
15. Докажите, что любое континуальное множество несчётно.

16. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством всех подмножеств натурального ряда и бесконечных последовательностей, состоящих из 0 и 1.
17. Докажите, что множество всех неалгебраических чисел континуально.
18. Алексей утверждает, что множество точек отрезка $[0,1]$ и множество точек квадрата $[0,1] \times [0,1]$ неравномощны. Руслан Сергеевич утверждает обратное. Кто из них прав?
19. Верно ли, что множество точек прямой и множество точек плоскости равномощны?
20. Докажите, что множество всех прямых на плоскости континуально.

Для самостоятельного решения

21. На плоскости есть счетное число комаров (нулевого размера). Юная защитница природы Алёна находится в фиксированной точке, и у нее есть лазерное ружье. Докажите, что Алёна может выстрелить так, чтобы не убить ни одного комара.
22. Докажите, что $\mathbf{R} \times \mathbf{N}$ равномощно $\mathbf{R}$.
23. Докажите, что множество всех конечных последовательностей действительных чисел континуально.

Инверсия — 15 июля

Определение. Пусть дана окружность ω с центром O и радиусом R. Инверсия — это преобразование плоскости с выколотой точкой O, которое переводит каждую точку A в точку A' такую, что A' лежит на луче OA и $OA \times OA' = R^2$. Точки A и A' называются симметричными или инверсными относительно ω.

Упражнения

а) Для каждой точки плоскости, кроме центра O, существует единственная точка, симметричная ей

б) Для центра O симметричной точки не существует

в) Если точка A_2 симметрична точке A_1, то и точка A_1 симметрична точке A_2

г) Каждая точка, лежащая на окружности ω, симметрична сама себе

д) Если A_1 и A_2 различные симметричные точки, то одна из них лежит внутри окружности ω, а другая — снаружи

е) Прямая проходящая через O переходит в себя.

Задачи

1. Пусть точка A лежит снаружи окружности ω с центром O, AM и AN — касательные к окружности ω; прямые OA и MN пересекаются в точке B. Тогда точки A и B симметричны относительно окружности ω.
2. Пусть A_1, A_2 и B_1, B_2 пары различных точек, симметричных относительно окружности ω. Тогда все эти четыре точки лежат на одной окружности.
3. Прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии. И наоборот.

4. Пусть окружность α является образом прямой a при инверсии относительно окружности ω, а точка A лежит на прямой a. Тогда касательные, проведенные к окружностям α и ω из точки A равны между собой.
5. Окружность, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, не проходящую через центр инверсии.

Определение. Углом между двумя окружностями называется угол между их касательными в точке их пересечения. Аналогично определяется угол между прямой и окружностью.

6. а) Докажите, что прямая (окружность, кроме случая инверсной) сохраняется при инверсии тогда и только тогда, когда она ортогональна инверсной окружности.

   б) У окружности проведены диаметр AB и хорда CD, перпендикулярная этому диаметру. Меньшая окружность касается отрезка CD и дуги CBD. Докажите, что касательная к ней, проведенная из точки A, равна по длине AC.

   в) В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей. Найдите ГМТ их точек касания

   г) В сегмент вписываются всевозможные пары пересекающихся окружностей. Рассмотрим множество прямых, проходящих через их точки пересечения. Докажите, что все такие прямые проходят через одну точку.

Для самостоятельного решения

7. Пусть K, M, N — произвольные точки на окружности ω, p — серединный перпендикуляр к отрезку MN. Тогда прямые KM и KN пересекают прямую p в точках A и B, симметричных относительно окружности ω.
8. Через точку A провели прямую, пересекающую окружность S с центром O в точках N и M и не проходящую через O. Пусть M' и N' — точки симметричные точкам M и N относительно AO. Пусть MN' и NM' пересекаются в точке A'. Докажите, что A' — образ A при инверсии, сохраняющей S.
9. Пусть дан треугольник ABC. A_1 и B_1 — середины сторон BC и AC соответственно. Окружности, проходящие через AB_1C и A_1BC, пересекаются в точке X. Прямая CX вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке Y. Найдите CX/CY.

