9 класс, лексикографический порядок, 19 июля

Аксиомы Пеано

I. 1 является натуральным числом;
II. Число, следующее за натуральным, тоже является натуральным;
III.1 не следует ни за каким натуральным числом;
IV. Если натуральное число *a* непосредственно следует как за числом *b*, так и за числом *c*, то *b* и *c* тождественны;
V. (Аксиома индукции.) Если какое-либо предложение доказано для 1 (база индукции) и если из допущения, что оно верно для натурального числа *n*, вытекает, что оно верно для следующего за *n* натурального числа (индукционное предположение), то это предложение верно для всех натуральных чисел.

Лемма. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:
1) В каждом непустом подмножестве $\mathbb{N}$ есть наименьший элемент.
2) Любая строго убывающая последовательность элементов $\mathbb{N}$ конечна.
3) Любая невозрастающая последовательность элементов $\mathbb{N}$ стабилизируется.
4) Аксиома индукции

1. Петя ставит точку с натуральными координатами, проводит из нее два луча вправо и вверх, и закрашивает внутренность угла и его стороны. Следующую точку с натуральными координатами он выбирает среди незакрашенных, и так же строит и закрашивает угол. Докажите, что через несколько операций все точки с натуральными координатами будут закрашены.

2. Компьютер сортирует массив из 100 натуральных чисел, стремясь выстроить элементы в порядке неубывания. Для этого он находит два любых элемента (возможно, несоседних), где левый больше правого, и меняет их местами. После чего вирус новый правый элемент умножает на 10.

а) Докажите, что рано или поздно массив отсортируется.
б) А если числа вещественные?
в) А если числа вещественные и положительные?

Определение. Обозначим $\mathbb{N}^m = \{(a_1, a_2, \ldots, a_m), a_i \in \mathbb{N}\}$ Пусть $A, B \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что $A \prec B$ (*B* доминирует над *A*, если: или $a_1 < b_1$; или $a_1 = b_1$ и $a_2 < b_2$; или $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ и $a_3 < b_3$ и т.д.

Свойство. Если $A \prec B$, $B \prec C$, то $A \prec C$.

Теорема. Докажите, что **а)** строго убывающая последовательность строк из $\mathbb{N}^m$ всегда конечна. **б)** в каждом непустом подмножестве из $\mathbb{N}^m$ есть наименьший элемент.

3. В обиходе есть монеты номиналом 1 коп, 5 коп, 10 коп, 50 коп, 1 руб, 2 руб, 5 руб, 10 руб. Банкир заключил сделку с дьяволом: каждый день он отдаёт дьяволу одну монету и получает взамен любое количество монет меньшего достоинства по своему выбору. Если монет не останется, банкир проигрывает дьяволу душу. Может ли банкир спасти свою бессмертную душу?

4. Есть натуральное число *x*>1. Каждую секунду Петя пишет вместо него число $y = \frac{x(p-1)^k}{p}$, где *p* – какой-нибудь простой делитель числа *x*, а число *k* произвольно (и меняется от хода к ходу). Докажите, что рано или поздно у Пети получится 1.

5. В шеренгу стоят несколько новобранцев. После команды «Налево» каждый из них повернулся в какую-то сторону. Затем каждую секунду происходило следующее. Если какой-нибудь солдат видел перед собой лицо другого, то он поворачивался кругом. **а)** Докажите, что рано или поздно они перестанут поворачиваться. **б)** если новобранцев *n*, то за сколько секунд повороты гарантированно прекратятся?

6. Аналогично можно определить порядок на множестве бесконечных вправо строк натуральных чисел. Верен ли для него аналог теоремы?

7. В ряд слева направо лежит несколько шаров – синих и желтых. За один ход Ефим может поменять местами два рядом стоящие шара, после чего справа от каждого желтого шара возникает 10 синих. Ефим хочет собрать все желтые шары на левом крае. Всегда ли он сможет это сделать?

7-1. Та же задача, но желтые шары, достигшие левого края, аннигилируют. Можно ли уничтожить все желтые шары.

8. В очереди к стоматологу стоят 30 ребят: мальчиков и девочек. Часы на стене показывают 8:00. Как только начинается новая минута, каждый мальчик, за которым стоит девочка, пропускает ее вперед. Докажите, что перестановки в очереди закончатся до 8:30, когда откроется дверь кабинета.

9. Пусть *P*(*x*) и *Q*(*x*) – два многочлена с натуральными коэффициентами. Будем говорить, что *P* асимптотически меньше *Q*, если *P*(*x*)<*Q*(*x*) для всех достаточно больших *x*. Существует ли бесконечная последовательность многочленов P_1, P_2, …, в которой каждый следующий асимптотически меньше предыдущего?

10. 1000 монет разложены на 10 куч. Играют двое. Первый своим ходом выбирает 4 кучи и делит каждую из них на правую и левую (возможно, пустые). После этого второй нетождественно переставляет левые кучи и соединяет их с правыми обратно. В любой момент вместо своего хода первый может забрать любые три кучи и прекратить игру. Докажите, что он сможет обеспечить себе не менее 980 монет.

11. Имеется бесконечная последовательность диаграмм Юнга. Докажите, что в ней найдутся две диаграммы, одна из которых содержится внутри другой.