

Вступительный тест. 3 июля

Имя, фамилия: _____

Геометрия

1. Напишите формулу (a) синуса суммы $\sin(\alpha + \beta)$; (b) суммы синусов $\sin \alpha + \sin \beta$.

2. Решите уравнение $\cos 2x + 3 \cos x - 1 = 0$.

3. (a) Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}(2, 5)$ и $\vec{b}(-8, 3)$. (b) Вычислите площадь параллелограмма, построенного на этих же векторах.

4. Дайте определение центра масс системы материальных точек.

5. Нарисуйте на картинке, как выглядит (a) $R_A^{60^\circ} \circ R_B^{60^\circ}$; (b) $R_A^{60^\circ} \circ R_B^{-60^\circ}$.

(a)

(b)

•
A

•
B

•
A

•
B

6. Что такое преобразование подобия? _____

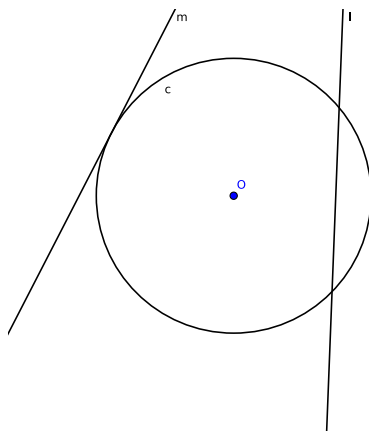
7. Чем отличается гомотетичный поворот от поворотной гомотетии? _____

8. (a) Дайте определение выпуклого многоугольника. _____

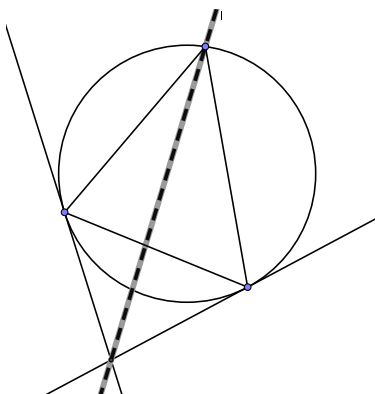
(b) Чем может являться выпуклая оболочка 5 различных точек? _____

(c) Сформулируйте теорему Хелли. _____

9. Нарисуйте образ прямых ℓ и m при инверсии относительно точки O с радиусом R .



10. Чем является прямая ℓ по отношению к вписанному в окружность треугольнику на данной картинке? _____



11. Какой точке изогонально сопряжен ортоцентр? _____

Алгебра

12. Вычислите (a) $(2 + 5i)(-8 + 3i)$; (b) $\frac{4+19i}{5+2i}$; (c) $(\sqrt{3} + i)^{20}$.

13. Дан многочлен $x^3 + 4x - 1$. Найдите сумму квадратов корней этого многочлена.

14. Выполните деление с остатком многочлена $4x^5 - x + 3$ на многочлен $x^3 + 2x^2 - 2$.

15. (a) Сформулируйте определение неприводимого многочлена.

(b) Сформулируйте критерий Эйзенштейна неприводимости многочлена.

16. Являются ли полями следующие объекты со стандартными операциями сложения и умножения? Если нет, то почему?

\mathbb{Z} : _____

\mathbb{Q} : _____

\mathbb{Z}_6 : _____

\mathbb{R} : _____

\mathbb{Z}_{13} : _____

\mathbb{R}_+ : _____

17. Сформулируйте неравенство Коши–Буняковского–Шварца.

18. Напишите определение предела последовательности.

19. Вычислите предел последовательности:

(a) $a_n = \frac{3n+1}{n+3}$ _____

(b) $a_n = (-1)^n$ _____

(c) $a_n = \sum_{i=1}^n (-1)^i$ _____

(d) $a_n = (-n)^{-n}$ _____

(e) заданной рекуррентно $a_0 = 1$, $a_n = 1 + 1/a_{n-1}$ _____

20. Предъявите явную формулу членов последовательности, заданной рекуррентно: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$ при $n \in \mathbb{N}$.

21. Сформулируйте теорему Эйлера. _____

Теория Чисел

22. Найдите показатель числа 4 по модулю 9. _____

23. Выпишите все невычеты по модулю 7. _____

24. Определите по аналогии с квадратичными вычетами кубические и ответьте, при простых числах какого вида такими являются не все вычеты.

Графы и Комбинаторика

25. Чему равно число Рамсея (a) $R_{3,3}$ _____; (b) $R_{3,4}$ _____?

26. Сформулируйте теорему Холла. _____

27. Чему равно количество ребер пятимерного куба? _____

28. Перемножьте перестановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Перемножьте их в обратном порядке. Найдите обратные к обоим получившимся произведениям. Чему равны порядки этих произведений?

29. Что такое частично упорядоченное множество? _____
