9 класс, разноделимость, 6 июля

1. а) **<u>Теорема Вильсона.</u>** $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда n – простое число. **б)** Докажите, что $C_{p-1}^{k} \equiv (-1)^k \pmod{p}$ при простом p.

2. Найдите остаток числа $(2p-1)!$ от деления на p^2, где число p – простое.

3. а) Докажите, что при натуральном a число a^2+1 не имеет делителей вида $4k+3$. **б)** **<u>Теорема Жирара.</u>** Докажите, что если число a^2+b^2 делится на простое число вида $4k+3$, то a и b также делятся на это простое число.

4. Докажите, что простых чисел вида $4k+1$ бесконечно много.

5. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трёх **а)** квадратов; **б)** кубов.

6. **<u>Теорема Клемента.</u>** Докажите, что числа p и $p+2$ являются простыми числами-близнецами тогда и только тогда, когда $4((p-1)!+1) \equiv -p \pmod{p^2+2p}$.

7. **<u>Тождество Гаусса</u>**. Докажите, что $n = \sum_{n \vdots d} \varphi(d)$ (суммирование по всем делителям числа n).

8. Имеется бесконечное количество карточек, на каждой из которых написано какое-то натуральное число. Известно, что для любого натурального числа n существуют ровно n карточек, на которых написаны делители этого числа. Докажите, что число карточек, на которых написано произвольное натуральное число n, равно $\varphi(n)$.

9. Пусть $n>1$ – натуральное число, а простое число p таково, что $p-1$ делится на n, а n^3-1 делится на p. Докажите, что число $4p-3$ – точный квадрат.

10. Для любого натурального n докажите, что число $2^{2^n}+2^{2^{n-1}}+1$ имеет не менее, чем n простых делителей.

Тридцать третья Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2017 года.

9 класс, разноделимость, 6 июля

1. а) **<u>Теорема Вильсона.</u>** $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда n – простое число. **б)** Докажите, что $C_{p-1}^{k} \equiv (-1)^k \pmod{p}$ при простом p.

2. Найдите остаток числа $(2p-1)!$ от деления на p^2, где число p – простое.

3. а) Докажите, что при натуральном a число a^2+1 не имеет делителей вида $4k+3$. **б)** **<u>Теорема Жирара.</u>** Докажите, что если число a^2+b^2 делится на простое число вида $4k+3$, то a и b также делятся на это простое число.

4. Докажите, что простых чисел вида $4k+1$ бесконечно много.

5. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трёх **а)** квадратов; **б)** кубов.

6. **<u>Теорема Клемента.</u>** Докажите, что числа p и $p+2$ являются простыми числами-близнецами тогда и только тогда, когда $4((p-1)!+1) \equiv -p \pmod{p^2+2p}$.

7. **<u>Тождество Гаусса</u>**. Докажите, что $n = \sum_{n \vdots d} \varphi(d)$ (суммирование по всем делителям числа n).

8. Имеется бесконечное количество карточек, на каждой из которых написано какое-то натуральное число. Известно, что для любого натурального числа n существуют ровно n карточек, на которых написаны делители этого числа. Докажите, что число карточек, на которых написано произвольное натуральное число n, равно $\varphi(n)$.

9. Пусть $n>1$ – натуральное число, а простое число p таково, что $p-1$ делится на n, а n^3-1 делится на p. Докажите, что число $4p-3$ – точный квадрат.

10. Для любого натурального n докажите, что число $2^{2^n}+2^{2^{n-1}}+1$ имеет не менее, чем n простых делителей.