Многочлены — 2 15 июля

1. Многочлен $P(x) = x - a$ неприводим над любым полем, содержащим a.
2. *Теорема Безу*. $P(x) = Q(x)(x - a) + P(a)$ для любых a из поля K и $P(x)$ из $K[x]$.
   Определение. Такое a, что $P(a) = 0$, называется *корнем* многочлена. Корень имеет *кратность* k, если $P(x)$ делится на $(x - a)^k$ и не делится на $(x - a)^{k+1}$.
3. Любой многочлен степени n над любым полем имеет не более n корней.
4. Если два многочлена степени не выше n совпадают в $n + 1$ различных точках, то эти многочлены равны.
5. Если два многочлена над бесконечным полем равны как функции, то они равны как многочлены. Аналогичное утверждение неверно в $\mathbf{Z}_p[x]$.

6. Любой многочлен из **C**[x] степени 2 приводим.
7. ***Теорема о существовании корня*** (*без доказательства*).
   Каждый непостоянный многочлен из **C**[x] имеет комплексный корень.
8. Всякий многочлен из **C**[x] степени $n \geq 0$ имеет ровно n корней с учетом кратности.
9. В **R**[x] всякий многочлен раскладывается в произведение неприводимых многочленов степени не выше 2. (Указание: рассмотрите комплексные корни этого многочлена.)
10. Разложите на неприводимые в **R**[x] многочлен $x^n - 1$.
11. Многочлен нечетной степени над **R** имеет действительный корень.
12. Дан многочлен $P(x)$ такой, что многочлен $P(x^n)$ делится на $x - 1$. Докажите, что многочлен $P(x)$ также делится на $x - 1$.

Для самостоятельного решения

13. Докажите, что если многочлен $P(x)$ делится на многочлен $Q(x)$, то всякий корень $Q(x)$ кратности k является корнем $P(x)$ кратности не меньшей k.
14. Докажите, что для любого многочлена $P(x) \neq x$ многочлен $P(P(\ldots P(x)\ldots)) - x$ делится на $P(x) - x$.
15. Разложите на неприводимые в **R**[x] многочлен $x^8 + 1$.

Множества — 3 16 июля

Определение. *Мощностью* $|A|$ множества A называется класс всех множеств, равномощных ему.

Определение. Отображение множества A в множество B называется *вложением* (или *инъекцией*), если разные элементы переходят в разные.

Определение. $|A| \leq |B| \Leftrightarrow A$ вложимо в B.

16. **Упражнение.** Проверьте, что отношение сравнения мощностей не зависит от представителей классов.
17. **Упражнение.** Покажите рефлексивность и транзитивность отношения сравнения мощностей.
18. **Теорема Кантора–Бернштейна**. Если множество A вложимо в B, а B вложимо в A, то множества A и B — равномощны.
19. Докажите, что все фигуры на плоскости, содержащие хотя бы кусочек прямой или кривой – континуальны.

Теорема *(без доказательства)*. Любые две мощности сравнимы.

Определение. Для любого множества X через 2^X будем обозначать множество всех подмножеств множества X.

20. В некотором царстве любое множество подданных образует тайное общество, и каждый подданный доносит ровно на одно тайное общество. Назовем подданного порядочным, если он не доносит на общество, в котором сам состоит. Докажите, что на общество всех порядочных подданных никто не доносит.

21. **Теорема Кантора**. Мощность 2^X больше мощности X.
22. Существуют сколь угодно большие мощности.

Континуум-гипотеза. Не существует мощности, промежуточной между счётной и континуумом.

Для самостоятельного решения

1. Докажите, что шарик и бублик равномощны.
2. Являются ли континуальными следующие множества:
   а) множество функций из $\boldsymbol{Q}$ в $\boldsymbol{Q}$.
   б) множество функций из $\boldsymbol{R}$ в $\boldsymbol{N}$
3. Квадрат разбит на два множества. Докажите, что хотя бы одно из них равномощно самому квадрату.

