9 класс, матбой простых групп-1, 12 июля

1. В некотором царстве имеется 100 городов, некоторые из которых соединены дорогами (между двумя городами может быть больше одной дороги). Из любого города можно проехать по дорогам в любой другой, но если удалить все дороги любого замкнутого маршрута, это свойство нарушится. Какое наибольшее количество дорог может быть в этом царстве?

2. Касательная к описанной окружности треугольника ABC, проходящая через A, пересекает прямую BC в точке P. Точки Q и R симметричны точке P относительно прямых AB и AC соответственно. Докажите, что BC перпендикулярно QR.

3. Внутри треугольника ABC выбрана точка D. Оказалось, что окружности S_1 и S_2, вписанные в треугольники ABD и CBD соответственно, касаются друг друга. Докажите, что точка пересечения общих внешних касательных к S_1 и S_2 лежит на прямой AC.

4. Василий загадал натуральное число от 1 до 100. Ему можно задавать вопросы про это число, на которые можно ответить «да» или «нет». На первый вопрос он точно ответит правильно; но потом в какой-то момент у него может испортиться настроение, и он начнёт врать. Обратно настроение не улучшится. Докажите, что за 11 вопросов можно узнать загаданное число.

5. Дано положительное число $u < 1$. Положим $u_1 = 1+u$, $u_2 = 1/u_1+u$, ..., $u_{n+1} = 1/u_n+u$, при $n \geq 1$. Докажите, что $u_n > 1$ при всех натуральных n.

6. В некоторых клетках прямоугольной таблицы 100×2016 (100 строк, 2016 столбцов) расставлены звездочки так, что в каждом столбец есть хотя бы одна звездочка. Докажите, что найдется хотя бы одна звездочка такая, что в ее строке звездочек больше, чем в её столбце.

7. Дан неравнобедренный треугольник. Петя отмечает на плоскости точки, а Вася красит их в красный или синий цвет так, чтобы не было одноцветного треугольника с вершинами в отмеченных точках, подобного данному. Сколько ходов он сможет гарантированно продержаться?

8. Пусть a и b – взаимно простые натуральные числа, большие единицы. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных N, что a^k-b и b^l–a делятся на N при некоторых натуральных k и l.

Тридцать третья Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2017 года.

9 класс, матбой простых групп-1, 12 июля

1. В некотором царстве имеется 100 городов, некоторые из которых соединены дорогами (между двумя городами может быть больше одной дороги). Из любого города можно проехать по дорогам в любой другой, но если удалить все дороги любого замкнутого маршрута, это свойство нарушится. Какое наибольшее количество дорог может быть в этом царстве?

2. Касательная к описанной окружности треугольника ABC, проходящая через A, пересекает прямую BC в точке P. Точки Q и R симметричны точке P относительно прямых AB и AC соответственно. Докажите, что BC перпендикулярно QR.

3. Внутри треугольника ABC выбрана точка D. Оказалось, что окружности S_1 и S_2, вписанные в треугольники ABD и CBD соответственно, касаются друг друга. Докажите, что точка пересечения общих внешних касательных к S_1 и S_2 лежит на прямой AC.

4. Василий загадал натуральное число от 1 до 100. Ему можно задавать вопросы про это число, на которые можно ответить «да» или «нет». На первый вопрос он точно ответит правильно; но потом в какой-то момент у него может испортиться настроение, и он начнёт врать. Обратно настроение не улучшится. Докажите, что за 11 вопросов можно узнать загаданное число.

5. Дано положительное число $u < 1$. Положим $u_1 = 1+u$, $u_2 = 1/u_1+u$, ..., $u_{n+1} = 1/u_n+u$, при $n \geq 1$. Докажите, что $u_n > 1$ при всех натуральных n.

6. В некоторых клетках прямоугольной таблицы 100×2016 (100 строк, 2016 столбцов) расставлены звездочки так, что в каждом столбец есть хотя бы одна звездочка. Докажите, что найдется хотя бы одна звездочка такая, что в ее строке звездочек больше, чем в её столбце.

7. Дан неравнобедренный треугольник. Петя отмечает на плоскости точки, а Вася красит их в красный или синий цвет так, чтобы не было одноцветного треугольника с вершинами в отмеченных точках, подобного данному. Сколько ходов он сможет гарантированно продержаться?

8. Пусть a и b – взаимно простые натуральные числа, большие единицы. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных N, что a^k-b и b^l–a делятся на N при некоторых натуральных k и l.

