Тридцать третья
Летняя Многопредметная Школа
Кировской области

Вишкиль. 3-28 июля 2017 г.

9 класс, группа профи

Преподаватели:
А. В. Пастор, Е. Н. Симарова

Вступительная олимпиада. 04.07.2017

1. Докажите, что между натуральными числами n и $11n$ найдется число, у которого сумма цифр на 5 больше, чем сумма цифр числа n.

2. Даны десять чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ из отрезка $[0,1]$. Докажите, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} \leq x_1 x_2 \ldots x_{10} + 9$.

3. Существуют ли такие натуральные числа a, b и n ($a \neq b$), что $\text{НОК}(a+n, b) = \text{НОК}(a, b+n)$?

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O, причем AD — диаметр окружности. Прямые AD и BC пересекаются в точке E. Описанная окружность треугольника BOC пересекает отрезок AD в точке K. Прямая, проведенная через точку K параллельно BC пересекает прямые AB и CD в точках L и M. Докажите, что точки E, L, O, M лежат на одной окружности.

5. Изначально в пробирке было 100 бактерий, находящихся на первой ступени эволюции. Каждая бактерия, находящаяся на k-ой ступени эволюции, может разделиться на две, находящиеся на $k+1$-ой ступени. Назовём колонию n-устойчивой, если в любой момент в ней есть хотя бы n бактерий на одной ступени эволюции. При каком минимальном n можно гарантировать, что колония всегда будет n-устойчивой?

6. В равенстве $(2+\sqrt{3})^{2k-1} = a + b\sqrt{3}$, a, b и k — натуральные числа. Докажите, что $a = n^2 + 1$ для какого-то целого n.

Графы. Паросочетания и покрытия. 05.07.2017

Будем использовать следующие обозначения: $V(G)$ и $E(G)$ — множества вершин и ребер графа G; $v(G) = |V(G)|$, $e(G) = |E(G)|$.

Определение 1. 1) Множество вершин $U \subset V(G)$ называется *независимым*, если никакие две его вершины не смежны. Обозначим через $\alpha(G)$ количество вершин в максимальном независимом множестве графа G.

2) Множество рёбер $M \subset E(G)$ называется *паросочетанием*, если никакие два его ребра не имеют общей вершины. Обозначим через $\alpha'(G)$ количество рёбер в максимальном паросочетании графа G.

3) Будем говорить, что множество вершин $W \subset V(G)$ *покрывает* ребро $e \in V(G)$, если существует вершина $w \in W$, инцидентная e. Будем говорить, что множество рёбер $F \subset E(G)$ *покрывает* вершину $v \in V(G)$, если существует ребро $f \in F$, инцидентное v.

4) Множество вершин $W \subset V(G)$ называется *вершинным покрытием*, если оно покрывает все рёбра графа. Обозначим через $\beta(G)$ количество вершин в минимальном вершинном покрытии графа G.

5) Множество рёбер $F \subset E(G)$ называется *реберным покрытием*, если оно покрывает все вершины графа. Обозначим через $\beta'(G)$ количество рёбер в минимальном реберном покрытии графа G.

0. (Нужно сдавать в письменном виде на отдельных листочках.) Для произвольного графа G на n вершинах докажите, что $\alpha(G) + \beta(G) = n$.

1. В некотором графе G для любого множества его вершин количество вершин в этом множестве не превосходит количества вершин, смежных хотя бы с одной вершиной этого множества. Докажите, что из G можно выкинуть не более трети всех вершин таким образом, что остальные вершины можно будет разбить на непересекающиеся пары смежных.

Определение 2. Пусть M — паросочетание в графе G. Путь P называется *M-чередующимся*, если в нем чередуются ребра из M и ребра, не входящие в M. Путь P называется *M-дополняющим*, если он M-чередующийся, а его начало и конец *не покрыты* паросочетанием M (то есть, не являются концами ребер из M).

2. (Теорема Бержа; C. Berge, 1957.) Докажите, что паросочетание M является максимальным в графе G (то есть содержит наибольшее число ребер среди всех паросочетаний графа G) если и только если в G нет M-дополняющих путей.

3. (Теорема Кёнига; D. König, 1931.) Пусть G — двудольный граф. Тогда $\alpha'(G) = \beta(G)$.

а) Выведете теорему Кёнига из теоремы Холла.

б) Выведете теорему Холла из теоремы Кёнига.

4. (Теорема Галлаи; T. Gallai, 1959.) Пусть G — граф на n вершинах, причем из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро. Докажите, что $\alpha'(G) + \beta'(G) = n$.

Определение 3. Паросочетание, покрывающее все вершины графа, называется *совершенным.*

5. Степени всех вершин графа равны 3. Обязательно ли в таком графе есть совершенное паросочетание?

6. Назовем ребро графа *важным*, если при его удалении увеличивается размер максимального независимого множества. Докажите, что если два важных ребра имеют общую вершину, то в графе есть нечетный цикл.

Поворотная гомотетия. 05.07.2017

Определение. *Поворотной гомотетией* с коэффициентом k и углом φ называется композиция гомотетии с коэффициентом k и поворота на угол φ, имеющих общий центр ($H_O^k \circ R_O^{\varphi}$). При этом можно считать, что $k > 0$ и $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Теорема 1. *Окружности S и S' пересекаются в точках A и B. Тогда существует единственная поворотная гомотетия с центром в A, переводящая S в S'. Более того, образом любой точки $C \in S$ будет точка C', в которой прямая BC вторично пересекает окружность S'. (Точка C' отлична от B за исключением случая, когда прямая BC касается окружности S_2 в точке B; если точки B и C совпадают, то в качестве прямой BC мы рассматриваем касательную к S_1 в точке B.)*

Теорема 2. *Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке P, причем все точки A, B, A_1, B_1, P различны. Тогда существует единственная поворотная гомотетия, переводящая точку A в A_1, а B в B_1, причем её центром является точка пересечения описанных окружностей треугольников AA_1P и BB_1P.*

Теорема 3. *Центр поворотной гомотетии, переводящей направленный отрезок $\overline{AB}$ в направленный отрезок $\overline{A_1B_1}$ совпадает с центром поворотной гомотетии, переводящей направленный отрезок $\overline{AA_1}$ в направленный отрезок $\overline{BB_1}$.*

1. а) Докажите, что преобразование подобия является поворотной гомотетией с коэффициентом $k \neq 1$ и углом φ тогда и только тогда, когда для любого вектора $\overrightarrow{a}$ данное преобразование переводит его в вектор $k \cdot \overrightarrow{a_\varphi}$ (где $\overrightarrow{a_\varphi}$ — вектор, полученный из вектора $\overrightarrow{a}$ поворотом на угол φ).

б) Чем может быть композиция двух поворотных гомотетий (перечислите все возможные варианты и докажите, что других нет).

в) Докажите, что любое сохраняющее ориентацию преобразование подобия с коэффициентом, отличным от 1, является поворотной гомотетией.

2. Окружности $\omega_1, \dots, \omega_n$ пересекаются в точке O. Кузнечик прыгает из точки X_i окружности ω_i в точку X_{i+1} окружности ω_{i+1}, при этом прямая X_iX_{i+1} проходит через точку пересечения окружностей ω_i и ω_{i+1}, отличную от точки O. Докажите, что через n прыжков кузнечик вернется в исходную точку.

3. Две окружности пересекаются в точках A и B, а хорды AM и AN касаются этих окружностей. Треугольник MAN достроен до параллелограмма $MANC$, P – середина отрезка BN, точка Q — середина MC. Докажите, что $\angle ANC = \angle APQ$.

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 и A_1; точки M и M_1 — середины отрезков AC и A_1C_1 соответственно. Прямая BM пересекает описанную окружность треугольника A_1BC_1 в точке K_1, а прямая BM_1 — описанную окружность треугольника ABC в точке K. Сами описанные окружности пересекаются в точке P, а прямые A_1C_1 и AC — в точке T. Докажите, что точки M, M_1, K, K_1, P и T лежат на одной окружности.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки P и Q — середины диагоналей AC и BD. Прямая PQ пересекает стороны AB и CD в точках N и M соответственно. Докажите, что а) описанные окружности треугольников ANP и DMQ пересекаются на прямой AD; б) описанные окружности треугольников ANP, BNQ, CMP, DMQ пересекаются в одной точке.

6. Окружность ω описана около треугольника ABC. Точка P пробегает дугу BC окружности ω, не содержащую точку A. Точки S_1 и S_2 – центры вписанных окружностей треугольников PAB и PAC соответственно. Докажите, что окружности, описанные около треугольников PS_1S_2, при всех положениях точки P имеют общую точку.