Функциональные уравнения – 2 — 16 июля

1. $3f(-x)+f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=x, \quad x\neq 0.$

2. $f\left(\frac{x}{x-1}\right)+xf\left(\frac{1}{x}\right)=2, \quad x\neq 0;1.$

3. $f(f(x)+y)=f(x+y)+f(0)$, где $f(x)$ — монотонная.

4. $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{R}, \quad f(1)=2, \quad f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1.$

5. $f(x)=\max\limits_{y\in\mathbf{R}}(xy-f(y)).$

6. $f:\mathbf{N}^2\to\mathbf{N}, \quad f(x,x)=x, \quad f(x,y)=f(y,x), \quad (x+y)f(x,y)=yf(x,x+y).$

7. $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}, \quad f(f(n))=n, \quad f(f(n+2)+2)=n, \quad f(0)=1.$

8. $f(x+k)(1-f(x))=1+f(x)$ для фиксированного k. Докажите, что f периодическая.

9. $f(x-f(y))=1-x-y.$

Для самостоятельного решения

10. f: N0 → N0, f(f(n)) + f(n) = 2n + 3.

11. f(x + y) + f(y + z) + f(x + z) ≥ 3f(x + 2y + 3z)

12. $xf(x)+2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1, \quad x\neq -1,0,1$.

Матбой 8 - 9 — 17 июля

1. Целые числа a, b, c, d удовлетворяют условиям bc + ad = ac + 2bd = 1. Докажите, что $a^2+c^2=2b^2+2d^2$.

2. Все точки окружности раскрашены в белый и голубой цвета так, что у каждого вписанного в окружность равностороннего треугольника не менее двух белых вершин. Докажите, что в окружность можно вписать квадрат, у которого не менее трех белых вершин.

3. Верно ли, что для каждого приведенного квадратного трехчлена f(x) существует x такое, для которого числа f(x), f(f(x)) и f(f(f(x))) - стороны треугольника?

4. В стране 2010 городов и 3015 дорог между ними, причем из любого можно добраться в любой другой. Докажите, что можно закрыть 2 дороги, ведущие из одного города так, чтобы по-прежнему из любого города можно было добраться до любого другого.

5. Для каких действительных A существуют целочисленный многочлен P(x) выше первой степени и натуральное m такие, что для любого x выполняется $Am + x \le P(x) \le A + xm$?

6. На доске написано выражение $*3^5*3^4*3^3*3^2*3^1*1$. Два игрока по очереди заменяют звездочки знаками + и -, а когда все знаки расставлены, подсчитывают результат. Если результат не делится на 7, выигрывает первый игрок, а если делится, то второй. Кто выиграет при правильной игре?

7. Кира Григорьевна нарисовала треугольник ABC и отметила такую точку D на стороне BC, что ортоцентр треугольника ACD лежит на описанной окружности треугольника ABD, а центр вписанной окружности треугольника ABD лежит на описанной окружности треугольника ACD. Помогите Марианне Сергеевне выбрать все такие точки на BC, обладающие данным свойством.

8. 43 угольник вписан в окружность s. Для любых трех подряд идущих вершин отмечают центр вписанной окружности этого треугольника. Оказалось, что все отмеченные точки равноудалены от центра s. Докажите, что первоначальный 43 угольник правильный.

Многочлены — 3 17 июля

1. *Определение*. Пусть даны различные числа $x_0, \ldots, x_n$ (*узлы*) и произвольные $y_0, \ldots, y_n$ (*значения в узлах*). Построение многочлена $P(x)$ наименьшей степени такого, что $P(x_k) = y_k$ при всех k от 0 до n, называется *интерполяцией*, а получаемый многочлен — *интерполяционным*.
2. Упражнение. Как выглядит произвольный ненулевой многочлен, принимающий нулевые значения в точках $x_1, \ldots, x_n$? Какая у него может быть степень?
3. Постройте многочлен степени n, принимающий нулевые значения в точках $x_1, \ldots, x_n$, а в точке x_0 — значение 1.
4. Постройте интерполяционный многочлен линейной комбинацией многочленов предыдущего вида.
5. Многочлены полученного вида называются *интерполяционными многочленами Лагранжа*.

