9 класс, диаграммы Юнга, теория, 17 июля

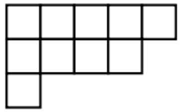
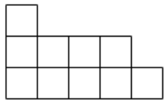


Диаграмма Юнга — это конечный набор клеток, выровненных по левой границе, в котором длины строк образуют невозрастающую последовательность.



Сопряженная диаграмма Юнга – диаграмма, которая получается из диаграммы Юнга отражением её относительно диагонали.

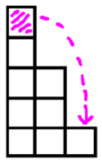
Набор чисел, состоящий из длин строк, задаёт разбиение неотрицательного целого числа *n* на натуральные слагаемые. Рис. изображает диаграмму Юнга разбиения числа 10 на (5, 4, 1). Сопряжённое разбиение, измеряющее высоты столбцов, есть (3, 2, 2, 2, 1).

Диаграмма Юнга A меньше диаграммы B, если A может быть вложена в B.

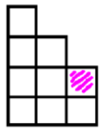
Весом диаграммы Юнга называется количество клеток в ней.

Говорят, что диаграмма Юнга, соответствующая набору $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, *мажорирует* диаграмму Юнга, соответствующую набору $\beta=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, если справедлива система неравенств:

$$\begin{cases} \alpha_1 \geq \beta_1 \\ \alpha_1+\alpha_2 \geq \beta_1+\beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1} \geq \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{n-1} \\ \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n = \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n \end{cases}$$



Набор (5,3,1)



Набор (4,3,2)
$(4,3,2) = R_{1,3}(5,3,1)$

В этом случае также говорят, что набор α мажорирует набор β, и записывают это как a≻ b. Иногда отношение мажорируемости называют сбрасываемости (см. рисунок).

Упражнения на диаграммы Юнга

1. Нарисуйте все диаграммы Юнга с весом 4.
2. Расположите все ДЮ весом 4 в порядке убывания по мажорированию.
3. Найдите все несравнимые наборы с весом 6.
4. Найдите все несравнимые по мажорируемости диаграммы с весом 7.
5. Постройте дерево порядка диаграмм Юнга по вхождению. Какие диаграммы будут по его краям?
6. Могут ли существовать две несравнимые по вхождению диаграммы Юнга?

Тридцать третья Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2017 года.

9 класс, диаграммы Юнга, теория, 17 июля

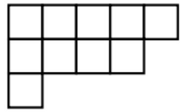
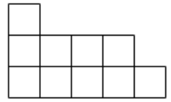


Диаграмма Юнга — это конечный набор клеток, выровненных по левой границе, в котором длины строк образуют невозрастающую последовательность.



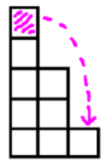
Сопряженная диаграмма Юнга – диаграмма, которая получается из диаграммы Юнга отражением её относительно диагонали.

Набор чисел, состоящий из длин строк, задаёт разбиение неотрицательного целого числа *n* на натуральные слагаемые. Рис. изображает диаграмму Юнга разбиения числа 10 на (5, 4, 1). Сопряжённое разбиение, измеряющее высоты столбцов, есть (3, 2, 2, 2, 1).

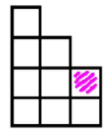
Диаграмма Юнга A меньше диаграммы B, если A может быть вложена в B.

Говорят, что диаграмма Юнга, соответствующая набору $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, *мажорирует* диаграмму Юнга, соответствующую набору $\beta=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, если справедлива система неравенств:

$$\begin{cases} \alpha_1 \geq \beta_1 \\ \alpha_1+\alpha_2 \geq \beta_1+\beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1} \geq \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{n-1} \\ \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n = \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n \end{cases}$$



Набор (5,3,1)



Набор (4,3,2)
$(4,3,2) = R_{1,3}(5,3,1)$

В этом случае также говорят, что набор α мажорирует набор β, и записывают это как a≻ b. Иногда отношение мажорируемости называют сбрасываемости (см. рисунок).

