Тридцать третья Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2017 года.

9 класс, частично упорядоченные множества, 21 июля

01. Докажите, что из любых пяти различных чисел, выписанных в ряд, можно выбрать три, стоящие в этом ряду (не обязательно подряд) в порядке возрастания или в порядке убывания.

02. Докажите, что среди 37 различных чисел есть или 10 в порядке возрастания, или 5 в порядке убывания.

03. Некоторые людоеды хотят съесть некоторых других людоедов. Известно, что длина наибольшей цепочки, в которой каждый людоед хочет съесть последующего, равна n (в частности, циклов нет). Докажите, что людоедов можно рассадить в n пещер, в каждой из которых никто никого не хочет съесть. Можно ли рассадить в меньшее число пещер?

04. Докажите, что из 65 целых чисел либо найдутся 9 таких, что каждое из чисел этой девятки, кроме последнего, делится на число, стоящее за ним, либо найдется девять таких чисел, что ни одно из них не делится на другое.

04-1. Аналогично, но чисел 36, либо 8 кратных, либо 6 некратных.

05. Докажите, что из 26 различных натуральных чисел, не превосходящих 50, всегда можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое.

Определение. Отношением нестрогого (рефлексивного) порядка на множестве M называется бинарное отношение $\preccurlyeq$ на M, такое, что выполняется

- рефлексивность. $a \preccurlyeq a$;
- антисимметричность. Если $a \preccurlyeq b$ и $b \preccurlyeq a$, то $a=b$
- транзитивность. Если $a \preccurlyeq b$ и $b \preccurlyeq c$, то $a \preccurlyeq c$.

Определение. Множество M, на котором задано отношение частичного порядка, называется частично упорядоченным

Определение. Отношением строгого (антирефлексивного) порядка на множестве M называется бинарное отношение $\prec$ на M, такое, что выполняется

- антирефлексивность. Неверно, что $a \prec a$;
- асимметричность. Если $a \prec b$, то неверно, что $b \prec a$.
- транзитивность. Если $a \prec b$ и $b \prec c$, то $a \prec c$.

Утверждение. Докажите, что

(1) Нестрогий порядок получается из строгого «добавлением» отношения эквивалентности, то есть $a \preccurlyeq b$ тогда и только тогда, когда $a \prec b$ или $a=b$.

(2) Строгий порядок получается из нестрогого «удалением» отношения эквивалентности, то есть $a \prec b$ тогда и только тогда, когда $a \preccurlyeq b$ или $a \neq b$.

(3) Докажите, что если задать на множестве нестрогий порядок или строгий порядок, в результате получится одна и та же структура.

Определение. Минимальным элементом множества M называется такой элемент $a \in M$, что не существует элемента $b \in M$ такого, что $b \prec a$.

Определение. Наименьшим э элементом множества M называется такой элемент $a \in M$, что для любого элемента $b \in M$ верно, что , что $a \preccurlyeq b$.

Упражнение. Приведите пример множества, когда минимальный элемент существует, а наименьший – нет.

Упражнение. Докажите, что наименьший элемент всегда единственный.

Определение. Диаграмма Хассе частично упорядоченного множества M – ориентированный граф, где вершинами служат элементы множества M, при этом вершину a изображают ниже вершины b и соединяют их ребром, если $a < b$ и нет такого элемента c, что $a < c < b$ (в этом случае еще говорят, что элемент b непосредственно следует за a или b покрывает a).

Диаграмму Хассе любого конечного упорядоченного множества M можно построить следующим образом. Берем в M множество M_1 всех минимальных элементов (элемент a называется минимальным, если не существует такого b, что $b < a$) и изображаем их точками, расположенными горизонтально (это нижний уровень). Затем среди оставшихся элементов выберем минимальные и поместим их на второй снизу горизонтальный уровень и т.д. В итоге упорядоченное множество M разбивается на уровни, причем ребра проходят только между различными уровнями, а внутри уровней ребер нет.

Примеры ЧУМов

- Натуральные числа
- Вещественный числа
- Комплексные числа с покоординатным порядком
- Слова (покоординатный порядок или лексикографический порядок
- Подмножества одного множества
- Двоичные лова длины n. $a \preccurlyeq b$, если a можно получить из b заменой некоторых единиц на нули
- Паросочетания в графах
- Фигуры на плоскости по «вмещению»
- Диаграммы Юнга

Тридцать третья Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2017 года.

9 класс, частично упорядоченные множества, 22 июля

Определение. Множество называется линейно упорядоченным, если в нем любые два элемента можно сравнить.

Определение. Множество элементов называется цепью, если оно линейно упорядочено.

Определение. Множество элементов $D \subseteq A$ называется антицепью, если все элементы этого множества попарно несравнимы. Число элементов конечной антицепи называется ее шириной. Шириной конечного частично упорядоченного множества называется наибольшая ширина среди всех антицепей в нем.

Теорема 1. Если d – длина наибольшей цепи в ЧУМе, то ЧУМ можно разбить на d антицепей.

Теорема 2. В ЧУМе из mn+1 элемента есть либо цепь из n+1 элемента, либо антицепь из m+1 элемента.

ЗАДАЧИ

1. На прямой дано 50 отрезков. Докажите, что либо найдутся 8 попарно непересекающихся отрезков, либо найдутся 8 отрезков, имеющих общую точку.

2. Пусть G– турнирный граф на n^2+1 вершине. Его ребра раскрашены в два цвета так, что нет одноцветных циклов. Докажите, что найдется одноцветный простой путь, проходящий по n ребрам.

3. Петя нарисовал 101 прямоугольник с натуральными сторонами, не большими 100. Докажите, что он может выбрать три из них A, B и С, такие, что A можно поместить в B, а B можно поместить в С (прямоугольники можно поворачивать).

4. Дано несколько различных натуральных чисел. Известно, что среди любых трёх из них можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое. Докажите, что числа можно покрасить в два цвета так, чтобы для любых двух чисел одного цвета одно делилось на другое.

5. Теорема Дилуорса. Обозначим через n наибольшее количество элементов антицепи данного конечного частично упорядоченного множества M. Тогда M можно разбить на n цепей.

(другая формулировка) Ширина ЧУМа равна наименьшему количеству цепей в разбиении на непересекающиеся цепи.

6. Рассмотрим все подмножества данного множества, упорядоченные по включению. Найдите его ширину.

7. Дано 10 чисел в ряд. Разрешается стереть число и затем вписать его между двумя любыми числами. Докажите, что не более чем за 6 действий числа можно упорядочить числа по (нестрогому) возрастанию или убыванию.

8. Имеется последовательность вещественных чисел. Докажите, что в ней есть или убывающая, или неубывающая подпоследовательность.

9. Докажите, что в любом бесконечном ЧУМе есть или бесконечная цепь, или бесконечная антицепь.