Факт. Для $n + 1$ узлов среди многочленов степени не выше n существует единственный интерполяционный многочлен. Факт верен для любого базового поля, содержащего все узлы и значения в них.

6. Для различных a, b, c, d упростите выражение
$$\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}+\frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}.$$
7. Пусть последовательность многочленов $P_0, P_1, P_2, \ldots$ из $K[x]$ такова, что $\deg P_k = k$ для всех $k \in \mathbf{N}_0$. Тогда всякий многочлен из $K[x]$ представим (конечной) линейной комбинацией этих многочленов с коэффициентами из K, причем единственным образом. Множество многочленов, удовлетворяющих последнему условию, называется *базисом* кольца $K[x]$.

Определение. Многочлен называется *целозначным*, если в целых точках он принимает целые значения.

8. Докажите, что многочлены вида $\binom{x}{k}=\frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}$ целозначны. Такие многочлены называются *биномиальными*.
9. Упражнение. В каких целых точках биномиальный многочлен равен 0, ±1?
10. Всякий целозначный многочлен степени n представляется линейной комбинацией многочленов $\binom{x}{0}, \binom{x}{1}, \ldots, \binom{x}{n}$ с целыми коэффициентами.
11. Для любого целого m всякий целозначный многочлен степени n представляется линейной комбинацией многочленов $\binom{x-m}{0}, \binom{x-m}{1}, \ldots, \binom{x-m}{n}$ с целыми коэффициентами.
12. Многочлен степени n, принимающий целые значения в $n + 1$ последовательных целых точках, целозначен.
13. Если многочлен $P(x)$ степени n целозначен, то $n!P(x)$ имеет целые коэффициенты.

Для самостоятельного решения

14. Докажите, что для различных чисел a, b, c, d
$$\frac{abc}{(d-a)(d-b)(d-c)}+\frac{abd}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{acd}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{bcd}{(a-b)(a-c)(a-d)}=-1.$$
15. Докажите тождество $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{x+k}\binom{n}{k}=\frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}$.

16. Если многочлен степени n принимает целые значения в точках 0, 1, 4, …, n^2, то он принимает целые значения во всех квадратах натуральных чисел.

Гармонический четырехугольник 19 июля

Определение. Вписанный четырехугольник называется *гармоническим*, если произведения его противоположных сторон равны.

Упражнение. Докажите, что гармонический четырехугольник однозначно задается по трем подряд идущим вершинам.

1. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ (с центром описанной окружности в O) гармонический тогда и только тогда, когда:
   а) касательные к описанной окружности в A и C и прямая BD конкурентны;
   б) B, D, O и середина AC лежат на одной окружности или прямой;
   в) стороны AB и AD видны из середины диагонали AC под одинаковыми углами;

   г) угол, под которым видна из середины AC дуга BAD, вдвое больше угла C;
   д) диагональ AC — симедиана треугольника BCD;
   е) биссектрисы противоположных углов пересекаются на диагонали.

Для самостоятельного решения

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, причем касательные в точках B и D пересекаются в точке K, лежащей на прямой AC. Прямая, параллельная KB, пересекает прямые BA, BD, BC в точках P, Q, R. Докажите, что $PQ = QR$.
3. Пусть PT и PB — две касательные к окружности, AB — ее диаметр, и TH — перпендикуляр, опущенный из точки T на AB. Докажите, что прямая AP делит пополам отрезок TH.
4. В окружности S проведены две параллельные хорды AB и CD. Прямая, проведенная через C и середину AB, вторично пересекает S в точке E. Точка K — середина отрезка DE. Докажите, что угол AKE равен углу BKE.
5. Пусть PA и PB — касательные к окружности, CD — секущая, проходящая через P. M — середина AB. K — вторая точка пересечения с окружностью прямой CK. Докажите, что PM, AD и BK - пересекаются в одной точке или параллельны.