Инверсия. 06.07.2017

Определение. *Инверсией* относительно данной окружности с центром в точке O радиуса R преобразование плоскости, при котором каждая точка A переходит в точку A' такую, что $\overrightarrow{OA'} = R^2 \frac{\overrightarrow{OA}}{|OA|^2}$.

Свойства инверсии

- Прямая, проходящая через O, переходит в себя.

- Прямая ℓ, не проходящая через O, переходит в окружность S, проходящую через O;
    - точка O', симметричная O относительно ℓ, переходит в центр окружности S;
    - обратно, окружность S, проходящая через O переходит в прямую ℓ.
- Окружность, не проходящая через O, переходит в окружность, не проходящую через O. Их центры лежат на одном луче с началом в O (но центр не переходит в центр!).
- Если A' и B' — образы точек A и B, то $|A'B'| = \frac{|AB| \cdot R^2}{|OA| \cdot |OB|}$.

0. (Нужно сдавать в письменном виде на отдельных листочках.) Пусть инверсия с центром O переводит окружность S в S'. Докажите, что точка O — центр гомотетии, переводящей S в S'.

1. Точки A, B и C лежат на одной прямой, а точка P — вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP, BCP, CAP и точка P лежат на одной окружности.

2. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Прямая, отличная от AB, пересекает окружность ω_1 в точках C и D, окружность ω_2 в точках E и F, а прямую AB — в точке P, лежащей на отрезке AB. Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, описанных около треугольников ACE и BDF, проходит через точку P.

3. При помощи циркуля и линейки постройте окружность, а) проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности; б) проходящую через данную точку и касающуюся двух данных окружностей; в) касающуюся трех данных окружностей.

4. Дана окружность и точка P внутри нее, отличная от центра. Рассматриваются пары окружностей, касающиеся данной изнутри и друг друга в точке P. Найдите геометрическое место точек пересечения общих внешних касательных к этим окружностям.

5. Треугольник ABC вписан в окружность ω. Переменная прямая, параллельная BC, пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно и пересекает ω в точках K и L (где D лежит между K и E). Окружность γ_1 касается отрезков KD, BD и окружности ω; окружность γ_2 касается отрезков LE, CE и окружности ω. Найдите геометрическое место точек пересечения общих внутренних касательных к окружностям γ_1 и γ_2.

Выпуклость-1. 06.07.2017

Определение 1. Фигура называется *выпуклой*, если для любых 2-х точек, принадлежащих ей верно, что весь отрезок, соединяющий эти 2 точки, принадлежит этому множеству.

Утверждение. *Пересечение любого (в том числе и бесконечного!) множества выпуклых фигур является выпуклой фигурой.*

Определение 2. *Выпуклым многоугольником* называется многоугольник (т. е. замкнутая несамопересекающаяся ломаная), лежащий в одной полуплоскости относительно любой из прямых, содержащих его стороны. Точка M, не лежащая на сторонах выпуклого многоугольника, называется *внутренней*, если лежит по отношению к любой из этих прямых в той же полуплоскости, что и весь многоугольник. В противном случае говорят, что точка M *лежит вне многоугольника.*

Теорема 1. *Многоугольник является выпуклым, если выполнено одно из следующих равносильных утверждений:*

1. *если часть плоскости, им ограниченная (плоский многоугольник) является выпуклым множеством;*
2. *если этот многоугольник лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону;*
3. *если все его внутренние углы меньше* $180°$*;*
4. *если все его диагонали лежат полностью внутри него;*
5. *его граница видна полностью из любой его внутренней точки;*
6. *из любой внешней точки он виден под углом, меньшим* $180°$.

Определение 3. *Выпуклой оболочкой* множества точек A называется наименьшая по включению выпуклая фигура, содержащая все точки множества A (то есть любая другая выпуклая фигура, содержащая все точки A должна содержать также и выпуклую оболочку A).

Теорема 2. *У произвольного множества точек на плоскости существует единственная выпуклая оболочка;*

1. а) Докажите, что выпуклая оболочка конечного множества точек является многоугольником с вершинами в некоторых из этих точек; б) **(Теорема Каратеодори.)** Если точка принадлежит выпуклой оболочке системы из конечного числа точек, то она либо совпадает с одной из точек системы, либо принадлежит отрезку, соединяющему две точки из системы, либо принадлежит треугольнику с вершинами из той же системы.

2. На плоскости дано n точек, причём любые четыре из них являются вершинами выпуклого четырёхугольника. Докажите, что эти точки являются вершинами выпуклого n-угольника

3. На плоскости даны $2n+3$ точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой, а никакие четыре не лежат на одной окружности. Докажите, что из этих точек можно выбрать три точки так, что n из оставшихся точек лежат внутри окружности, проведенной через выбранные точки, а n — вне ее.

4. Дано n попарно несонаправленных векторов $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ $(n \geq 3)$ таких, что $\overrightarrow{a_1} + \ldots + \overrightarrow{a_n} = \overrightarrow{0}$. а) Докажите, что существует выпуклый n-угольник $A_1 \ldots A_n$ такой, что набор векторов $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \ldots, \overrightarrow{A_nA_1}$ совпадает с набором $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$. б) Сколько существует различных многоугольников, удовлетворяющих условию пункта а)?

5. Найдите все конечные множества точек на плоскости, обладающие тем свойством, что никакие три точки множества не лежат на одной прямой и вместе с каждыми тремя точками данного множества точка пересечения высот треугольника, образованного этими точками, также принадлежит данному множеству.

6. Внутри выпуклого стоугольника выбрано k точек, $2 \leq k \leq 50$. Докажите, что можно отметить $2k$ вершин стоугольника так, чтобы все выбранные точки оказались внутри $2k$-угольника с отмеченными вершинами.

7. Докажите, что выпуклый многоугольник может быть разрезан непересекающимися диагоналями на остроугольные треугольники не более, чем одним способом

Разнобой-1. 07.07.2017

1. Дано натуральное число n. Найти все отображения $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, такие что для любых точек, $A_1, \ldots, A_n$, являющихся вершинами правильного n-угольника, выполнено, что $f(A_1) + \ldots + f(A_n) = 1$.

2. Пусть $h_1 = \frac{1}{2}$ и $h_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-h_n^2}}{2}}$. Докажите, что $\sum_{k=1}^{1000} h_k < 1,03$.

3. Дан описанный четырехугольник $ABCD$, в котором $\sqrt{2}(BC - BA) = AC$. Точка X — середина диагонали AC. Докажите, что $2\angle BXD = \angle DAB - \angle DCB$.

4. На одной из клеток доски 100×100 стоит невидимый танк. Пушка может обстрелять любые 60 клеток доски, после чего танк перемещается в соседнюю по стороне клетку (быть может, только что обстрелянную).

Далее этот процесс повторяется. Может ли пушка стрелять так, чтобы когда-нибудь гарантированно попасть в танк?

5. Положительные числа x, y, z удовлетворяют условию

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}=\frac{2}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Найдите все возможные значения величины $xy+yz+zx$.

6. В лагерь приехало 49 школьников, каждый из них знаком ровно с 24 из остальных. Каждый школьник высказал пожелание по расселению: некоторые сказали, что они хотят жить с кем-то из своих знакомых, а остальные — что хотят жить с кем-то из незнакомых. Докажите, что можно выгнать одного из них, а остальных расселить по двухместным комнатам так, что в каждой комнате хотя бы у одного из из живущих в ней школьников его желание будет удовлетворено.

7. Найдите все натуральные числа a такие, что число

$$1+a^a+a^{a^2}+\ldots+a^{a^{a+1}}-a$$

простое.

Графы. Совершенные паросочетания. 09.07.2017

Будем использовать следующие обозначения: если $U\subset V(G)$, то через $G-U$ обозначается граф, полученный удалением из G всех вершин множества U (и всех инцидентных им ребер); если $ab\notin E(G)$, то через $G+ab$ обозначим граф, полученный из G добавлением ребра ab.

1. Граф G обладает следующим свойством: для любой вершины $v\in V(G)$ в графе $G-v$ есть совершенное паросочетание. Докажете, что через любую вершину графа G проходит простой нечетный цикл.

2. Вершины $x,y,z,w\in V(G)$ таковы, что $xy,yz\in E(G)$, но $xz,yw\notin E(G)$. Пусть в каждом из графов $G+xz$ и $G+yw$ есть совершенное паросочетание. Докажите, что тогда и в графе G есть совершенное паросочетание.

Определение 4. Обозначим через $o(G)$ количество нечетных компонент связности графа G (то есть количество компонент связности, содержащих нечетное число вершин).

