9 класс, поворотная гомотетия, теория, 10 июля

Поворотной гомотетией *с коэффициентом k и углом φ называется композиция гомотетии с коэффициентом k и поворота на угол φ, имеющих общий центр* $H_O^k \circ R_O^\alpha$*. При этом можно считать, что k>0 и 0°≤φ<360°.*

Гомотетическим поворотом *с коэффициентом k и углом φ называется композиция поворота на угол φ и гомотетии с коэффициентом k, имеющих общий центр* $R_O^\alpha \circ H_O^k$*.При этом можно считать, что k>0 и 0°≤φ<360°.*

Т6. Докажите, что гомотетический поворот и поворотная гомотетия – это одно и то же (то есть их композиция коммутативна).

Из Т3, Т5, Т6 следует, что любое подобие I рода – композиция поворота и гомотетии.

Т7. Рассмотрим $F = H_B^k \circ R_A^\alpha$, *A*≠*B*, *k*≠1, α≠0, π. **а)** Найдите точку A_1 такую, что $F(A) = A_1$. **б)** Найдите точку B_0 такую, что $F(B_0) = B$. **в)** Докажите, что подобие I рода *F* однозначно задается образами точек *A* и B_0.

Т8**. **а) Докажите, что существует единственная окружность ω, проходящая через точку A_1 и касающаяся прямой AB_0 в точке B_0 **б)** Пусть точка *O* – это точка пересечения окружности ω и окружности, описанной около треугольника ABB_0. Докажите, что рассмотренное подобие $H_B^k \circ R_A^\alpha = H_O^k \circ R_O^\alpha$.

Т9. Рассмотрим $F = R_A^\alpha \circ H_B^k$, *A*≠*B*, *k*≠1, α≠0, π. Постройте такую точку *O*, что $R_A^\alpha \circ H_B^k = R_O^\alpha \circ H_O^k$ (построение аналогично Т7 и Т8).

Т10. Теорема. Каждое подобие первого рода является гомотетией, движением или поворотной гомотетией.

Т11. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках *A* и *B*. Докажите, что одну из них можно отобразить на другую поворотной гомотетией вокруг точки *A*. Докажите, что прямая, соединяющая точку на ω_1 с ее образом на ω_2, проходит через точку *B*.

Т12. Докажите, что центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок *AB* в отрезок A_1B_1 совпадает с центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AA_1 в отрезок BB_1.

Т13. Даны две неконцентрические окружности S_1 и S_2. Докажите, что существуют ровно две поворотные гомотетии с углом поворота 90^o, переводящие S_1 в S_2.

Тридцать третья Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2017 года.

9 класс, поворотная гомотетия, теория, 10 июля

Поворотной гомотетией *с коэффициентом k и углом φ называется композиция гомотетии с коэффициентом k и поворота на угол φ, имеющих общий центр* $H_O^k \circ R_O^\alpha$*. При этом можно считать, что k>0 и 0°≤φ<360°.*

Гомотетическим поворотом *с коэффициентом k и углом φ называется композиция поворота на угол φ и гомотетии с коэффициентом k, имеющих общий центр* $R_O^\alpha \circ H_O^k$*.При этом можно считать, что k>0 и 0°≤φ<360°.*

Т6. Докажите, что гомотетический поворот и поворотная гомотетия – это одно и то же (то есть их композиция коммутативна).

Из Т3, Т5, Т6 следует, что любое подобие I рода – композиция поворота и гомотетии.

Т7. Рассмотрим $F = H_B^k \circ R_A^\alpha$, *A*≠*B*, *k*≠1, α≠0, π. **а)** Найдите точку A_1 такую, что $F(A) = A_1$. **б)** Найдите точку B_0 такую, что $F(B_0) = B$. **в)** Докажите, что подобие I рода *F* однозначно задается образами точек *A* и B_0.

Т8**. **а) Докажите, что существует единственная окружность ω, проходящая через точку A_1 и касающаяся прямой AB_0 в точке B_0 **б)** Пусть точка *O* – это точка пересечения окружности ω и окружности, описанной около треугольника ABB_0. Докажите, что рассмотренное подобие $H_B^k \circ R_A^\alpha = H_O^k \circ R_O^\alpha$.

Т9. Рассмотрим $F = R_A^\alpha \circ H_B^k$, *A*≠*B*, *k*≠1, α≠0, π. Постройте такую точку *O*, что $R_A^\alpha \circ H_B^k = R_O^\alpha \circ H_O^k$ (построение аналогично Т7 и Т8).

Т10. Теорема. Каждое подобие первого рода является гомотетией, движением или поворотной гомотетией.

Т11. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках *A* и *B*. Докажите, что одну из них можно отобразить на другую поворотной гомотетией вокруг точки *A*. Докажите, что прямая, соединяющая точку на ω_1 с ее образом на ω_2, проходит через точку *B*.

Т12. Докажите, что центр поворотной гомотетии, переводящей отрезок *AB* в отрезок A_1B_1 совпадает с центром поворотной гомотетии, переводящей отрезок AA_1 в отрезок BB_1.

Т13. Даны две неконцентрические окружности S_1 и S_2. Докажите, что существуют ровно две поворотные гомотетии с углом поворота 90^o, переводящие S_1 в S_2.