Симметрические многочлены 19 июля

1. **Теорема Виета**

   Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни (с учетом кратностей) многочлена $A(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -a_1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = a_2 \\ \vdots \\ x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n a_n \end{cases} \qquad (*)$$

   (Краткая запись: $\sum\limits_{j_1<\ldots<j_k} x_{j_1}\ldots x_{j_k} = (-1)^k a_k$ при $k = 1,\ldots,n$.)

2. **Обратная теорема Виета**. Если набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяет системе (*), то $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни (с учетом кратностей) многочлена $A(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$.
3. **Следствие**. Система вида (*) относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет в любом поле не более одного решения (с точностью до перестановки индексов) при данных элементах $a_1, a_2, \ldots, a_n$ этого поля.
4. Про действительные числа a, b и c известно, что $abc = 1$ и $a+b+c = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

   Докажите, что хотя бы одно из них равно 1.

Определение. Многочлен от n переменных $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *симметрическим*, если он не изменяется при всех перестановках входящих в него переменных.

Важные примеры:

элементарные симметрические $\sigma_k(x_1,\ldots,x_n) = \sum\limits_{j_1<\ldots<j_k} x_{j_1}\ldots x_{j_k}$, где $1 \le k \le n$;

мономиальные симметрические $m_{j_1,\ldots,j_n}(x_1,\ldots,x_n) = \sum\limits_{\sigma\in S_n} x_{\sigma(1)}^{j_1}\ldots x_{\sigma(n)}^{j_n}$.

5. **Основная теорема о симметрических многочленах**. Любой симметрический многочлен может быть единственным образом представлен в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов.
6. Доказать, что если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ с целыми коэффициентами, то при любом натуральном n число $x_1^n + x_2^n$ является целым.
7. **Уточнение теоремы**. Если все коэффициенты симметрического многочлена целые, то его представление тоже имеет целые коэффициенты.
8. Решите уравнение $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} = 2 - \sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$.

9. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^3+y^3+z^3=a^3 \end{cases}$.
10. Известно, что многочлен $P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x - 1$ имеет 4 действительных корня. Найдите сумму их квадратов.

Для самостоятельного решения

11. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$.
12. Решите уравнение $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$.

13. Найдите площадь треугольника, длины сторон которого есть корни уравнения

$$x^3 - 10x^2 + 31x - 29 = 0.$$

Инверсия 2 — 20 июля

1. Касательные в вершинах A и C вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, не лежащей на прямой BD. Оказалось, что $PA^2 = PB \times PD$. Докажите, что если прямая PB проходит через центр описанной окружности треугольника ADP, то прямая PD перпендикулярна отрезку BC.
2. а) Пусть O - точка пересечения боковых сторон трапеции $ABCD$. Придумайте какую-нибудь композицию инверсии и осевой симметрии меняющую точки A и C, B и D.

   б) Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке K, а диагонали – в точке P. Описанные окружности треугольников AKC и BKD пересекаются в точке Q. Докажите, что $\angle PKA = \angle QKD$.
3. а) Пусть точка A лежит внутри окружности S (отлично от центра). Придумайте композицию инверсии и центральной симметрии с центрами в A так, чтобы S осталась на месте

   б) Докажите, что в описанном четырехугольнике отрезки соединяющие противоположные вершины и противоположные точки касания вписанной окружности пересекаются в одной точке.
4. а) Пусть точка A лежит внутри окружности S (отлично от центра). Придумайте композицию инверсии и осевой симметрии, так чтобы S осталась на месте

   б) Вписанная окружность четырехугольника $ABCD$ пересекает диагональ AC в точках P и Q. Докажите, что если M – середина отрезка PQ, то $\angle BMA = \angle DMA$.
5. а) Докажите, что инверсия с центром в вершине A равнобедренного треугольника ($AB = AC$) и радиусом AB переводит основание BC треугольника в дугу BC описанной окружности.