Тридцать третья Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2017 года.

9 класс, матбой простых групп-2, 12 июля

1. В некотором царстве имеется 100 городов, некоторые из которых соединены дорогами (между двумя городами может быть больше одной дороги). Из любого города можно проехать по дорогам в любой другой, но если удалить все дороги любого замкнутого маршрута, это свойство нарушится. Какое наибольшее количество дорог может быть в этом царстве?

2. Касательная к описанной окружности треугольника ABC, проходящая через A, пересекает прямую BC в точке P. Точки Q и R симметричны точке P относительно прямых AB и AC соответственно. Докажите, что BC перпендикулярно QR.

3. На доске выписано натуральное число n. За один ход на доску выписывается еще одно натуральное число с условием, чтобы среднее арифметическое всех чисел на доске уменьшилось на 1. Какое наибольшее число ходов можно сделать?

4. Василий загадал натуральное число от 1 до 100. Ему можно задавать вопросы про это число, на которые можно ответить «да» или «нет». На первый вопрос он точно ответит правильно; но потом в какой-то момент у него может испортиться настроение, и он начнёт врать. Обратно настроение не улучшится. Докажите, что за 11 вопросов можно узнать загаданное число.

5. Каждую точку плоскости покрасили в чёрный или белый цвет. Докажите, что найдётся правильный треугольник, вершины которого покрашены в белый цвет, или правильный треугольник со стороной 1 с чёрными вершинами.

6. Точка P лежит на диагонали BD параллелограмма $ABCD$ с тупым углом A. Окружность с центром P, проходящая через A, вторично пересекает отрезок AD в точке Y, а отрезок AB в точке X. Прямая AP пересекает BC в точке Q и CD в точке R. Докажите, что угол XPY равен сумме углов XQY и XRY.

7. На некоторых полях доски 89×144 стоит по часовому. Часовой видит другого часового, если они стоят в одной строке или одном столбце и между ними нет часовых. Оказалось, что каждый часовой видит не более двух других часовых. Какое наибольшее количество часовых может стоять на доске?

8. Пусть a и b – взаимно простые натуральные числа, большие единицы. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных N, что a^k-b и b^l–a делятся на N при некоторых натуральных k и l.

Тридцать третья Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2017 года.

9 класс, матбой простых групп-2, 12 июля

1. В некотором царстве имеется 100 городов, некоторые из которых соединены дорогами (между двумя городами может быть больше одной дороги). Из любого города можно проехать по дорогам в любой другой, но если удалить все дороги любого замкнутого маршрута, это свойство нарушится. Какое наибольшее количество дорог может быть в этом царстве?

2. Касательная к описанной окружности треугольника ABC, проходящая через A, пересекает прямую BC в точке P. Точки Q и R симметричны точке P относительно прямых AB и AC соответственно. Докажите, что BC перпендикулярно QR.

3. На доске выписано натуральное число n. За один ход на доску выписывается еще одно натуральное число с условием, чтобы среднее арифметическое всех чисел на доске уменьшилось на 1. Какое наибольшее число ходов можно сделать?

4. Василий загадал натуральное число от 1 до 100. Ему можно задавать вопросы про это число, на которые можно ответить «да» или «нет». На первый вопрос он точно ответит правильно; но потом в какой-то момент у него может испортиться настроение, и он начнёт врать. Обратно настроение не улучшится. Докажите, что за 11 вопросов можно узнать загаданное число.

5. Каждую точку плоскости покрасили в чёрный или белый цвет. Докажите, что найдётся правильный треугольник, вершины которого покрашены в белый цвет, или правильный треугольник со стороной 1 с чёрными вершинами.

6. Точка P лежит на диагонали BD параллелограмма $ABCD$ с тупым углом A. Окружность с центром P, проходящая через A, вторично пересекает отрезок AD в точке Y, а отрезок AB в точке X. Прямая AP пересекает BC в точке Q и CD в точке R. Докажите, что угол XPY равен сумме углов XQY и XRY.

7. На некоторых полях доски 89×144 стоит по часовому. Часовой видит другого часового, если они стоят в одной строке или одном столбце и между ними нет часовых. Оказалось, что каждый часовой видит не более двух других часовых. Какое наибольшее количество часовых может стоять на доске?

8. Пусть a и b – взаимно простые натуральные числа, большие единицы. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных N, что a^k-b и b^l–a делятся на N при некоторых натуральных k и l.