Теорема Татта о совершенном паросочетании (W.T.Tutte, 1947.) В графе G существует совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда для любого $S\subset V(G)$ выполняется $o(G-S)\le|S|$.

3. а) Докажите, что если в графе G есть совершенное паросочетание, то он удовлетворяет условию Татта (то есть для любого $S \subset V(G)$ выполняется $o(G-S) \le |S|$.)

Пусть граф G удовлетворяет условию Татта и при добавлении к G любого ребра в получившемся графе есть совершенное паросочетание. Обозначим через U множество вершин графа G, смежных со всеми остальными вершинами (то есть $U = \{v \in V(G) \mid d(v) = v(G)-1\}$).

Докажите, что тогда и в графе G есть совершенное паросочетание б) если среди компонент связности графа $G-U$ хотя бы одна не является полным графом; в) в произвольном случае.

г) Выведете из предыдущих пунктов теорему Татта.

Определение 5. *Дефицитом графа* назовем количество вершин, не покрытых максимальным паросочетанием. То есть $\operatorname{def}(G) = v(G) - 2\alpha'(G)$.

4. Формула Бержа (C. Berge, 1958.) Докажите, что $\operatorname{def}(G) = \max\limits_{S \subset V(G)} (o(G-S) - |S|)$.

5. а) **(J. Petersen, 1891.)** Степени всех вершин графа равны 3, и при этом в нем не более двух мостов. Докажите, что в нем есть совершенное паросочетание.

б) Степени всех вершин связного графа G с четным числом вершин равны d, и при этом из любого собственного подмножества S множества его вершин выходит не менее $d-1$ ребер (то есть не менее $d-1$ ребер соединяют вершины множеств S и $V(G) \setminus S$). Докажите, что в графе G есть совершенное паросочетание.

Лемма об уточнении показателя. 10.07.2017

Определение. Будем писать $p^k \parallel n$, если $n \,\vdots\, p^k$, но $n \not\vdots\, p^{k+1}$.

1. (Лемма об уточнении показателя.) Даны простое число p и натуральные числа a, n и t такие, что $p^t \parallel a-1$. а) Докажите, что если $n \not\vdots\, p$, то $p^t \parallel a^n - 1$. б) Пусть натуральное число k таково, что $p^k \parallel n$. Докажите, что если $p > 2$ или $t > 1$, то $p^{t+k} \parallel a^n - 1$, а если $p = 2$ и $t = 1$, то $2^{k+2} \mid a^n - 1$.

в) Пусть $p \in \mathbb{P}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $n, t \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ таковы, что $a \not\vdots\, p$, $p^t \parallel a-b$ и $p^k \parallel n$. Докажите, что если $p > 2$ или $t > 1$, то $p^{t+k} \parallel a^n - b^n$, а если $p = 2$ и $t = 1$, то $2^{k+2} \mid a^n - 1$.

Замечание. Иногда эту лемму называют “леммой Гензеля”, но это не совсем правильно.

2. Сколькими нулями оканчивается число $4^{5^6} + 6^{5^4}$?

3. В какой степени 5 входит в разложение числа $3^{1000} - 2^{1000}$ на простые множители?

4. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ число 2 является первообразным корнем по модулю 3^n.

5. Найдите все пары натуральных чисел (x, n), для которых $x > 2$, $n > 1$ и $x^n - 1$ — степень простого числа.

6. Даны натуральные a и b. Оказалось, что для всех n выполнено $a^n + b^n$ является точной $(n+1)$–й степенью. Найти все возможные такие пары (a, b).

7. Решите в натуральных числах уравнение $z^x + 1 = (z+1)^y$.

Полярное преобразование и теорема Паскаля. 10.07.2017

Определение. Пусть ω — окружность с центром O радиуса r, P — точка, отличная от O. *Полярой* точки P называется прямая p, перпендикулярная OP и проходящая через точку P' (образ P при инверсии относительно ω). Точка P называется *полюсом* прямой p.

Теорема 1. 1) *Если полюс A прямой a лежит на поляре b точки B, то точка B лежит на прямой a.*

2) *Точки A, B, C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда их поляры a, b, c пересекаются в одной точке или параллельны.*

3) *Из точки P вне окружности ω проведены касательные PM и PN. Тогда MN — поляра точки P.*

0. (Нужно сдавать в письменном виде на отдельных листочках.) Докажите теорему 1 (каждый пункт теоремы будет считаться отдельным пунктом задачи).

1. На окружности отмечены точки A, B, C, D, E, F. Прямые AB и DE пересекаются в точке U, прямые BC и EF — в точке V, а прямые CD и FA — в точке W. (Некоторые из точек A, B, C, D, E, F могут совпадать, в этом случае в качестве соединяющей их прямой рассматривается касательная в этой точке.)

а) Пусть X и Y — вторые точки пересечения описанной окружности треугольника BEV с прямыми AB и DE соответственно. Докажите, что соответствующие стороны треугольников XYV и ADW параллельны.

б) **(Теорема Паскаля.)** При помощи пункта а) докажите, что точки U, V и W лежат на одной прямой.

в) Сформулируйте и докажите теорему, двойственную к теореме Паскаля.

2. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Пусть E — точка пересечения его диагоналей, F — точка пересечения продолжений сторон AD и BC, G — точка пересечения продолжений сторон AB и CD, H — точка пересечения касательных к описанной окружности в точках C и D.

а) Докажите, что точки E, F, H лежат на одной прямой.

б) Докажите, что EF — поляра точки G, а FG — поляра точки E.

3. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Точка O — центр его описанной окружности, T — точка пересечения диагоналей, P и Q — точки пересечения продолжений сторон. Докажите, что точки P, Q, T и O образуют *ортоцентрическую четверку* (т. е. любая из них является ортоцентром треугольника, образованного тремя другими).

4. Через центр вписанной окружности треугольника проведены прямые, перпендикулярные его биссектрисам. Докажите, что точки пересечения этих прямых со сторонами, на которые опущены биссектрисы, лежат на одной прямой.

5. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1, а также отмечены середины A_0 и B_0 сторон BC и AC. Отрезки A_1B_1 и A_0B_0 пересекаются в точке C'. Докажите, что прямая CC' перпендикулярна прямой, проходящей через ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC.

Иррациональные числа и их приближения. 11.07.2017

1. Мудрое руководство наняло надсмотрщика для детей и положило ему зарплату $\sqrt{2}$ р. в день. Поскольку банкноты такого достоинства еще не выпускаются, мудрое руководство каждый день платит надсмотрщику 1 или 2 рубля так, что каждый день сумма, полученная надсмотрщиком за все время его работы отличается от положенной менее, чем на рубль. Докажите, что последовательность выплат непериодична.

2. На длинной прямолинейной дороге с равными интервалами вырыты одинаковые поперечные канавки; расстояние между центрами каждых двух соседних канавок равно 1 м. Докажите, что какими бы узкими не были сделаны эти канавки, человек, шагающий по дороге и имеющий длину шага $\sqrt{2}$ м, рано или поздно попадет в одну из канавок.

а) Докажите это в случае, если человек начинает движение в начале дороги (точке с координатой 0, при том, что центры канавок находятся в точках с натуральными координатами).

б) Докажите это в случае, если человек начинает движение в произвольной точке дороги.

3. а) **(Теорема Дирихле.)** Даны $\alpha, \tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 1$. Докажите, что существует рациональное число $\frac{p}{q}$, такое, что $1 \leq q \leq \tau$ и $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q\tau}$.

б) Дано иррациональное число α. Докажите, что существует бесконечно много рациональных чисел $\frac{p}{q}$, таких, что $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.

4. а) **(Теорема Дирихле о совместных приближениях.)** Даны $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ и $\tau > 1$. Докажите, что существуют целые числа $a_1, \ldots, a_n, b$, такие, что $|a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n - b| < \frac{1}{\tau^n}$ и $0 < \max\limits_{1 \leq k \leq n} |a_k| \leq \tau$.

б) **(Лемма Кронекера.)** Даны $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ и $\tau \in \mathbb{N}$. Докажите, что существуют целые числа $p_1, \ldots, p_n, q$, такие, что $1 \leq q \leq \tau^n$ и для любого k от 1 до n выполняется неравенство $\left|\alpha_k - \frac{p_k}{q}\right| < \frac{1}{q\tau}$.

5. Докажите, что число а) 2^n; б) $2^n + 3^n$ может начинаться с любой последовательности цифр.

Теорема Хелли. 11.05.2017

0. (Теорема Хелли для прямой. Нужно сдавать в письменном виде на отдельных листочках.) На прямой даны несколько отрезков, любые два из которых имеют общую точку. Докажите, что все отрезки имеют общую точку.