   б) А композицию инверсии с центром в A с чем надо взять в случае неравнобедренного треугольника, чтобы сторона BC перешла в дугу BC описанной окружности?

в) (факт) Пусть I и I_A – центр вписанной и вневписанной окружности треугольника ABC. Выразите величину $AI \times AI_A$ через стороны треугольника

г) Окружность касается внутренним образом окружности, описанной около треугольника ABC, а также его сторон AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что центр вписанной в треугольник ABC окружности лежит на отрезке PQ.

Для самостоятельного решения

6. Про выпуклый четырехугольник $ABCD$ известно, что окружность с диаметром AB касается прямой CD. Докажите, что окружность с диаметром CD касается прямой AB тогда и только тогда, когда прямые AD и BC параллельны.
7. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке K, а диагонали - в точке P. Описанные окружности треугольников APB и CPD пересекаются в точке Q. Докажите, что углы APQ и BPK равны.

Геометрия в алгебре 20 июля

1. Решите систему уравнений
2. $\begin{cases} 3x+4y=26 \\ \sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=10 \end{cases}$.
3. $3x-4y=10$ $\begin{cases} \sqrt{x^2+(y-4)^2}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}|x-2y-2|=2\sqrt{5}; \\ x\ge 2. \end{cases}$
4. Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{(x-5)^2+9}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{4+(y-4)^2}$

   $7\sqrt{2}$
5. Решите уравнение $\sqrt{x^2-5x\sqrt{2}+25}+\sqrt{x^2-12x\sqrt{2}+144}=13$.
6. **6.** $^{\circ\circ}\in 0.5\cdot 5\cdot 12=S_{ABC}=S_{ACD}+S_{BCD}=0.5\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot 5x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot 12x\right)$ $x=\dfrac{60\sqrt{2}}{17}$ Решите уравнение $\sqrt{13-12\cos x}+\sqrt{7-4\sqrt{3}\sin x}=2\sqrt{3}$ при $0<x<90^{\circ}$.
7. **7.** $x=\arccos\dfrac{21-\sqrt{21}}{24}$ Имеет ли решение в положительных числах система уравнений

8. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=4, \\ x^2+xz+z^2=9, \\ y^2+yz+z^2=36? \end{cases}$

9. $\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2}\geq\sqrt{y^2+yz+z^2}$ Докажите неравенство:

$2500\pi-100<\sqrt{1\cdot 199}+\sqrt{2\cdot 198}+\ldots+\sqrt{99\cdot 101}<2500\pi$.

10. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x^2-c^2}+\sqrt{y^2-c^2}=z \\ \sqrt{y^2-a^2}+\sqrt{z^2-a^2}=x \\ \sqrt{z^2-b^2}+\sqrt{x^2-b^2}=y \end{cases}$

11. Докажите, что $aB+bC+cA<k^2$, если $a+A=b+B=c+C=k$, где $a,\ A,\ b, B,\ c,\ C$ – положительные числа.

Для самостоятельного решения.

12. При каком наименьшем значении a уравнение

$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}=2a$ имеет решение?

13. Числа x, y, z удовлетворяют системе

$\begin{cases} 3x^2+3xy+y^2=75, \\ y^2+3z^2=48, \\ z^2+xz+x^2=9, \\ x, y, z>0. \end{cases}$

Найдите $xy+2yz+3xz$.

Теорема Мюрхеда 21 июля

Определение. Неравенство называется *симметрическим*, если оно формально не меняется при любой перестановке переменных.

Определение. Последовательность чисел $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, где $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_n\geq 0$ назовем *набором показателей*.

Определение. *Орбитой* с набором показателей $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ называется функция

$$T_a(x_1,x_2,\ldots,x_n)\overset{\text{df}}{=}\sum_{\tau\in S_n}x_{\tau(1)}^{a_1}x_{\tau(2)}^{a_2}\ldots x_{\tau(n)}^{a_n}.$$

Определение. Будем говорить, что $T_a\geq T_b$, если данное неравенство справедливо при любых неотрицательных значениях переменных.

