Тридцать третья Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2017 года.

9 класс, усреднение, 22 июля

1. Несколько человек провели круговой турнир по пинг-понгу (ничьих не бывает). Партия называется странной, если в ней победил человек, набравший меньше очков, чем проигравший. Докажите, что доля странных партий меньше ¾.

2. На столе лежат несколько часов, каждые часы идут со своей постоянной скоростью, отношение любых двух скоростей рационально. Докажите, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок будет больше, чем сумма расстояний до центров часов.

3. Из центра окружности выходят N векторов, делящих окружность на равные дуги. Некоторые векторы синие, остальные – красные. Сумму углов "красный вектор – синий вектор" (каждый угол вычисляется от красного вектора к синему по часовой стрелке) делят на общее число всех таких углов. Докажите, что полученная величина "среднего угла" 180°.

4. Квадрат разбит на квадратики так, что любая вертикальная прямая пересекает k квадратиков, а любая горизонтальная - l квадратиков. Докажите, что $k=l$.

5. а) В компании из 20 человек у каждого хотя бы 5 знакомых. Докажите, что найдутся такие две пары людей, что любые два человека из разных пар знакомы. Б) Пусть в компании из 20 человек между ними 50 знакомств. Докажите то же самое.

6. В классе из 32 человек создано 33 кружка, причем каждый кружок состоит из трех человек, никакие два кружка не совпадают по составу, каждый ребенок ходит хотя бы в один кружок. Докажите, что найдутся два кружка, которые пересекаются ровно по одному ученику.

7. Участники шахматного турнира сыграли друг с другом по одной партии. Для каждого участника A было подсчитано число набранных им очков (за победу дается 1 очко, за ничью – ½ очка, за поражение – 0 очков) и *коэффициент силы* по формуле: сумма очков тех участников, у кого A выиграл, минус сумма очков тех, кому он проиграл. Могут ли коэффициенты силы всех участников быть больше 0?

8. **.** Даны две системы векторов A и B, причем угол между любыми двумя векторами в градусах рационален. Известно, для любой прямой l сумма длин проекций векторов А на нее больше суммы длин проекций векторов B. Докажите, что сумма длин векторов системы A больше суммы длин векторов системы B.

9. У каждого из горожан знакомые составляют не менее 30% населения города. Житель идёт на выборы, если баллотируется хотя бы один из его знакомых. Докажите, что можно так провести выборы мэра города из двух кандидатов, что в них примет участие не менее половины жителей.

10 В единичном квадрате расположено несколько отрезков, параллельных сторонам. Сумма длин этих отрезков равна 18. Докажите, что среди частей, на которые эти отрезки разбивают квадрат, найдется часть площади не меньшей 0, 01.

Тридцать третья Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2017 года.

9 класс, усреднение, 22 июля

1. Несколько человек провели круговой турнир по пинг-понгу (ничьих не бывает). Партия называется странной, если в ней победил человек, набравший меньше очков, чем проигравший. Докажите, что доля странных партий меньше ¾.

2. На столе лежат несколько часов, каждые часы идут со своей постоянной скоростью, отношение любых двух скоростей рационально. Докажите, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок будет больше, чем сумма расстояний до центров часов.

3. Из центра окружности выходят N векторов, делящих окружность на равные дуги. Некоторые векторы синие, остальные – красные. Сумму углов "красный вектор – синий вектор" (каждый угол вычисляется от красного вектора к синему по часовой стрелке) делят на общее число всех таких углов. Докажите, что полученная величина "среднего угла" 180°.

4. Квадрат разбит на квадратики так, что любая вертикальная прямая пересекает k квадратиков, а любая горизонтальная - l квадратиков. Докажите, что $k=l$.

5. а) В компании из 20 человек у каждого хотя бы 5 знакомых. Докажите, что найдутся такие две пары людей, что любые два человека из разных пар знакомы. Б) Пусть в компании из 20 человек между ними 50 знакомств. Докажите то же самое.

6. В классе из 32 человек создано 33 кружка, причем каждый кружок состоит из трех человек, никакие два кружка не совпадают по составу, каждый ребенок ходит хотя бы в один кружок. Докажите, что найдутся два кружка, которые пересекаются ровно по одному ученику.

7. Участники шахматного турнира сыграли друг с другом по одной партии. Для каждого участника A было подсчитано число набранных им очков (за победу дается 1 очко, за ничью – ½ очка, за поражение – 0 очков) и *коэффициент силы* по формуле: сумма очков тех участников, у кого A выиграл, минус сумма очков тех, кому он проиграл. Могут ли коэффициенты силы всех участников быть больше 0?

8. **.** Даны две системы векторов A и B, причем угол между любыми двумя векторами в градусах рационален. Известно, для любой прямой l сумма длин проекций векторов А на нее больше суммы длин проекций векторов B. Докажите, что сумма длин векторов системы A больше суммы длин векторов системы B.

9. У каждого из горожан знакомые составляют не менее 30% населения города. Житель идёт на выборы, если баллотируется хотя бы один из его знакомых. Докажите, что можно так провести выборы мэра города из двух кандидатов, что в них примет участие не менее половины жителей.

10 В единичном квадрате расположено несколько отрезков, параллельных сторонам. Сумма длин этих отрезков равна 18. Докажите, что среди частей, на которые эти отрезки разбивают квадрат, найдется часть площади не меньшей 0, 01.