1. (Теорема Хелли для плоскости.) На плоскости дано а) 4; б) n выпуклых фигур, причем любые три из них имеют общую точку. Докажите, что все фигуры имеют общую точку.

2. (Теорема Юнга.) На плоскости даны несколько точек, расстояние между любыми двумя из которых не превосходит 1. Докажите, что все точки можно накрыть кругом радиуса $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

3. Дана некоторая система дуг, принадлежащих одной окружности и имеющих длину, меньшую трети окружности. Каждые две дуги этой системы имеют общую точку. Докажите, что все дуги этой системы имеют общую точку.

4. На плоскости заданы несколько полуплоскостей, внутренности которых покрывают всю плоскость. Доказать, что из этих полуплоскостей можно выбрать три, внутренности которых тоже покрывают всю плоскость.

5. Дано несколько параллельных отрезков, причем для любых трех из них найдется прямая, их пересекающая. Докажите, что найдется прямая, пересекающая все отрезки.

6. Найдите наибольшее натуральное n такое, что для любого множества из n точек на плоскости существует точка (не обязательно принадлежащая этому множеству) такая, что по любую сторону от каждой проходящей через нее прямой лежит не больше 100 точек исходного множества (точки, лежащие на прямой, при этом не учитываются).

7. На плоскости нарисовано несколько прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что каждые два прямоугольника можно пересечь вертикальной или горизонтальной прямой. Докажите, что можно провести одну горизонтальную и одну вертикальную прямую так, чтобы любой прямоугольник пересекался хотя бы с одной из этих двух прямых.

Внутренний матбой. 12.05.2017

1. Натуральное число a удовлетворяет следующему условию: для любого натурального n найдется натуральное $d > 1$ такое, что $d \equiv 1 \pmod n$ и $n^2a - 1 \,\vdots\, d$. Докажете, что a — точный квадрат.

2. Назовем натуральное число n *безумным*, если существуют натуральные $a, b > 1$ такие, что $n = a^b + b$. Существуют ли 2017 последовательных натуральных чисел, ровно 2015 из которых безумны?

3. Точка I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Пусть E_C — точка, симметричная центру окружности девяти точек треугольника AIB относительно биссектрисы угла AIB. Определим точки E_A и E_B аналогичным образом. Докажите, что точки E_A, E_B и E_C лежат на одной прямой.

4. Связный граф, имеющий хотя бы три вершины, не теряет связности при удалении любой вершины. Пусть x — одна из его вершин. Докажите, что в графе существует простой цикл, проходящий через x и содержащий некоторую вершину $y \neq x$ вместе со всеми её соседями.

5. Рациональное число назовём *правильным*, если оно представляется в виде $\dfrac{a^2+a-1}{b^2+b-1}$ при некоторых натуральных a и b. Докажите, что существует сколь угодно большое простое число, которое представимо в виде произведения правильных чисел.

6. Дано множество натуральных чисел M. Для каждого его непустого подмножества A обозначим через $f(A)$ подмножество M, состоящее из всех чисел M, имеющих нечетное число делителей в A. В какое наименьшее число цветов можно покрасить все непустые подмножества так, чтобы подмножества A и $f(A)$ были покрашены в разные цвета для любого подмножества A?

7. Найдите наибольшее $s > 0$ такое, что для любых положительных чисел a, b, c выполняется неравенство

$$\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)^2 \geq s\left(\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\right) .$$

8. В остроугольном треугольнике ABC точка D — основание высоты, проведенной из вершины C. Точки E и F лежат на сторонах AC и BC соответственно так, что $AE = AD$ и $BF = BD$. Точка S симметрична точке C относительно центра описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $SE = SF$.

9. В каждой клетке доски 21×21 сидит по два дрессированных кузнечика. По сигналу все они перепрыгивают в соседние по стороне клетки, причем два кузнечика из одной клетки перепрыгивают в разные клетки. Какое наименьшее число клеток могло оказаться занятыми после прыжка?

10. Найдите максимально возможное отношение $\frac{S(n)}{S(16n)}$ по всем $n \in \mathbb{N}$. (Через $S(n)$ обозначается сумма цифр числа n.)

Пределы. 14.05.2017

Определение 1. Отрезок $[a, b]$ мы будем называть *ловушкой* для последовательности $\{x_n\}$, если в этом отрезке содержатся почти все (т. е. все, кроме, может быть, конечного числа) члены данной последовательности. Отрезок $[a, b]$ мы будем называть *кормушкой* для последовательности $\{x_n\}$, если в этом отрезке содержится бесконечно много членов данной последовательности.

0. (Нужно сдавать в письменном виде на отдельных листочках.) Существует ли последовательность, для которой отрезки $[0, 1]$ и $[2, 3]$ одновременно являются а) ловушками; б) кормушками?

1. Пусть отрезки $[0, 1]$ и $[9, 10]$ являются кормушками для последовательности $\{x_n\}$. Может ли для этой последовательности существовать а) ловушка длины 1; б) ловушка длины 9? в) Существует ли последовательность без кормушек? г) Существует ли последовательность, для которой любой отрезок является кормушкой?

2. Последовательность x_n такова, что в ней встречаются все дроби вида $\frac{1}{k}$ ровно по одному разу и каждый член последовательности — дробь такого вида. Верно ли, что у этой последовательности обязательно есть предел?

3. Савелий разлил по 3 кувшинам 1 литр молока. Затем он стал переливать молоко, так чтобы в момент времени $n+1$ в каждом стакане было бы ровно половина от того, что было в двух других стаканах в момент n. Верно ли, что при любых начальных данных объем молока в каждом кувшине стремиться к какому либо пределу и если да, то чему может быть равен этот предел?

Определение 2. Последовательность a_n называется *фундаментальной* или *сходящейся в себе*, если выполнено следующее условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m, n > N \ (|a_m - a_n| < \varepsilon).$$

4. (Критерий Коши.) Докажите, что последовательность имеет конечный предел тогда и только тогда, когда она является фундаменальной.

Определение 3. Пусть заданы последовательность x_n и возрастающая последовательность n_k, содержащая только натуральные числа. Тогда x_{n_k} называется подпоследовательностью последовательности x_n.

5. (Лемма Больцано-Вейерштрасса.) Докажите, что из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

6. Последовательность x_n неотрицательных чисел такова, что для любых натуральных m и n выполняется неравенство $x_{m+n} \leqslant x_m + x_n$. Докажите, что последовательность $\frac{x_n}{n}$ имеет предел.

7. (Метод Герона.) Приближенное извлечение квадратного корня из числа x осуществляется так: выбираем начальное приближение $a_1 \approx \sqrt{x}$ и строим последовательность $a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{x}{a_n}}{2}$. Докажите, что при правильном выборе начального приближения (каком?) $a_n \to \sqrt{x}$.

Цепные дроби. 14.07.2017

Определение 1. Конечной *цепной дробью* (другое название — *непрерывная дробь*) называется выражение вида

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}, \qquad (*)$$

где $a_0 \in \mathbb{Z}$ и $a_k \in \mathbb{N}$ при $k > 0$.

0. (Нужно сдавать в письменном виде на отдельных листочках.) Докажите, что любое рациональное число единственным образом раскладывается в конечную цепную дробь с $a_n \neq 1$.

Определение 2. Выражения вида $\frac{P_k}{Q_k} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k]$ (где P_k и Q_k взаимно просты и $Q_k > 0$) называются *подходящими дробями* к цепной дроби $(*)$.

1. При всех натуральных $k < n$ докажите, что
а) $P_{k+1} = a_{k+1}P_k + P_{k-1}$ и $Q_{k+1} = a_{k+1}Q_k + Q_{k-1}$;
б) $P_{k+1}Q_k - P_kQ_{k+1} = (-1)^k$;
в) $\frac{Q_{k+1}}{Q_k} = [a_{k+1}; a_k, \ldots, a_1]$, $\frac{P_{k+1}}{P_k} = [a_{k+1}; a_k, \ldots, a_0]$ (если $a_0 \neq 0$).

Определение 3. Выражения вида $\alpha_k = [a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n]$ называются *полными частными* или *остатками* цепной дроби $(*)$.

2. При всех натуральных $k < n$ докажите, что $\alpha = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{\alpha_{k+1}P_k + P_{k-1}}{\alpha_{k+1}Q_k + Q_{k-1}}$.

Определение 4. Назовем цепную дробь $(*)$ *симметрической*, если $a_k = a_{n-k}$ при $0 \leq k \leq n$.