Упражнения на диаграммы Юнга

1. Нарисуйте все диаграммы Юнга с весом 4.
2. Расположите все ДЮ весом 4 в порядке убывания по мажорированию.
3. Найдите все несравнимые наборы с весом 6.
4. Найдите все несравнимые по мажорируемости диаграммы с весом 7.
5. Постройте дерево порядка диаграмм Юнга по вхождению. Какие диаграммы будут по его краям?
6. Могут ли существовать две несравнимые по вхождению диаграммы Юнга?

9 класс, диаграммы Юнга, задачи, 17 июля

1. У Алёши есть пирожные, разложенные в несколько коробок. Алёша записал, сколько пирожных в каждой коробке. Серёжа взял по одному пирожному из каждой коробки и положил их на первый поднос. Затем он снова взял по одному пирожному из каждой непустой коробки и положил их на второй поднос – и так далее, пока все пирожные не оказались разложенными по подносам. После этого Серёжа записал, сколько пирожных на каждом подносе. Докажите, что количество различных чисел среди записанных Алёшей равно количеству различных чисел среди записанных Серёжей.

2. $a_1, a_2, ..., a_n$ — произвольные натуральные числа. Обозначим через b_k количество чисел из набора $a_1, a_2, ..., a_n$, удовлетворяющих условию: $a_i \geq k$. Доказать, что $a_1 + a_2 + ... + a_n = b_1 + b_2 + ...$

3. На доске написали несколько натуральных чисел. Пусть a_n – количество тех из них, которые больше n. Исходные числа стерли и вместо них написали все ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ a_n.затем с новыми числами проделали то же самое. Докажите, что на доске появился исходный набор.

4. Рассматриваются всевозможные наборы из 100 неотрицательных целых чисел, расположенных в неубывающем порядке и не превосходящие 100, в которых сумма всех чисел делится на 10. Докажите, что ровно половина этих наборов заканчивается числом 100.

5. Докажите, что количество разбиения числа N на не более чем m слагаемых равно числу разбиения числа $N+m$ ровно на m слагаемых.

6. Числа называются *приблизительно равными*, если их разность не больше 1. Сколько существует разных способов разбить число 2017 на натуральные слагаемые, которые *приблизительно равны*? Способы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

7. Докажите, что количество разбиения числа N, на слагаемые, не превосходящие m, столько же, сколько разбиений числа N на не более чем m слагаемых.

8. Докажите, что количество разбиений числа N на не более чем m слагаемых ровно столько же, сколько способов разбить число $N+\frac{m(m+1)}{2}$ на m попарно различных слагаемых.

9. Докажите, что что количество разбиения числа N на нечетные слагаемые равно количеству разбиений числа N на попарно различные слагаемые (подсказка: модифицируйте диаграмму Юнга до осесимметричной).

10. Пусть $p(n)$ – количество разбиений числа n ($p(0) = 1$). Докажите равенство

$p(0) + p(1)x + p(2)x^2 + ... = (1 + x + x^2 + ...)...(1 + x^k + x^{2k} + ...)..p(0) = 1.)$

11. Обозначим через $d(n)$ количество разбиений числа n на различные слагаемые, а через $l(n)$ – на нечетные. Докажите равенства:

а) $d(0) + d(1)x + d(2)x^2 + ... = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)...$;

б) $l(0) + l(1)x + l(2)x^2 + ... = (1 - x)^{-1}(1 - x^3)^{-1}(1 - x^5)^{-1}...$;

в) $d(n) = l(n)$ ($n = 0, 1, 2, ...$).

12. Для каждого натурального n обозначим через $p(n)$ число разбиений n в сумму натуральных слагаемых. Количество различных чисел в данном разбиении назовем его разбросом (например, разбиение 4 = 1 + 1 + 2 имеет разброс 2, потому что в этом разбиении два различных числа)

а) Докажите, что сумма $Q(n)$ разбросов всех разбиений числа n равна $1 + P(1) + P(2) + ... + P(n-1)$.

б) Докажите, что $Q(n) \leq \sqrt{2n}P(n)$