

9 класс, комплексные числа - задачи, 11 июля

1. Решите в действительных числах системы а) $\begin{cases} \sin x + \sin y + \sin z = 0 \\ \cos x + \cos y + \cos z = 0 \end{cases}$;
б) $\begin{cases} \sin x + \sin y + \sin z = 1 \\ \cos x + \cos y + \cos z = 0 \end{cases}$.
2. При каких натуральных n система имеет решение $\begin{cases} \sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n = 0 \\ \cos x_1 + \cos x_2 + \dots + \cos x_n = 0 \end{cases}$?
 $|x_i - x_j| \leq \pi, i, j = 1, 2, \dots, n$
3. Пусть $z, u, w \in \mathbb{C}$, $|z|, |u|, |w| \leq 1$. Докажите, что $|(z-u)(z-w)(u-w)|^2 \leq 27$.
4. Правильный n - угольник вписан в единичную окружность. Докажите, что
а) сумма квадратов всех его сторон и всех его диагоналей равна n^2 ;
б) сумма длин всех его сторон и диагоналей равна $n \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}$;
в) произведение длин всех его сторон и диагоналей равно $n^{\frac{n}{2}}$.
5. Обозначим вершины правильного n -угольника через A_1, A_2, \dots, A_n , при этом A_m совпадает с A_k , если $m \equiv k \pmod{n}$. Докажите, что если $n=2k+1$, то $|OA_1 + OA_4 + OA_9 + \dots + OA_{n^2}| = \sqrt{n}$, где O – центр n -угольника.
6. Вершины правильного n -угольника раскрашены в несколько цветов так, что все его одноцветные вершины образуют правильные многоугольники. Докажите, что среди них найдутся хотя бы два одинаковых.
7. Докажите, что $\cos nx$ выражается как многочлен одной переменной от $\cos x$ соответственно.
8. Найдите сумму $\sum_{k=0}^n \cos kx$
9. Найдите сумму $\sum_{k=0}^n \cos^2 kx$
10. Докажите, что $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^{2k} = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{\pi n}{4}$

9 класс, комплексные числа - задачи, 11 июля

1. Решите в действительных числах системы а) $\begin{cases} \sin x + \sin y + \sin z = 0 \\ \cos x + \cos y + \cos z = 0 \end{cases}$;
б) $\begin{cases} \sin x + \sin y + \sin z = 1 \\ \cos x + \cos y + \cos z = 0 \end{cases}$.
2. При каких натуральных n система имеет решение $\begin{cases} \sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n = 0 \\ \cos x_1 + \cos x_2 + \dots + \cos x_n = 0 \end{cases}$?
 $|x_i - x_j| \leq \pi, i, j = 1, 2, \dots, n$
3. Пусть $z, u, w \in \mathbb{C}$, $|z|, |u|, |w| \leq 1$. Докажите, что $|(z-u)(z-w)(u-w)|^2 \leq 27$.
4. Правильный n - угольник вписан в единичную окружность. Докажите, что
а) сумма квадратов всех его сторон и всех его диагоналей равна n^2 ;
б) сумма длин всех его сторон и диагоналей равна $n \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}$;
в) произведение длин всех его сторон и диагоналей равно $n^{\frac{n}{2}}$.
5. Обозначим вершины правильного n -угольника через A_1, A_2, \dots, A_n , при этом A_m совпадает с A_k , если $m \equiv k \pmod{n}$. Докажите, что если $n=2k+1$, то $|OA_1 + OA_4 + OA_9 + \dots + OA_{n^2}| = \sqrt{n}$, где O – центр n -угольника.
6. Вершины правильного n -угольника раскрашены в несколько цветов так, что все его одноцветные вершины образуют правильные многоугольники. Докажите, что среди них найдутся хотя бы два одинаковых.
7. Докажите, что $\cos nx$ выражается как многочлен одной переменной от $\cos x$ соответственно.
8. Найдите сумму $\sum_{k=0}^n \cos kx$
9. Найдите сумму $\sum_{k=0}^n \cos^2 kx$
10. Докажите, что $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^{2k} = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{\pi n}{4}$