3. а) Докажите, что для симметрической цепной дроби при $n = 2k$ выполнены соотношения $P_n = P_{k-1}(P_k + P_{k-2})$ и $Q_n = Q_kP_{k-1} + Q_{k-1}P_{k-2}$, а при $n = 2k+1$ — соотношения $P_n = P_k^2 + P_{k-1}^2$, $Q_n = P_kQ_k + P_{k-1}Q_{k-1}$.

б) Пусть p — простое число вида $4k+1$. Докажите, что среди чисел $\frac{p}{2}, \frac{p}{3}, \ldots, \frac{p}{2k}$ есть число, разлагающееся в симметрическую цепную дробь.
в) **(Рождественская теорема Ферма, доказательство H. J. Smith, 1855.)** При помощи предыдущих пунктов докажите, что любое простое число вида $4k+1$ представимо в виде суммы двух квадратов.

Определение 5. *Бесконечной цепной дробью* называется выражение вида
$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}},$$
где $a_0 \in \mathbb{Z}$ и $a_k \in \mathbb{N}$ при $k > 0$. Понятия *подходящей дроби* и *полного частного* для бесконечной цепной дроби определяются аналогично случаю конечной дроби. *Значением* бесконечной цепной дроби называется предел последовательности ее походящих дробей.

4. Докажите, что а) для любой бесконечной цепной дроби последовательность ее подходящих дробей имеет конечный предел; б) этот предел иррационален; в) любое вещественное число единственным образом раскладывается в бесконечную цепную дробь.

Определение 6. Цепная дробь $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ называется *периодической*, если последовательность (a_i) периодическая (т.е. если существует натуральное t такое, что для всех k начиная с некоторого места выполнено равенство $a_{k+t} = a_k$). Если период длины t начинается с $a_{\ell+1}$, то используется следующее обозначение: $[a_0; a_1, \ldots, a_\ell, \overline{a_{\ell+1}, \ldots, a_{\ell+t}}]$. Для чисто-периодической цепной дроби пишут $[\overline{a_0; a_1, \ldots, a_{t-1}}]$.

5. Докажите, что значение любой периодической цепной дроби является квадратичной иррациональностью (т.е. корнем квадратного уравнения с рациональными коэффициентами).

Теорема Турана и экстремальная теория графов. 15.07.2017

1. В графе $2n$ вершин и $n^2 + 1$ ребро. Докажите, что в нем есть а) треугольник; б) не менее n треугольников.

Определение. Свойство графов P называется *наследственным*, если для любого графа G, обладающего свойством P, любой подграф графа G также обладает этим свойством.

2. (Лемма о наследственном свойстве.) Пусть $P(n)$ — наибольшее количество ребер в графе с n вершинами, обладающим наследственным свойством P. Докажите, что $P(n) \leq \frac{n}{n-2} P(n-1)$.

3. Найдите при помощи леммы о наследственном свойстве наибольшее количество ребер в графе на n вершинах без а) треугольников; б) полных подграфов на 4 вершинах.

4. Теорема Турана (P. Turán, 1941.) Найдите наибольшее возможное количество ребер в графе на v вершинах, не содержащем подграфа K_n (полного подграфа на n вершинах) а) при помощи леммы о наследственном свойстве; б) без помощи леммы о наследственном свойстве.

Задача о запрещенном подграфе. *Дан фиксированный граф H. Требуется найти наибольшее возможное число ребер в графе на v вершинах, не содержащего подграфа, изоморфного H. Такое число мы будем обозначать* $\mathrm{ex}(v, H)$.

Теорема Турана дает нам точное значение числа $\mathrm{ex}(v, K_n)$. Если запрещенный подграф не является полным, задача становится гораздо более сложной и точную формулу как правило указать нельзя. Тем не менее, для случая полного двудольного графа $K_{m,n}$ известны некоторые числа $\mathrm{ex}(v, K_{m,n})$.

5. а) В графе на v вершинах, степень каждой вершины равна d и нет циклов длины четыре. Докажите, что $d \le \frac{1+\sqrt{4v-3}}{2}$. б) В графе на v вершинах нет циклов длины четыре. Докажите, что в этом графе не более $\frac{v(1+\sqrt{4v-3})}{4}$ ребер.

в) **(T. Kövári, V. T. Sós, P. Turán, 1954.)** Пусть $m, n \ge 2$ и $v \ge m+n$. Докажите, что

$$\mathrm{ex}(v, K_{m,n}) \le \frac{1}{2} \cdot \left((m-1)^{\frac{1}{n}} v^{2-\frac{1}{n}} + nv\right).$$

6. В графе 30 вершин, каждое ребро графа покрашено в красный или синий цвет так, что нет трех вершин, попарно соединенных ребрами одного цвета. Какое наибольшее количество ребер может быть в этом графе?

Двойные отношения. 16.07.2017

Определение 1. *Двойным отношением* упорядоченной четверки точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой, называется величина $(A, B, C, D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$.

Определение 2. *Двойным отношением* упорядоченной четверки прямых a, b, c, d, называется величина $(a, b, c, d) = \frac{\sin\angle(\overline{a},\overline{c})}{\sin\angle(\overline{b},\overline{c})} : \frac{\sin\angle(\overline{a},\overline{d})}{\sin\angle(\overline{b},\overline{d})}$, где $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$ — произвольные векторы, направленные вдоль прямых a, b, c, d.

Замечание. Эта величина не зависит от выбора направлений векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}$.

Определение 3. Точки A, B, C, D лежат на окружности S. Пусть X — произвольная точка этой окружности. *Двойным отношением* упорядоченной четверки точек A, B, C, D называется величина $(A, B, C, D) = (XA, XB, XC, XD)$.

Замечание. Эта величина не зависит от выбора точки X. В случае, если одна из точек A, B, C, D совпадает с X, в качестве соответствующей прямой рассматривается касательная к окружности S.

Определение 4. Четверка точек (прямых) называется *гармонической*, если их двойное отношение при каком-либо упорядочении равно -1. Гармоническая четверка точек на окружности называется *гармоническим четырехугольником.*

0. (Нужно сдавать в письменном виде на отдельных листочках.) а) Докажите, что если $(A, B, C, D) = 1$, то либо $A = B$, либо $C = D$. б) Докажите, что $(A, B, C, D) + (A, C, B, D) = 1$. в) Докажите, что двойное отношение сохраняется при полярном преобразовании.

1. Пусть $(A, B, C, D) = k$. Какие значения может принимать двойное отношения той же четверки точек, взятых в другом порядке?

2. а) Пусть M и N — основания внутренней и внешней биссектрис треугольника ABC с основанием BC. Докажите, что $(B, C, M, N) = -1$.

б) Пусть у окружностей разного радиуса с центрами X, Y общие внешние касательные пересекаются в точке A, а общие внутренние касательные в точке B. Докажите, что $(A, B, X, Y) = -1$.

в) На вещественной прямой отметим точки $O(0)$, $A(a)$, $B(b)$. Докажите, что $(A, B, O, X) = -1$ тогда и только тогда, когда координата X равна среднему гармоническому чисел a и b. (Отсюда и взялось название *гармоническая четверка*).

г) Докажите, что $(A, B, C, D) = -1$ тогда и только тогда, когда C и D – инверсны относительно окружности построенной на AB, как на диаметре.

3. Прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке A. На прямой ℓ_1 отмечены точки B_1, C_1, D_1, а на прямой ℓ_2 — точки B_2, C_2, D_2. Докажите, что прямые B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 *конкурентны* (то есть пересекаются в одной точке или параллельны) тогда и только тогда, когда $(A, B_1, C_1, D_1) = (A, B_2, C_2, D_2)$.

4. Продолжения сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, продолжения BC и AD — в точке F, прямые AC и BD пересекают EF в точках M и N. Докажите, что $(E, F, M, N) = -1$.

5. При помощи проекции двойных отношений докажите **Теорему Паппа**. На прямых ℓ_1 и ℓ_2 отмечены точки A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 соответственно. Прямые A_1B_2 и A_2B_1 пересекаются в точке K, прямые A_1C_2 и A_2C_1 — в точке L, прямые B_1C_2 и B_2C_1 — в точке M. Докажите, что точки K, L, M лежат на одной прямой.

6. При помощи проекции двойных отношений докажите **Теорему о бабочке**. В пунктах а) и б) приведены две возможные формулировки этой теоремы.

а) Прямая ℓ пересекает окружность S с центром O, точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на ℓ. На окружности S отмечены точки A, B, C, D такие, что прямые BC и AD пересекаются в точке P. Прямые AB и CD пересекают ℓ в точках X и Z. Докажите, что $XP = PZ$.

