Тридцать третья Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2017 года.

9 класс, выпуклость, 19-20 июля

Геометрическая фигура (на прямой, плоскости или в пространстве) называется *выпуклой*, если вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит соединяющий их отрезок.

Упражнение 1. Докажите выпуклость: **а)** полуплоскости; **б)** круга; **в)** пустого множества.

Упражнение 2. Пересечение любого набора выпуклых множеств выпукло.

Упражнение 3. Докажите выпуклость параллелограмма.

Упражнение 4. Как параллельная, так и центральная проекции выпуклой фигуры выпуклы.

Упражнение 5. Найдите все выпуклые подмножества прямой.

Назовем многоугольником внутренность некоторой конечной кусочно-линейной несамопересекающейся ломаной.

Докажите эквивалентность следующих определений.

Многоугольник является выпуклым, если

1. если часть плоскости, им ограниченная (*плоский многоугольник*) является выпуклым множеством;
2. если этот многоугольник лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону;
3. если все его внутренние углы меньше 180°;
4. если все его диагонали лежат полностью внутри него;
5. его граница видна полностью из любой его внутренней точки;
6. из любой внешней точки он виден под углом, меньшим 180°.

ЗАДАЧИ:

1. Докажите, что любой выпуклый многоугольник площади 1 можно вписать в **а)** параллелограмм; **б)** прямоугольник; **в)*** треугольник площади 2, и число 2 уменьшить нельзя.

2. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ лежит выпуклый четырёхугольник $A_5A_6A_7A_8$. Внутри $A_5A_6A_7A_8$ выбрана точка A_9. Никакие три из этих девяти точек не лежат на одной прямой. Докажите, что можно выбрать из них 5 точек, расположенных в вершинах выпуклого пятиугольника.

Выпуклой оболочкой множества X называется наименьшее выпуклое множество, содержащее X, т.е. такое выпуклое множество, содержащее данную фигуру, что оно содержится в любом другом выпуклом множестве, содержащем данную фигуру. Выпуклая оболочка называется conv X.

Упражнение 6. Докажите, что $conv\ X = \bigcap_{\substack{X\subset A \\ A-\text{выпукл}}} A$;

Упражнение 7. Докажите, что выпуклая оболочка единственна

Упражнение 8. Докажите, что X – выпуклое множество тогда и только тогда, когда X = conv X.

Упражнение 9. Докажите, что выпуклая оболочка конечной системы точек – пересечение конечного числа полуплоскостей.

Упражнение 10. Выпуклое замыкание конечного множества точек, не лежащих на одной прямой, является выпуклым многоугольником.

Теорема Каратеодори. Если точка принадлежит выпуклой оболочке системы из конечного числа точек, то она либо совпадает с одной из точек системы, либо принадлежит отрезку, соединяющему две точки из системы, либо принадлежит треугольнику с вершинами из той же системы.

Теорема Радона. Любую конечную систему, состоящую из не менее чем четырех точек, можно разбить на две подсистемы так, чтобы их выпуклые оболочки пересекались.

ЗАДАЧИ:

3. На плоскости дано *n*>4 точек. Известно, что любые 4 из них являются вершинами выпуклого четырехугольника. Докажите, что эти *n* точек являются вершинами выпуклого *n*-угольника.

4. На плоскости дано несколько правильных n-угольников. Докажите, что выпуклая оболочка их вершин имеет не менее n углов.

5. В любом выпуклом многоугольнике, кроме параллелограмма, можно выбрать три стороны, при продолжении которых образуется треугольник, объемлющий данный многоугольник. Докажите это.

6. Найти наименьшее *n* такое, что любой выпуклый 100-угольник можно получить в виде пересечения *n* треугольников. Докажите, что для меньших *n* это можно сделать не с любым выпуклым 100-угольником.

7. Докажите, что в выпуклый многоугольник с площадью S и периметром P всегда можно заключить круг радиуса S/P.

8. На плоскости сидят несколько тараканов, которые движутся с равными по модулю скоростями в попарно неравных направлениях. Докажите, что рано или поздно они окажутся в вершинах выпуклого многоугольника.