Тридцать третья Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2017 года.

9-10 класс, математический бой, 17 июля

1. В ряд стоит n очень больших бочек. В первой бочке 1 литр молока, во второй 3 литра и так далее. В последней бочке $2n$–1 литров молока. Винни-Пух может перелить в любую бочку столько молока, сколько там уже есть. Выливать из бочки молоко нельзя, также нельзя переливать из одной бочки в другую молоко, если в первой бочке не хватает молока для удвоения во второй. При каких n данными операциями можно собрать все молоко в одной бочке?

2. Две окружности S_1 и S_2 касаются друг друга внутренним образом в точке A так, что S_1лежит внутри S_2. Через точку A проведена прямая, которая пересекает S_1 в точке B, а S_2 – в точке C. Через точку B проведена касательная к S_1, которая пересекает S_2 в точках D и E. Из точки C проведены две касательные к окружности S_1, которые касаются её в точках F и G. Докажите, что точки D, F, A, E лежат на одной окружности.

3. На полке стоят 2000 томов энциклопедии, занумерованные от 1 до 2000 слева направо. Разрешается делать две операции: (1) взять слева от начала четное число томов и переставить их, не меняя порядка, в конец; (2) взять слева от начала нечетное число томов, переложить их в обратном порядке и поставить в начало. Сколько различных перестановок томов можно получить такими операциями?

4. Пусть $P(x)$ – приведенный многочлен степени n, имеющий n вещественных корней (корни считаются с учетом кратности), $P(2017) = 2017$. Пусть $Q(x) = \prod_{i=1}^{2017} P(x+j)$. Докажите, что $Q(x)$ имеет как минимум 1000 различных корней, по модулю меньших 2017

5. Пусть k, n – натуральные числа, причём $n > C_k^3$. Даны $3n$ попарно различных натуральных чисел: a_i, b_i, c_i, где i=1,…, n. Докажите, что среди сумм вида a_i+b_i, a_i+c_i, b_i+c_i хотя бы k+1 различных.

6. Выпуклый многоугольник на плоскости таков, что его образ при любом параллельном переносе содержит целую точку. Докажите, что расстояние между какими-то двумя вершинами многоугольника не меньше $\sqrt{2}$.

7. Докажите, что для любого натурального k>2 существует такое натуральное число n, что C_{nk}^k не делится на n+1.

8. На острове живут 200 человек: 100 честных, которые всегда говорят правду, и 100 лжецов, которые всегда лгут. У каждого жителя острова есть хотя бы один друг. В один прекрасный день 100 человек сказали: «Все мои друзья честные», а остальные 100 человек сказали: «Все мои друзья — лжецы». Какое наименьшее количество пар, в которых честный человек дружит с лжецом, может быть на острове? (Один человек может входить в несколько пар.

9. Дана функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, что для всех $x, y \in \mathbb{R}$ верно, что $f(x+2xy)=f(x)+2f(xy)$. Найдите значение $f(2018)$, если $f(2017)=2017$.

10. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ с периметром 1 выполнены равенства $AB+CD = AC\sqrt{2}$, $BC+AD = BD\sqrt{2}$. Найдите расстояние между серединами диагоналей четырехугольника $ABCD$.

Тридцать третья Летняя Многопредметная Школа Кировской области

Вишкиль. 3-28 июля 2017 года.

9-10 класс, математический бой, 17 июля

1. В ряд стоит *n* очень больших бочек. В первой бочке 1 литр молока, во второй 3 литра и так далее. В последней бочке 2*n*–1 литров молока. Винни-Пух может перелить в любую бочку столько молока, сколько там уже есть. Выливать из бочки молоко нельзя, также нельзя переливать из одной бочки в другую молоко, если в первой не хватает молока. При каких *n* можно собрать молоко в одной бочке?

2. Две окружности S_1 и S_2 касаются друг друга внутренним образом в точке *A* так, что S_1лежит внутри S_2. Через точку *A* проведена прямая, которая пересекает S_1 в точке *B*, а S_2 – в точке *C*. Через точку *B* проведена касательная к S_1, которая пересекает S_2 в точках *D* и *E*. Из точки *C* проведены две касательные к окружности S_1, которые касаются её в точках *F* и *G*. Докажите, что точки *D*, *F*, *A*, *E* лежат на одной окружности.