б) Прямая ℓ пересекает окружность S с центром O, точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на ℓ. На окружности S отмечены точки A, B, C, D такие, что прямые AB, BC, CD, DA пересекают ℓ в точках X, Y, Z, T соответственно. Известно, что точки Y и T симметричны относительно P. Докажите, что точки X и Z также симметричны относительно P.

Замечание. На самом деле, верна еще более общая формулировка теоремы: условие о том, что прямая пересекает окружность, не обязательно.

7. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ точка M — середина CD, $F = (AD) \cap (BC)$ и $E = (AC) \cap (BD)$. Отличная от M точка N на описанной окружности $\triangle ABM$ такова, что $\frac{AN}{NB} = \frac{AM}{MB}$. Докажите, что точка N лежит на прямой EF.

Матбой Профи8–Профи9. 17.07.2017

1. На плоскости отмечено 100 точек. Оказалось, что в любом треугольнике с вершинами в отмеченных точках имеется высота длины меньше 2. Докажите, что для некоторой прямой найдется 51 отмеченная точка на расстоянии не более 1 от этой прямой.

2. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC пересекает вторично его стороны AC и BC в точках B_1 и A_1 соответственно. Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке P. Точка H — проекция P на BC. Докажите, что окружность, проходящая через серидины отрезков CP, BP и AB проходит через точку H.

3. Натуральное число $n > C_k^3$. Даны $3n$ различных натуральных чисел: a_i, b_i, c_i, где $i = 1, \ldots n$. Докажите, что среди сумм $a_i + b_i$, $a_i + c_i$, $b_i + c_i$ хотя бы $k + 1$ различных.

4. В таблице $n \times n$ расставлены различные натуральные числа, не превосходящие $2n^2$. В каждой строке и в каждом столбце посчитан НОД всех чисел. Расстановка называется *удивительной*, если все эти $2n$ НОДов различны. При каких n существует удивительная расстановка?

5. Из кубиков $1 \times 1 \times 1$ склеен куб $3 \times 3 \times 3$. Постепенно Вася вырезает по одному маленькому кубику так, что:

(1) фигура остается цельной (не распадется на части);

(2) со стороны каждой грани исходного куба фигура выглядит как цельный квадрат 3×3.

Какое наибольшее количество кубиков мог вырезать Вася?

6. Для вещественных a, b и c таких, что $a + b + c = 0$, докажите неравенство

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3 \geqslant 6abc.$$

7. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC, касается стороны AB и пересекает сторону BC в точке P. Биссектриса угла B пересекает в точке K касательную к окружности, проведенную в точке P, и в точке L — отрезок AP. Докажите, что $\angle LAK = \angle LCB$.

8. Найдите все тройки натуральных чисел (x, y, z), для которых число

$$\sqrt{\frac{2017}{x+y}}+\sqrt{\frac{2017}{y+z}}+\sqrt{\frac{2017}{z+x}}$$

является целым.

9. Решите в целых неотрицательных числах уравнение $2^{3a}+2^a+1=b^2$.

10. В полном графе графе с 200 вершинами на каждом ребре ввели ориентацию. Докажите, что в получившемся графе можно выбрать ориентированный путь из 199 звеньев, в котором первые 100 ребер ориентированы в сторону начала пути, а следующие 99 — в сторону конца.

Матбой Профи9–Профи10. 17.07.2017

1. Пусть k, n — натуральные числа, причём $n > C_k^3$. Даны $3n$ попарно различных натуральных чисел: a_i, b_i, c_i, где $i = 1, \ldots, n$. Докажите, что среди сумм вида $a_i + b_i$, $a_i + c_i$, $b_i + c_i$ хотя бы $k + 1$ различных.

2. В таблице $n \times n$ расставлены различные натуральные числа, не превосходящие $2n^2$. В каждой строке и в каждом столбце посчитан НОД всех чисел. Расстановка называется *удивительной*, если все эти $2n$ НОДов различны. При каких n существует удивительная расстановка?

3. Множество S вершин графа называется *доминирующим*, если любая вершина графа, не входящая в S, смежна с какой-то вершиной из S. Существует ли граф с четным числом доминирующих множеств?

4. Стороны AB и EF вписанного шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в точке X, стороны EF и CD — в точке Y, а стороны CD и AB — в точке Z. На прямой EF выбрана точка M так, что $MB \perp AE$. На прямой CD выбрана точка N так, что $NF \perp CE$, а на прямой AB выбрана точка K так, что $KD \perp AC$. Точки O_x, O_y и O_z центры описанных окружностей треугольников MBE, FNC и AKD соответственно. Докажите, что прямые XO_x, YO_y и ZO_z пересекаются в одной точке.

5. В 10 коробках лежат камни: в k-ой коробке лежит $2000 + k$ камней ($k = 1, 2, \ldots, 10$). Двое играют в такую игру: один из игроков выбирает любые 5 коробок и вынимает из каждой из них некоторое ненулевое количество камней. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Кто из игроков выиграет при правильной игре?

6. Даны числа a, b, $c \in [-1, 1]$. Известно, что $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 1 + 2abc$. Докажите, что для всякого натурального n имеет место неравенство $a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} \leqslant 1 + 2(abc)^n$.

7. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle A = 90°$) биссектрисы BD и CE пересекаются в точке I. Могут ли длины каждого из отрезков AB, AC, BI, ID, CI, IE быть целыми числами?

8. Выпуклый многоугольник на плоскости таков, что его образ при любом параллельном переносе содержит целую точку. Докажите, что расстояние между какими-то двумя вершинами многоугольника не меньше $\sqrt{2}$.

9. Пусть $P(x)$ — приведенный многочлен степени n, имеющий n вещественных корней с учетом кратностей; $P(2017) = 2017$. Пусть $Q(x) = \prod_{j=1}^{2017} P(x + j)$. Докажите, что $Q(x)$ имеет как минимум 1000 различных корней, по модулю меньших 2017.

10. На каждой клетке бесконечной шахматной доски написано наименьшее количество ходов, за которое конь может дойти от этой клетки до данной клетки O. Назовем клетку *особой*, если на ней написано число 100, а на всех соседних с ней (по стороне) клетках — 101. Сколько существует особых клеток?

Функции и Непрерывность. 19.07.2017

0. (Нужно сдавать в письменном виде на отдельных листочках.)

а) **(Функция Дирихле.)** Докажите, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

разрывна во всех вещественных точках.

б) **(Функция Римана.)** Докажите, что функция

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \dfrac{1}{q}, & x \in \mathbb{Q}, x = \dfrac{p}{q} \end{cases}$$

имеет разрыв во всех рациональных точках и непрерывна во всех иррациональных точках.

1. Пусть $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ — непрерывная функция. Докажите, что найдётся $x \in [0, 1]$ такой, что $f(x) = x$.

2. Положительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ таковы, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$. Докажите, что для любых положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ выполнено неравенство

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \geqslant x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

3. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что образом любого отрезка является отрезок такой же длины.

4. а) На плоскости даны многоугольник и прямая. Докажите, что найдется прямая, параллельная данной, которая делит площадь многоугольника пополам.

б) Докажите, что непрерывная функция на окружности принимает одинаковые значения в некоторой паре диаметрально противоположных точек.

в) На плоскости дан выпуклый многоугольник. Докажите, что существует прямая, делящая пополам и его площадь, и его периметр.

г) Докажите, что для произвольного многоугольника существуют две взаимно перпендикулярные прямые, делящие его площадь на четыре равные части

5. Найдите все непрерывные функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(\sin \pi x) = f(x) \cos \pi x.$$

6. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что $f(1) = 1$, $f(a)f(1/a) = 1$ и $f(a + b) = f(a) + f(b)$ для любых вещественных a и b. Докажите, что $f(x) \equiv x$.

Цепные дроби, приближения и алгебраические числа. 19.07.2017

0. (Нужно сдавать в письменном виде на отдельных листочках.) а) Какое число имеет разложение в цепную дробь $[\overline{1}] = [1; 1, 1, 1, \ldots]$? б) Разложите в цепную дробь число $\sqrt{2}$. (*Разумеется, ответы без обоснования не будут засчитываться.*)

1. Пусть $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ — разложение иррационального числа в цепную дробь.

а) Докажите, что для любой подходящей дроби выполнены неравенства $\frac{1}{Q_n(Q_{n+1}+Q_n)} < \left|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$.

б) Выведете из предыдущего пункта **теорему Дирихле.** (Для любого $\tau > 1$ существует рациональное число $\frac{p}{q}$, такое, что $1 \leq q \leq \tau$ и $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q\tau}$.)

