

9 класс, композиции гомотетий и движений, 10 июля

1. Трапеции $ABCD$ и $APQD$ имеют общее основание AD , $BC \neq AD$, $BC \neq PQ$. Докажите, что на одной прямой лежат точки пересечения следующих пар прямых а) AB и CD , AP и DQ , BP и CQ ; б) AB и CD , AQ и DP , BQ и CP .
2. Пусть A, B, C — три точки на одной прямой, A', B', C' — три точки на другой прямой. Пусть три прямые AB', BC', CA' пересекают три прямые $A'B, B'C, C'A$, соответственно в точках X, Y, Z . Тогда точки X, Y, Z лежат на одной прямой.
3. Середины сторон BC и B_1C_1 правильных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают (вершины обоих треугольников перечислены по часовой стрелке). Найдите величину угла между прямыми AA_1 и BB_1 , а также отношение длин отрезков AA_1 и BB_1 .
4. На сторонах AB и BC остроугольного треугольника ABC построены как на основаниях равнобедренные треугольники AFB и BLC , причём один из них лежит внутри треугольника ABC , а другой построен во внешнюю сторону. При этом $\angle AFB = \angle BLC$ и $\angle CAF = \angle ACL$. Докажите, что прямая FL отсекает от угла ABC равнобедренный треугольник.
5. **Точка Микеля.** Четыре пересекающиеся прямые образуют четыре треугольника. Докажите, что четыре окружности, описанные около этих треугольников, имеют одну общую точку.
6. На диагонали BD вписанного четырёхугольника $ABCD$ выбрана такая точка K , что $\angle AKB = \angle ADC$. Пусть I и I' — центры вписанных окружностей треугольников ACD и ABK соответственно. Отрезки II' и BD пересекаются в точке X . Докажите, что точки A, X, I, D лежат на одной окружности.
7. Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке M . Биссектриса угла AMB пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K . Докажите, что прямая, проходящая через центры вписанных окружностей треугольников AKM и BKM , перпендикулярна биссектрисе угла AKB .
8. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность w ($AD \parallel BC$). Окружности, вписанные в треугольники ABC и ABD , касаются оснований трапеции BC и AD в точках P и Q соответственно. Точки X и Y — середины дуг BC и AD окружности w , не содержащих точек A и B соответственно. Докажите, что прямые XP и YQ пересекаются на окружности w .

9 класс, композиции гомотетий и движений, 10 июля

1. Трапеции $ABCD$ и $APQD$ имеют общее основание AD , $BC \neq AD$, $BC \neq PQ$. Докажите, что на одной прямой лежат точки пересечения следующих пар прямых а) AB и CD , AP и DQ , BP и CQ ; б) AB и CD , AQ и DP , BQ и CP .
2. Пусть A, B, C — три точки на одной прямой, A', B', C' — три точки на другой прямой. Пусть три прямые AB', BC', CA' пересекают три прямые $A'B, B'C, C'A$, соответственно в точках X, Y, Z . Тогда точки X, Y, Z лежат на одной прямой.
3. Середины сторон BC и B_1C_1 правильных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ совпадают (вершины обоих треугольников перечислены по часовой стрелке). Найдите величину угла между прямыми AA_1 и BB_1 , а также отношение длин отрезков AA_1 и BB_1 .
4. На сторонах AB и BC остроугольного треугольника ABC построены как на основаниях равнобедренные треугольники AFB и BLC , причём один из них лежит внутри треугольника ABC , а другой построен во внешнюю сторону. При этом $\angle AFB = \angle BLC$ и $\angle CAF = \angle ACL$. Докажите, что прямая FL отсекает от угла ABC равнобедренный треугольник.
5. **Точка Микеля.** Четыре пересекающиеся прямые образуют четыре треугольника. Докажите, что четыре окружности, описанные около этих треугольников, имеют одну общую точку.
6. На диагонали BD вписанного четырёхугольника $ABCD$ выбрана такая точка K , что $\angle AKB = \angle ADC$. Пусть I и I' — центры вписанных окружностей треугольников ACD и ABK соответственно. Отрезки II' и BD пересекаются в точке X . Докажите, что точки A, X, I, D лежат на одной окружности.
7. Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке M . Биссектриса угла AMB пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K . Докажите, что прямая, проходящая через центры вписанных окружностей треугольников AKM и BKM , перпендикулярна биссектрисе угла AKB .
8. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность w ($AD \parallel BC$). Окружности, вписанные в треугольники ABC и ABD , касаются оснований трапеции BC и AD в точках P и Q соответственно. Точки X и Y — середины дуг BC и AD окружности w , не содержащих точек A и B соответственно. Докажите, что прямые XP и YQ пересекаются на окружности w .