Упражнение. Это отношение сравнения орбит является отношением порядка.

1. а) Пусть f и g — приведенные действительные многочлены одной переменной и $\deg f > \deg g$. Докажите, что найдется такое x_0, что $f(x_0) > g(x_0)$.
   б) Пусть $a = (3,\ldots)$ и $b = (5,\ldots)$. Докажите, что $T_a \not\geq T_b$.
   в) Пусть $a = (5,2,\ldots)$ и $b = (4,4,\ldots)$. Докажите, что $T_a \not\geq T_b$.
   г) Пусть $a = (15,1,1,1\ldots)$ и $b = (6,5,5,3\ldots)$. Докажите, что $T_a \not\geq T_b$.
   д) Пусть $a_1 +\ldots+ a_n > b_1 +\ldots+ b_n$. Докажите, что $T_a \not\geq T_b$.
   Определение. Для двух наборов показателей $a = (a_1,a_2,...,a_n)$ и $b = (b_1,b_2,...,b_n)$ определим отношение *мажорирования*: $a \succ b \overset{\text{df}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a_1 \geq b_1, \\ a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2, \\ \vdots \\ a_1 + \ldots + a_{n-1} \geq b_1 + \ldots + b_{n-1}, \\ a_1 + \ldots + a_n = b_1 + \ldots + b_n. \end{cases}$
2. Докажите, что $T_a \geq T_b \Rightarrow a \succ b$.
3. Докажите $a \succ b \Rightarrow T_a \geq T_b$ для двух переменных.
4. Докажите $a \succ b \Rightarrow T_a \geq T_b$ для трех переменных в случае совпадения a и b в первой позиции.
5. Докажите, что отношение мажорирования является порядком для наборов любой длины.
6. Докажите $a \succ b \Rightarrow T_a \geq T_b$ для трех переменных.
7. Пусть у нас n переменных и наборы a и b отличаются лишь двумя числами (назовем такие наборы *близкими*). Докажите, что тогда $a \succ b \Rightarrow T_a \geq T_b$.
8. Пусть у нас n переменных и $a \succ b$. Докажите, что существует цепочка $a = a_1 \succ a_2 \succ \ldots \succ a_k = b$, где соседние наборы близки и $k \leq n$.
9. Докажите, что $a \succ b \Rightarrow T_a \geq T_b$.
10. **Теорема Мюрхеда.** $a \succ b \Leftrightarrow T_a \geq T_b$.
11. Докажите неравенства средних с помощью теоремы Мюрхеда. Сколько переходов надо будет доказать, если делать это ручками методом Мюрхеда?

Для самостоятельного решения

12. Докажите, неравенство Коши для трех переменных методом Мюрхеда.
13. При какой наименьшей сумме показателей существуют два не мажорирующих друг друга целочисленных набора длины 3 с такой суммой показателей?
14. Докажите неравенство $\dfrac{x^8 + y^8 + z^8}{x^3y^3z^3} \geq \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$ для неотрицательных переменных.

Инверсия 3 22 июля

1. Четыре окружности расположены так, что первая касается второй в точке A, вторая третьей - в точке B, третья четвёртой - в точке C, а четвёртая первой - в точке D. Все касания внешние. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

2. Пусть A' и B' точки, инверсные точкам A и B относительно окружности радиуса R с центром в точке O. Выразите $A'B'$ через стороны треугольника ABO и R.

3. (*Теорема Птолемея*) Доказать, что в четырехугольнике, вписанном в окружность сумма произведений противоположных сторон равна произведению его диагоналей.

4. а) Докажите, что при инверсии относительно вписанной окружности некоторого треугольника его стороны и описанная около него окружность переходят в четыре равных окружности.

б) Докажите, что если r - радиус вписанной окружности некоторого треугольника, R - радиус его описанной окружности, а d - расстояние между их центрами, то $r^2/(R - d) + r^2/(R + d) = r$

в) (*Теорема Эйлера*) Докажите, что если r - радиус вписанной окружности некоторого треугольника, R - радиус его описанной окружности, а d - расстояние между их центрами, то $R^2 - d^2 = 2Rr$.