в) Докажите, что среди любых двух последовательных подходящих дробей к α как минимум для одной выполняется неравенство $|\alpha - \frac{P_n}{Q_n}| < \frac{1}{2Q_n^2}$ (и тем самым существует бесконечно много рациональных чисел $\frac{p}{q}$, таких, что $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$).

Замечание. На самом деле, верно и более сильное утверждение: для любого иррационального α существует бесконечно много рациональных чисел $\frac{p}{q}$, таких, что $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$, причем константу $\sqrt{5}$ нельзя увеличить.

2. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\frac{a}{b} \neq \alpha$ ($a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ и $(a, b) = 1$) таковы, что $|\alpha - \frac{a}{b}| < \frac{1}{2b^2}$. Рассмотрим разложение $\frac{a}{b} = [a_0; a_1, \ldots, a_s]$ числа $\frac{a}{b}$ в цепную дробь. Пусть $\omega = \frac{P_{s-1} - \alpha Q_{s-1}}{\alpha Q_s - P_s}$. а) Докажите, что $|\omega + \frac{Q_{s-1}}{Q_s}| > 2$. б) Пусть $\omega = [a_{s+1}; a_{s+2}, \ldots]$. Докажите, что тогда $\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_s, a_{s+1}, \ldots]$. (Тем самым, если $|\alpha - \frac{a}{b}| < \frac{1}{2b^2}$, то $\frac{a}{b}$ является одной из подходящих дробей к α.)

Определение 1. Иррациональное α число называется *квадратичной иррациональностью*, если оно является корнем квадратного уравнения с рациональными коэффициентами. *Сопряженной иррациональностью* для квадратичной иррациональности α называется число $\overline{\alpha}$, являющееся корнем того же трехчлена.

Квадратичная иррациональность α называется *приведенной*, если $\alpha > 1$ и $-1 < \overline{\alpha} < 0$.

Дискриминантом квадратичной иррациональности α называется дискриминант квадратного трехчлена $f_\alpha(x)$, корнем которого является α, причем $f_\alpha(x)$ выбирается так, чтобы его коэффициенты были взаимно простыми в совокупности целыми числами.

3. а) Пусть α — квадратичная иррациональность. Докажите, что при ее разложении в цепную дробь все полные частные α_k будут квадратичными иррациональностями с тем же дискриминантом.

б) Пусть α — приведенная квадратичная иррациональность. Докажите, что все α_k также являются приведенными квадратичными иррациональностями. Выведете из этого то, что цепная дробь — периодическая.

в) **(Теорема Эйлера-Лагранжа.)** Докажите, что цепная дробь, в которую раскладывается иррациональное число α периодична тогда и только тогда, когда α — квадратичная иррациональность.

г) Докажите, что цепная дробь чисто периодическая тогда и только тогда, когда α — приведенная квадратичная иррациональность.

Определение 2. Число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется *алгебраическим*, если оно является корнем ненулевого многочлена с рациональными коэффициентами. Многочлен $f_\alpha(x) \in \mathbb{Q}[x]$ называется *минимальным многочленом* алгебраического числа α, если $f_\alpha(\alpha) = 0$ и $f_\alpha(x)$ имеет наименьшую степень среди всех многочленов с рациональными коэффициентами, корнем которых является α.

Замечание. 1) Любое рациональное число является алгебраическим, поскольку является корнем линейного многочлена с рациональными коэффициентами.

2) Минимальный многочлен неприводим (докажите это, это совсем просто!)

3) Минимальный многочлен не единственен, но легко видеть (докажите это!), что любые два минимальных многочлена числа α отличаются друг от друга домножением на константу. Минимальный многочлен можно выбрать так, чтобы его коэффициенты были целыми числами.

4. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ — алгебраическое число, $f_\alpha(x) \in \mathbb{Z}[x]$ — минимальный многочлен α, $n = \deg f_\alpha$.

а) Пусть $\frac{p}{q}$ — отличное от α рациональное число ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$). Докажите, что $|f_\alpha(\frac{p}{q})| \geq \frac{1}{q^n}$.

б) **(Теорема Лиувилля, 1844.)** Докажите, что существует такая константа c (зависящая только от α), что для любого рационального числа $\frac{p}{q} \neq \alpha$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$) выполнено неравенство $|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^n}$.

в) **(Число Лиувилля.)** Докажите, что число $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ — трансцендентно.

Асимптотика. 20.07.2017

1. Докажите, что существует натуральное N такое, что уравнение $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = N$ имеет не менее 1000 решений в натуральных числах.

2. Из клетчатой плоскости выбросили все клетки, обе координаты которых делятся на 100. Можно ли все оставшееся клетки обойти ходом коня?

3. На плоскости изображены несколько углов так, что они покрывают всю плоскость (т.е. каждая точка плоскости лежит внутри хотя бы одного из этих углов. Докажите, что их сумма хотя бы 360°.

4. Существует ли многочлен с вещественными коэффициентами, значения которого во всех натуральных числах — степени двойки?

5. На плоскости проведены несколько попарно непараллельных прямых. По каждой прямой со скоростью 1 км/сек ползет черепашка. Докажите, что по прошествии некоторого времени черепашки окажутся в вершинах выпуклого многоугольника.

6. (Теорема Минковского.) На плоскости дана выпуклая центрально-симметричная фигура площади больше четырех с центром в целой точке. Докажите, что внутри нее есть еще хотя бы одна целая точка.

7. На клетчатой плоскости стоит квадрат $n \times n$, составленный из фишек. Разрешается прыгать фишкой через соседнюю по стороне фишку на свободную клетку, при этом фишка, через которую перепрыгнули, снимается. Докажите, что для любого $\varepsilon > 0$ ситуация, в которой нельзя больше сделать ни одного хода, может возникнуть не раньше, чем через $n^2(\frac{1}{2} - \varepsilon)$ ходов для всех достаточно больших n.

Геометрический разнобой. 20.07.2017

1. Окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках P и Q, а также описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ABC лежит на отрезке PQ.

2. В параллелограмм $A_1A_3A_5A_7$ вписан ромб $A_2A_4A_6A_8$, а в параллелограмм $B_2B_4B_6B_8$ — ромб $B_1B_3B_5B_7$ так, что все точки A_1, …, A_8 и B_1, …, B_8 различны и расположены в порядке обхода соответствующих параллелограммов. Оказалось, что $A_iA_{i+1} = B_iB_{i+1}$ при всех $i = 1$, 2, 3, 4. Докажите, что $\angle A_2A_4A_6 = \angle B_1B_2B_3$.

3. Дана полуокружность с центром O и диаметром AB. На ней расположены точки P и Q ($AP < AQ$). Лучи AP и BQ пересекаются в точке R. Оказалось, что ортоцентр H треугольника PQR лежит на полуокружности. Чему может быть равен $\angle AOH$?

4. На окружности даны 5 точек U, V, A, B, C. Прямые UA и VB пересекаются в точке M, прямые UB и VA — в точке M_1, прямые UB и VC — в точке N, прямые UC и VB — в точке N_1, прямые UC и VA — в точке P и прямые UA и VC — в точке P_1. Докажите, что прямые MM_1, NN_1 и PP_1 пересекаются в одной точке или параллельны.

5. Пусть R и S – две различные точки на окружности Ω такие, что RS не является диаметром. Пусть ℓ – касательная к Ω в точке R. Точка T выбрана так, что S является серединой отрезка RT. Точка J выбрана на меньшей дуге RS окружности Ω так, что окружность Γ, описанная около треугольника JST, пересекает ℓ в двух различных точках. Пусть A – та из общих точек Γ и ℓ, которая находится ближе к точке R. Прямая AJ вторично пересекает Ω в точке K. Докажите, что прямая KT касается Γ.

6. а) **(Теорема о двойной бабочке.)** На окружности S отмечены точки A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4. Прямая ℓ пересекает прямые A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 в точках X_1, X_2, X_3, X_4 соответственно и прямые B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4 в точках X_1, X_2, X_3 соответственно. Докажите, что прямая B_4B_1 проходит через точку X_4.

б) (**Теорема о бабочке.**) Через точку M, являющуюся серединой хорды PQ некоторой окружности, проведены хорды AB и CD. Хорды AD и BC пересекают отрезок PQ в точках X и Y. При помощи пункта а) докажите, что точка M является серединой отрезка XY.

7. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = 2\angle B$. Пусть D — основание биссектрисы угла A. Окружность ω с центром в точке S касается внешним образом описанных окружностей треугольников ABD и ACD, а также касается прямой AB (ω и точка C лежат по одну сторону от AB). Докажите, что прямые AS и BC перпендикулярны.