3. На полке стоят 20 томов энциклопедии, занумерованные от 1 до 20 слева направо. Разрешается делать две операции: (1) взять слева от начала четное число томов и переставить их, не меняя порядка, в конец; (2) взять слева от начала нечетное число томов, переложить их в обратном порядке и поставить в начало. Сколько различных перестановок можно получить такими операциями?

4. Докажите, что из любой бесконечной последовательности букв русского алфавита можно вычеркнуть бесконечно много букв таким образом, чтобы получилась исходная последовательность.

5. Пусть треугольник *ABC* – остроугольный, а точка *D* – основание высоты, проведенной из вершины *C*. Биссектриса угла *B* пересекает *CD* в точке *E*, а описанную окружность ω треугольника *ADE* вторично пересекает в точке *F*. Известно, что угол *ADF* равен 45°. Докажите, что *CF* – касательная к окружности ω.

6. Дана функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, что для всех $x, y, z \in \mathbb{R}$ верно, что $f(xy)+f(xz)\geq f(x)f(yz)+1$. Найдите все такие функции.

7. Докажите, что для любого натурального $k>2$ существует такое натуральное число *n*, что C_{nk}^{k} не делится на $n+1$.

8. На острове живут 200 человек: 100 честных, которые всегда говорят правду, и 100 лжецов, которые всегда лгут. У каждого жителя острова есть хотя бы один друг. В один прекрасный день 100 человек сказали: «Все мои друзья честные», а остальные 100 человек сказали: «Все мои друзья — лжецы». Какое наименьшее количество пар, в которых честный человек дружит с лжецом, может быть на острове? (Один человек может входить в несколько пар.

Тридцать третья Летняя Многопредметная Школа Кировской области

Вишкиль. 3-28 июля 2017 года.

9-10 класс, математический бой, 17 июля

1. В ряд стоит *n* очень больших бочек. В первой бочке 1 литр молока, во второй 3 литра и так далее. В последней бочке 2*n*–1 литров молока. Винни-Пух может перелить в любую бочку столько молока, сколько там уже есть. Выливать из бочки молоко нельзя, также нельзя переливать из одной бочки в другую молоко, если в первой не хватает молока. При каких *n* можно собрать молоко в одной бочке?

2. Две окружности S_1 и S_2 касаются друг друга внутренним образом в точке *A* так, что S_1лежит внутри S_2. Через точку *A* проведена прямая, которая пересекает S_1 в точке *B*, а S_2 – в точке *C*. Через точку *B* проведена касательная к S_1, которая пересекает S_2 в точках *D* и *E*. Из точки *C* проведены две касательные к окружности S_1, которые касаются её в точках *F* и *G*. Докажите, что точки *D*, *F*, *A*, *E* лежат на одной окружности.

3. На полке стоят 20 томов энциклопедии, занумерованные от 1 до 20 слева направо. Разрешается делать две операции: (1) взять слева от начала четное число томов и переставить их, не меняя порядка, в конец; (2) взять слева от начала нечетное число томов, переложить их в обратном порядке и поставить в начало. Сколько различных перестановок можно получить такими операциями?

4. Докажите, что из любой бесконечной последовательности букв русского алфавита можно вычеркнуть бесконечно много букв таким образом, чтобы получилась исходная последовательность.

5. Пусть треугольник *ABC* – остроугольный, а точка *D* – основание высоты, проведенной из вершины *C*. Биссектриса угла *B* пересекает *CD* в точке *E*, а описанную окружность ω треугольника *ADE* вторично пересекает в точке *F*. Известно, что угол *ADF* равен 45°. Докажите, что *CF* – касательная к окружности ω.

6. Дана функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, что для всех $x, y, z \in \mathbb{R}$ верно, что $f(xy)+f(xz)\geq f(x)f(yz)+1$. Найдите все такие функции.

7. Докажите, что для любого натурального $k>2$ существует такое натуральное число *n*, что C_{nk}^{k} не делится на $n+1$.

8. На острове живут 200 человек: 100 честных, которые всегда говорят правду, и 100 лжецов, которые всегда лгут. У каждого жителя острова есть хотя бы один друг. В один прекрасный день 100 человек сказали: «Все мои друзья честные», а остальные 100 человек сказали: «Все мои друзья — лжецы». Какое наименьшее количество пар, в которых честный человек дружит с лжецом, может быть на острове? (Один человек может входить в несколько пар.