Матбой

8-9 класс

17.07.17

1. Пусть a — нечетное число. Докажите, что числа $a^{2^n}+2^{2^n}$ и $a^{2^m}+2^{2^m}$ взаимно просты при любых натуральных $n \neq m$.

2. Окружность, проходящая через вершины A и B остроугольного треугольника ABC пересекает вторично его стороны AC и BC в точках B_1 и A_1 соответственно. Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке P. Точка H — проекция P на BC. Докажите, что окружность, проходящая через середины отрезков CP, BP и AB, проходит через точку H.

3. Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d выполнено неравенство

$$\frac{a+b+c+d}{abcd} \leqslant \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}\,.$$

4. Среди $2^{n+1}-1$ монет 2^n монет фальшивые и 2^n-1 — настоящие. Все настоящие весят одинаково, все фальшивые весят одинаково, но они легче настоящих. Можно ли за n взвешиваний на чашечных весах без гирь найти хотя бы одну настоящую монету?

5. Из кубиков $1\times1\times1$ склеен куб $3\times3\times3$. Постепенно Вася вырезает по одному маленькому кубику так, что:

- фигура остается цельной (не распадется на части);
- со стороны каждой грани исходного куба фигура выглядит как цельный квадрат 3×3.

Какое наибольшее количество кубиков мог вырезать Вася?

6. Вася выписал на доску несколько приведённых квадратных трёхчленов с положительными коэффициентами, у каждого из которых есть корень. За один ход Вася имеет право стереть два из написанных трёхчленов P и Q и заменить их на два других приведённых квадратных трёхчлена P_1 и Q_1, имеющих корни, так, что либо $P+Q=P_1+Q_1$, либо $PQ=P_1Q_1$. После нескольких таких операций все трёхчлены на доске имели положительные корни. Могло ли такое быть?

7. В графе со 100 вершинами без треугольников степени всех вершин больше 40. Докажите, что в этом графе нет циклов длины 5.

8. Пусть точка M — середина «меньшей» дуги AC описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямые, проходящие через центр окружности O параллельно MB и MC, пересекают стороны AB и AC в точках K и L соответственно. Прямая, проходящая через O параллельно KL, пересекает высоту треугольника ABC, опущенную из точки B, в точке T. Докажите, что $LT=OK$.

9. При каких n числа n^n+1 и $(2n)^{2n}+1$ являются простыми?

10. Задана последовательность $a_n = 146^{n+1}+146^n-1$, где $n=1,2,3,\ldots$. Можно ли выбрать 2017 попарно взаимно простых чисел?

Матбой

8-9 класс

17.07.17

1. Пусть a — нечетное число. Докажите, что числа $a^{2^n}+2^{2^n}$ и $a^{2^m}+2^{2^m}$ взаимно просты при любых натуральных $n \neq m$.

2. Окружность, проходящая через вершины A и B остроугольного треугольника ABC пересекает вторично его стороны AC и BC в точках B_1 и A_1 соответственно. Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке P. Точка H — проекция P на BC. Докажите, что окружность, проходящая через середины отрезков CP, BP и AB, проходит через точку H.

3. Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d выполнено неравенство

$$\frac{a+b+c+d}{abcd} \leqslant \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{d^3}\,.$$

4. Среди $2^{n+1}-1$ монет 2^n монет фальшивые и 2^n-1 — настоящие. Все настоящие весят одинаково, все фальшивые весят одинаково, но они легче настоящих. Можно ли за n взвешиваний на чашечных весах без гирь найти хотя бы одну настоящую монету?

5. Из кубиков $1\times1\times1$ склеен куб $3\times3\times3$. Постепенно Вася вырезает по одному маленькому кубику так, что:

- фигура остается цельной (не распадется на части);
- со стороны каждой грани исходного куба фигура выглядит как цельный квадрат 3×3.

Какое наибольшее количество кубиков мог вырезать Вася?

6. Вася выписал на доску несколько приведённых квадратных трёхчленов с положительными коэффициентами, у каждого из которых есть корень. За один ход Вася имеет право стереть два из написанных трёхчленов P и Q и заменить их на два других приведённых квадратных трёхчлена P_1 и Q_1, имеющих корни, так, что либо $P+Q=P_1+Q_1$, либо $PQ=P_1Q_1$. После нескольких таких операций все трёхчлены на доске имели положительные корни. Могло ли такое быть?

7. В графе со 100 вершинами без треугольников степени всех вершин больше 40. Докажите, что в этом графе нет циклов длины 5.

8. Пусть точка M — середина «меньшей» дуги AC описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямые, проходящие через центр окружности O параллельно MB и MC, пересекают стороны AB и AC в точках K и L соответственно. Прямая, проходящая через O параллельно KL, пересекает высоту треугольника ABC, опущенную из точки B, в точке T. Докажите, что $LT=OK$.

9. При каких n числа n^n+1 и $(2n)^{2n}+1$ являются простыми?

10. Задана последовательность $a_n = 146^{n+1}+146^n-1$, где $n=1,2,3,\ldots$. Можно ли выбрать 2017 попарно взаимно простых чисел?