

9 класс, четность биномиальных коэффициентов, спекурс 5 июля

Теория. Сколько нечетных чисел в n -ной строке треугольника Паскаля?

Упражнение. 1) Докажите, что их всегда четное количество.

2) Докажите, что их не меньше двух и не больше $n+1$.

3) В каких строках их ровно 2?

4) Какие строках все биномиальные коэффициенты – нечетные?

1. Докажите, что количество чисел $k = 0, 1, 2, \dots, n$, для которых число C_n^k нечетно, есть степень двойки

2. Докажите, что количество чисел $k = 0, 1, 2, \dots, n$, для которых число C_n^k нечетно, равно 2^a , где a — количество единиц в двоичной записи числа n .

3. Докажите, что C_n^k нечетно тогда и только тогда, когда выполняется свойство, что если в двоичной записи n в каком-то разряде стоит 0, то и в двоичной записи k в этом же разряде стоит 0, по индукции

4. а) Докажите, что $(1+x)^{2^n} \equiv 1+x^{2^n} \pmod{2}$

б) Докажите задачу 3, рассмотрев бином $(1+x)^n$ по mod 2.

5. Рассмотрим n -ю строку треугольника Паскаля по mod 2 как двоичную запись некоторого натурального числа K_n . Докажите, что $K_n = F_{i_1} \cdot F_{i_2} \cdot \dots \cdot F_{i_s}$, где i_1, \dots, i_s — номера разрядов, в которых в двоичной записи n стоят единицы, и $F_i = 2^{2^i} + 1$ (числа Ферма)

9 класс, четность биномиальных коэффициентов, спекурс 5 июля

Теория. Сколько нечетных чисел в n -ной строке треугольника Паскаля?

Упражнение. 1) Докажите, что их всегда четное количество.

2) Докажите, что их не меньше двух и не больше $n+1$.

3) В каких строках их ровно 2?

4) Какие строках все биномиальные коэффициенты – нечетные?

1. Докажите, что количество чисел $k = 0, 1, 2, \dots, n$, для которых число C_n^k нечетно, есть степень двойки

2. Докажите, что количество чисел $k = 0, 1, 2, \dots, n$, для которых число C_n^k нечетно, равно 2^a , где a — количество единиц в двоичной записи числа n .

3. Докажите, что C_n^k нечетно тогда и только тогда, когда выполняется свойство, что если в двоичной записи n в каком-то разряде стоит 0, то и в двоичной записи k в этом же разряде стоит 0, по индукции

4. а) Докажите, что $(1+x)^{2^n} \equiv 1+x^{2^n} \pmod{2}$

б) Докажите задачу 3, рассмотрев бином $(1+x)^n$ по mod 2.

5. Рассмотрим n -ю строку треугольника Паскаля по mod 2 как двоичную запись некоторого натурального числа K_n . Докажите, что $K_n = F_{i_1} \cdot F_{i_2} \cdot \dots \cdot F_{i_s}$, где i_1, \dots, i_s — номера разрядов, в которых в двоичной записи n стоят единицы, и $F_i = 2^{2^i} + 1$ (числа Ферма)