9 класс, счет в комплексных - теория, 15 июля

<u>Теоретические вопросы.</u>

Какое преобразование плоскости определяет функция

- $f(z) = z+m$ (m – заданное комплексное число);
- $f(z) = tz$ (t – заданное действительное число);
- $f(z) = mz$ (m – заданное комплексное число);
- $f(z) = a(z-m)+m$, где $\alpha = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, $m = 3-i$;
- Напишите преобразование, соответствующее осевой симметрии относительно а) оси абсцисс; б) прямой, проходящей через начало координат; в) произвольной прямой.
- Докажите, что преобразование $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ - инверсия относительно единичной окружности с центром в начале координат.
- Напишите формулу инверсии а) относительно окружности радиуса r с центром в начале координат; б) произвольной окружности.
- Докажите, что дробно-линейное преобразование $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ переводит а) прямую в прямую или окружность; б) окружность в прямую или окружность; в) сохраняет углы; г) зачем нужно условие о том, что $ad-bc\neq 0$?

Факты (памятка комплексно-геометрическим школьникам)

1. *Деление отрезка.* Середина отрезка с концами в точках *A* и *B* выражается как $(a+b)/2$.

Если точка Z делит отрезок *AB* так, что $AZ:ZB = \lambda$, то $z = \frac{1}{\lambda+1}a + \frac{\lambda}{\lambda+1}b$.

2. *Параллелограмм.* *ABCD* является параллелограммом тогда и только тогда, когда $a+c= b+d$.

3. *Условие того, что точка Z лежит на единичной окружности*. $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

4. *Условие коллинеарности трех точек.* а) Докажите, что точки, соответствующие комплексным числам *a*, *b*, *c*, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда число $\frac{a-c}{b-c}$, называемое *простым отношением* трех комплексных чисел, вещественно.

б) Три точки *A*, *B*, *C* лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{a-c}{b-c} = \frac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{c}}$.

5. Условие того, что четыре точки лежат на одной окружности. **а)** Докажите, что точки, соответствующие комплексным числам *a*, *b*, *c*, *d*, лежат на одной окружности (или на одной прямой) тогда и только тогда, когда число $\frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d}$, называемое *двойным отношением* четырех комплексных чисел, вещественно.

б) Четыре точки *A*, *B*, *C*, *D* лежат на одной окружности, если они не лежат на одной прямой и $\frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d} = \frac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{a}-\bar{d}} : \frac{\bar{b}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{d}}$.

Тридцать третья Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2017 года.

9 класс, счет в комплексных - теория, 15 июля

<u>Теоретические вопросы.</u>

Какое преобразование плоскости определяет функция

- $f(z) = z+m$ (m – заданное комплексное число);
- $f(z) = tz$ (t – заданное действительное число);
- $f(z) = mz$ (m – заданное комплексное число);
- $f(z) = a(z-m)+m$, где $\alpha = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, $m = 3-i$;
- Напишите преобразование, соответствующее осевой симметрии относительно а) оси абсцисс; б) прямой, проходящей через начало координат; в) произвольной прямой.
- Докажите, что преобразование $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ - инверсия относительно единичной окружности с центром в начале координат.
- Напишите формулу инверсии а) относительно окружности радиуса r с центром в начале координат; б) произвольной окружности.
- Докажите, что дробно-линейное преобразование $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ переводит а) прямую в прямую или окружность; б) окружность в прямую или окружность; в) сохраняет углы; г) зачем нужно условие о том, что $ad-bc\neq 0$?

Факты (памятка комплексно-геометрическим школьникам)

1. *Деление отрезка.* Середина отрезка с концами в точках *A* и *B* выражается как $(a+b)/2$.

Если точка Z делит отрезок *AB* так, что $AZ:ZB = \lambda$, то $z = \frac{1}{\lambda+1}a + \frac{\lambda}{\lambda+1}b$.

2. *Параллелограмм.* *ABCD* является параллелограммом тогда и только тогда, когда $a+c= b+d$.

3. *Условие того, что точка Z лежит на единичной окружности*. $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

4. *Условие коллинеарности трех точек.* а) Докажите, что точки, соответствующие комплексным числам *a*, *b*, *c*, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда число $\frac{a-c}{b-c}$, называемое *простым отношением* трех комплексных чисел, вещественно.

б) Три точки *A*, *B*, *C* лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{a-c}{b-c} = \frac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{c}}$.

5. Условие того, что четыре точки лежат на одной окружности. **а)** Докажите, что точки, соответствующие комплексным числам *a*, *b*, *c*, *d*, лежат на одной окружности (или на одной прямой) тогда и только тогда, когда число $\frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d}$, называемое *двойным отношением* четырех комплексных чисел, вещественно.

б) Четыре точки *A*, *B*, *C*, *D* лежат на одной окружности, если они не лежат на одной прямой и $\frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d} = \frac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{a}-\bar{d}} : \frac{\bar{b}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{d}}$.