Мощности. 21.07.2017

0. (Нужно сдавать в письменном виде на отдельных листочках.) Докажите, что множество всех подмножеств любого множества M имеет большую мощность, чем M.

1. а) Докажите, что на плоскости нельзя изобразить более чем счетное количество попарно не пересекающихся кругов.

Верно ли аналогичное утверждение для “восьмерок” (то есть пар касающихся внешним образом окружностей, окружности из разных восьмерок не могут пересекаться, но одна восьмерка может содержаться внутри другой)?

2. Докажите, что множество всевозможных бесконечных последовательностей нулей и единиц — континуально.

3. Верно ли, что множество а) всех функций; б) непрерывных функций $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ континуально?

4. а) Существует ли континуальная цепочка попарно вложенных друг в друга подмножеств счетного множества?

б) Может ли иметь континуальную мощность система подмножеств счетного множества, любые два из которых имеют конечное пересечение?

5. После того, как бесы, коих бесконечно много, проиграли Балде, им стало так стыдно, что они решили заняться физкультурой и записались в спортивные секции. Известно, что в каждую секцию записалось конечное число бесов, и среди любого бесконечного набора бесов найдутся двое, занимающиеся в одной и той же секции. Докажите, что бесов-лентяев, которые ходят в конечное число секций, лишь конечное число.

Квадратичный закон взаимности Гаусса. 21.07.2017

Сначала напомним несколько фактов, которые вы должны знать о квадратичных вычетах.

1. Пусть $m > 1$ — натуральное число и a — целое число, взаимно простое с m. Число a называется квадратичным вычетом по модулю m, если существует $x \in N$ такое, что $a \equiv x^2 \pmod p$. В противном случае число a называется квадратичным невычетом по модулю m.

2. Пусть p — простое число. Символом Лежандра называется выражение, обозначаемое $\left(\frac{a}{p}\right)$, равное 1, если a — квадратичный вычет по модулю p; -1, если a — квадратичный невычет по модулю p; и 0, если a делится на p.

3. Символ Лежандра мультипликативен: $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$, где p — простое число.

4. $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}}$, где p — простое нечётное число.

1. Пусть p — нечетное простое число, $t = \frac{p-1}{2}$, $0 < x \le t$ и $(a,p) = 1$. Докажите, что а) $ax \equiv (-1)^{[\frac{2ax}{p}]} \cdot r_x \pmod p$, где $0 < r_x \le t$; б) $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum_{x=1}^{t}[\frac{2ax}{p}]}$.

2. Пусть p — нечетное простое число, $t = \frac{p-1}{2}$, $0 < x \le t$ и a — нечетное число, взаимно простое с p. Докажите, что а) $\left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum_{x=1}^{t}[\frac{ax}{p}]+\frac{p^2-1}{8}}$; б) $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$; в) $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum_{x=1}^{t}[\frac{ax}{p}]}$.

3. (Квадратичный закон взаимности Гаусса.) Докажите, что $\left(\frac{q}{p}\right)\cdot\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$ для любых различных нечетных простых чисел p и q.

4. а) Пусть $(m,n) = 1$. Докажите, что число a является квадратичным вычетом по модулю mn тогда и только тогда, когда оно является квадратичным вычетом по модулям m и n. б) Пусть p — нечетное простое число, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что a является квадратичным вычетом по модулю p^n тогда и только тогда, когда a является квадратичным вычетом по модулю p. в) Докажите, что a является квадратичным вычетом по модулю 2^n (где $n > 3$) тогда и только тогда, когда a является квадратичным вычетом по модулю 8.

5. Докажите, что простых чисел вида $8k - 1$ бесконечно много.

6. Докажите, что $2^{3^n} + 1$ имеет хотя бы $2n$ простых делителя вида $8k + 3$. (Простые делители могут повторяться)

7. Существует ли такое натуральное число $n > 5$, что $3^n + 5^n$ делится на $n^2 - 25$?

Разнобой. 22.07.2017

1. Пусть $x, y, z > 0$ таковы, что $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{xyz}$. Докажите, что

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{2z}{\sqrt{1+z^2}} < 3.$$

2. Пусть A — бесконечное подмножество натуральных чисел. Найдите все такие натуральные n, что для любого $a \in A$, выполнено

$$a^n + a^{n-1} + \dots + a^1 + 1 \mid a^{n!} + a^{(n-1)!} + \dots + a^{1!} + 1.$$

3. В слове более 10 букв, любые две последовательные буквы различны. Докажите, что можно поменять местами 2 последовательные буквы, чтобы получившееся слово не было периодическим, то есть не может быть разделено на равные подслова.

4. Все вершины плоского графа имеют степень 3. а) Его ребра можно правильным образом раскрасить в 3 цвета. Докажите, что страны можно правильным образом раскрасить в 4 цвета. б) Его страны можно правильным образом раскрасить в 4 цвета. Докажите, что ребра можно правильным образом раскрасить в 3 цвета.

5. Хозяйка умеет печь торты k различных сортов. Она устроила пир на 66 человек, на котором каждая компания из 36 человек съела по одному торту. Причем для любых двух компаний A и B евших торты одного сорта $|A \cap B| > 18$. Докажите, что хозяйка может устроить пирушку на 12 человек так, чтобы каждая компания из 6 человек съела по одному торту и для любых двух компаний A и B, евших торты одного сорта $|A \cap B| \neq 3$.

6. Центры окружностей S_1, S_2 и S_3 лежат на одной прямой, причем S_1 и S_2 не пересекаются, а S_3 внешним образом касаются двух других окружностей. Докажите, что окружность S_3 пересекает общие внутренние касательные к S_1 и S_2 в четырех точках, образующих четырехугольник, две стороны которого параллельны общим внешним касательным к S_1 и S_2.

7. О функции $f(x)$, заданной на всей вещественной прямой, известно, что при любом $a > 1$ функция $f(x) + f(ax)$ непрерывна на всей прямой. Докажите, что $f(x)$ также непрерывна на всей прямой.

Заключительная олимпиада. 23.07.2017

1. Конечное множество S точек целочисленной решетки на плоскости назовем *двусоседним множеством*, если для каждой точки $(p, q) \in S$ ровно две точки из $(p+1, q)$, $(p-1, q)$, $(p, q-1)$, $(p, q+1)$ принадлежат S. Для каких n существует двусоседнее множество из n точек?

2. На высоте AK треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на перпендикуляре, опущенном из точки A на прямую DE.

3. У чисел n, $n + 100$, $n + 200$ наибольшие собственные делители равны. Найдите, чему может быть равно n. (Собственным делителем числа называется делитель, отличный от 1 и от самого числа).

4. На нижней горизонтали доски 2017×2017 стоят пять роботов. Оператор может отдать любому из роботов одну из следующих четырех команд: “вверх”, “вниз”, “влево” или “вправо”, после чего робот движется в указанном ему направлении до ближайшего препятствия (т.е. до тех пор, пока он не достигнет края доски или не “упрется” в другого робота). Роботы могут ходить в любом порядке, но в каждый момент времени может двигаться только один робот. Можно ли так командовать роботами, чтобы они в итоге стали в виде “креста” (т.е. один из роботов стоял в некоторой клетке, а остальные четыре — в соседних с ней клетках)?

5. Найдите все многочлены $P(x)$ с целыми коэффициентами, такие, что для бесконечного числа натуральных n число $P(P(n) + n)$ является простым.

. . . .

Заключительная олимпиада. Вывод

6. На продолжении стороны AD прямоугольника $ABCD$ за точку D выбрана точка E. Луч EC вторично пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABE, в точке F. Лучи DC и AF пересекаются в точке P. На прямую ℓ, проходящую через точку E параллельно прямой AF, опущен перпендикуляр CH. Докажите, что прямая PH касается окружности ω.

7. Сумма неотрицательных чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_n равна 2. При $n \geq 4$ докажите неравенство

$$\frac{x_1}{1+x_2^2}+\frac{x_2}{1+x_3^2}+\ldots+\frac{x_n}{1+x_1^2} \geq \frac{3}{2}.$$

8. Имеется 25 масок, каждая своего цвета. k мудрецов играют в игру: им показывают все маски, потом они договариваются между собой, после чего им надевают маски таким образом, что каждый из них видит маски на всех остальных (но не знает, на ком они надеты) и не видит свою. Никакие формы взаимодействия при этом не разрешаются. Все они одновременно называют по одному цвету, пытаясь угадать цвет своей маски. При каком наименьшем k они могут так заранее договориться, чтобы хотя бы один из них непременно угадал?