Тридцать третья Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2017 года.

Заключительная олимпиада. 23.07.2017

1. Конечное множество S точек целочисленной решетки на плоскости назовем *двусоседним множеством*, если для каждой точки $(p,q) \in S$ ровно две точки из $(p+1,q)$, $(p-1,q)$, $(p,q-1)$, $(p,q+1)$ принадлежат S. Для каких n существует двусоседнее множество из n точек?

2. На высоте AK треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на перпендикуляре, опущенном из точки A на прямую DE.

3. У чисел n, $n+100$, $n+200$ наибольшие собственные делители равны. Найдите, чему может быть равно n. (Собственным делителем числа называется делитель, отличный от 1 и от самого числа).

4. На нижней горизонтали доски 2017×2017 стоят пять роботов. Оператор может отдать любому из роботов одну из следующих четырех команд: "вверх", "вниз", "влево" или "вправо", после чего робот движется в указанном ему направлении до ближайшего препятствия (т.е. до тех пор, пока он не достигнет края доски или не "упрется" в другого робота). Роботы могут ходить в любом порядке, но в каждый момент времени может двигаться только один робот. Можно ли так командовать роботами, чтобы они в итоге стали в виде "креста" (т.е. один из роботов стоял в некоторой клетке, а остальные четыре — в соседних с ней клетках)?

5. Найдите все многочлены $P(x)$ с целыми коэффициентами, такие, что для бесконечного числа натуральных n число $P(P(n)+n)$ является простым.

Заключительная олимпиада. Вывод

6. На продолжении стороны AD прямоугольника $ABCD$ за точку D выбрана точка E. Луч EC вторично пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABE, в точке F. Лучи DC и AF пересекаются в точке P. На прямую ℓ, проходящую через точку E параллельно прямой AF, опущен перпендикуляр CH. Докажите, что прямая PH касается окружности ω.

7. Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна 2. При $n \geq 4$ докажите неравенство

$$\frac{x_1}{1+x_2^2} + \frac{x_2}{1+x_3^2} + \cdots + \frac{x_n}{1+x_1^2} \geq \frac{3}{2}.$$

8. Имеется 25 масок, каждая своего цвета. k мудрецов играют в игру: им показывают все маски, потом они договариваются между собой, после чего им надевают маски таким образом, что каждый из них видит маски на всех остальных (но не знает, на ком они надеты) и не видит свою. Никакие формы взаимодействия при этом не разрешаются. Все они одновременно называют по одному цвету, пытаясь угадать цвет своей маски. При каком наименьшем k они могут так заранее договориться, чтобы хотя бы один из них непременно угадал?

Тридцать третья Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2017 года.

Заключительная олимпиада. 23.07.2017

1. Конечное множество S точек целочисленной решетки на плоскости назовем *двусоседним множеством*, если для каждой точки $(p,q) \in S$ ровно две точки из $(p+1,q)$, $(p-1,q)$, $(p,q-1)$, $(p,q+1)$ принадлежат S. Для каких n существует двусоседнее множество из n точек?

2. На высоте AK треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на перпендикуляре, опущенном из точки A на прямую DE.

3. У чисел n, $n+100$, $n+200$ наибольшие собственные делители равны. Найдите, чему может быть равно n. (Собственным делителем числа называется делитель, отличный от 1 и от самого числа).

4. На нижней горизонтали доски 2017×2017 стоят пять роботов. Оператор может отдать любому из роботов одну из следующих четырех команд: "вверх", "вниз", "влево" или "вправо", после чего робот движется в указанном ему направлении до ближайшего препятствия (т.е. до тех пор, пока он не достигнет края доски или не "упрется" в другого робота). Роботы могут ходить в любом порядке, но в каждый момент времени может двигаться только один робот. Можно ли так командовать роботами, чтобы они в итоге стали в виде "креста" (т.е. один из роботов стоял в некоторой клетке, а остальные четыре — в соседних с ней клетках)?

5. Найдите все многочлены $P(x)$ с целыми коэффициентами, такие, что для бесконечного числа натуральных n число $P(P(n)+n)$ является простым.

Заключительная олимпиада. Вывод

6. На продолжении стороны AD прямоугольника $ABCD$ за точку D выбрана точка E. Луч EC вторично пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABE, в точке F. Лучи DC и AF пересекаются в точке P. На прямую ℓ, проходящую через точку E параллельно прямой AF, опущен перпендикуляр CH. Докажите, что прямая PH касается окружности ω.

7. Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна 2. При $n \geq 4$ докажите неравенство

$$\frac{x_1}{1+x_2^2} + \frac{x_2}{1+x_3^2} + \cdots + \frac{x_n}{1+x_1^2} \geq \frac{3}{2}.$$

8. Имеется 25 масок, каждая своего цвета. k мудрецов играют в игру: им показывают все маски, потом они договариваются между собой, после чего им надевают маски таким образом, что каждый из них видит маски на всех остальных (но не знает, на ком они надеты) и не видит свою. Никакие формы взаимодействия при этом не разрешаются. Все они одновременно называют по одному цвету, пытаясь угадать цвет своей маски. При каком наименьшем k они могут так заранее договориться, чтобы хотя бы один из них непременно угадал?