5. а) Пусть в треугольнике ABC точка A_1 середина стороны BC. Рассмотрим инверсию с центром в A_1. При каком радиусе инверсии вписанная окружность перейдет в себя? А вневписанная напротив угла A?

б) Покажите, что окружность Эйлера при инверсии перейдет в прямую. Опишите все прямые касающиеся вписанной и одной вневписанной окружности.

в) (*Теорема Фейербаха*) Докажите, что в любом треугольнике окружность Эйлера касается вписанной и всех вневписанных окружностей треугольника.

Для самостоятельного решения

6. Вневписанная окружность касается стороны BC треугольника ABC. Другая окружность касается извне вписанной в треугольник ABC окружности и указанной вневписанной. Докажите, что точки касания окружностей лежат на прямой, проходящей через вершину A.

7. Каждая из четырёх окружностей пересекает две другие. Если четыре точки пересечения, взятые по одной из каждой пары точек пересечения двух окружностей, лежат на одной окружности или прямой, то и четыре из оставшихся точек пересечения лежат на одной окружности или прямой.

Квадратный трехчлен 22 июля

Упражнение.

А) Рассматриваются квадратичные функции $y = x^2 + px + q$, для которых $p + q = 2010$. Найдите точку, в которой пересекаются все графики таких функций.

Б) Если $a + b + c = 0$, то $b^2 \geq 4ac$. Докажите.

В) Докажите, что если $c(a + b + c) < 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корень.

1. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет корень. Следует ли из этого, что уравнение $a^{101}x^2 + b^{101}x + c^{101} = 0$ тоже имеет корень?

2. Найдите все тройки (a, b, c) действительных чисел, для которых различные параболы $y = ax^2 + bx + c$ и $y = bx^2 + cx + a$ имеют общую вершину.

3. Даны три квадратных трёхчлена, никакие два из которых не имеют общих корней. Известно, что каждый из этих трёхчленов имеет общий корень с суммой двух оставшихся. Докажите, что сумма этих трёхчленов равна нулю.

4. Пусть $ax^2 + 2bx + c$, $bx^2 + 2cx + a$, $cx^2 + 2ax + b$ — квадратные трехчлены с положительными коэффициентами, причем любые два из них имеют общий корень. Докажите, что $a = b = c$.

5. К параболам $y = x^2 + 2{,}5$ и $y = -x^2 + 2x - 1$ проведены общие касательные. Докажите, что точки касания являются вершинами параллелограмма.

6. Можно ли разместить на плоскости конечное число парабол (любых направлений) так, чтобы их внутренние области покрыли всю плоскость?

7. Существуют ли четыре таких квадратных трехчлена, что, записав их в любом порядке, мы сможем найти число, при подстановке которого в эти трехчлены полученные значения будут записаны в строго возрастающем порядке?

8. На координатной плоскости $x0y$ построена парабола $y = x^2$. Затем начало координат и оси стёрли. Как их восстановить с помощью циркуля и линейки (используя имеющуюся параболу)?

Для самостоятельного решения

9. Один из двух приведенных квадратных трехчленов имеет два корня меньших тысячи, другой — два корня больших тысячи. Может ли сумма этих трехчленов иметь один корень меньший тысячи, а другой — больший тысячи?

10. Три коэффициента a, b, c и два корня x_1, x_2 квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, выписанные в некотором порядке, образуют ряд из 5 последовательных целых чисел. Найдите все такие трёхчлены.

11. На доске написан квадратный трёхчлен $x^2 + 9x + 47$. Михаил Михайлович (по своему усмотрению) увеличивает или уменьшает на 1 коэффициент при x, после чего Алёна увеличивает или уменьшает на фиксированное число m свободный член, а далее эти действия повторяются. Как только написанный на доске многочлен имеет целый корень, Алёна получает оценку “5”. Может ли она обеспечить себе пятёрку при любых действиях Михаила Михайловича, если а) $m = 2$; б) $m = 3$?