Матбой

8-9 класс

17.07.17

1. Среди $2^{n+1}-1$ монет 2^n монет фальшивые и 2^n-1 — настоящие. Все настоящие весят одинаково, все фальшивые весят одинаково, но они легче настоящих. Можно ли за n взвешиваний на чашечных весах без гирь найти хотя бы одну настоящую монету?

2. На стороне BC квадрата $ABCD$ выбрана точка K. Прямая AK пересекается продолжение стороны CD в точке L, на луче AB за точкой B выбрана точка M, такая, что $CM \perp LK$, прямая MK пересекает сторону CD в точке N. Докажите, что описанная окружность ANL касается прямой AD.

3. Из кубиков $1\times1\times1$ склеен куб $3\times3\times3$. Постепенно Вася вырезает по одному маленькому кубику так, что:

- фигура остается цельной (не распадется на части);
- со стороны каждой грани исходного куба фигура выглядит как цельный квадрат 3×3.

Какое наибольшее количество кубиков мог вырезать Вася?

4. Вася выписал на доску несколько приведённых квадратных трёхчленов с положительными коэффициентами, у каждого из которых есть корень. За один ход Вася имеет право стереть два из написанных трёхчленов P и Q и заменить их на два других приведённых квадратных трёхчлена P_1 и Q_1, имеющих корни, так, что либо $P+Q=P_1+Q_1$, либо $PQ=P_1Q_1$. После нескольких таких операций все трёхчлены на доске имели положительные корни. Могло ли такое быть?

5. В графе со 100 вершинами без треугольников степени всех вершин больше 40. Докажите, что в этом графе нет циклов длины 5.

6. Пусть точка M — середина «меньшей» дуги AC описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямые, проходящие через центр окружности O параллельно MB и MC, пересекают стороны AB и AC в точках K и L соответственно. Прямая, проходящая через O параллельно KL, пересекает высоту треугольника ABC, опущенную из точки B, в точке T. Докажите, что $LT=OK$.

7. При каких n числа n^n+1 и $(2n)^{2n}+1$ являются простыми?

8. Задана последовательность $a_n=146^{n+1}+146^n-1$, где $n=1,2,3,\ldots$. Можно ли выбрать 2017 попарно взаимно простых чисел?

Матбой

8-9 класс

17.07.17

1. Среди $2^{n+1}-1$ монет 2^n монет фальшивые и 2^n-1 — настоящие. Все настоящие весят одинаково, все фальшивые весят одинаково, но они легче настоящих. Можно ли за n взвешиваний на чашечных весах без гирь найти хотя бы одну настоящую монету?

2. На стороне BC квадрата $ABCD$ выбрана точка K. Прямая AK пересекается продолжение стороны CD в точке L, на луче AB за точкой B выбрана точка M, такая, что $CM \perp LK$, прямая MK пересекает сторону CD в точке N. Докажите, что описанная окружность ANL касается прямой AD.

3. Из кубиков $1\times1\times1$ склеен куб $3\times3\times3$. Постепенно Вася вырезает по одному маленькому кубику так, что:

- фигура остается цельной (не распадется на части);
- со стороны каждой грани исходного куба фигура выглядит как цельный квадрат 3×3.

Какое наибольшее количество кубиков мог вырезать Вася?

4. Вася выписал на доску несколько приведённых квадратных трёхчленов с положительными коэффициентами, у каждого из которых есть корень. За один ход Вася имеет право стереть два из написанных трёхчленов P и Q и заменить их на два других приведённых квадратных трёхчлена P_1 и Q_1, имеющих корни, так, что либо $P+Q=P_1+Q_1$, либо $PQ=P_1Q_1$. После нескольких таких операций все трёхчлены на доске имели положительные корни. Могло ли такое быть?

5. В графе со 100 вершинами без треугольников степени всех вершин больше 40. Докажите, что в этом графе нет циклов длины 5.

6. Пусть точка M — середина «меньшей» дуги AC описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямые, проходящие через центр окружности O параллельно MB и MC, пересекают стороны AB и AC в точках K и L соответственно. Прямая, проходящая через O параллельно KL, пересекает высоту треугольника ABC, опущенную из точки B, в точке T. Докажите, что $LT=OK$.

7. При каких n числа n^n+1 и $(2n)^{2n}+1$ являются простыми?

8. Задана последовательность $a_n=146^{n+1}+146^n-1$, где $n=1,2,3,\ldots$. Можно ли выбрать 2017 попарно взаимно простых чисел?