9 класс, многочлены $\mathbb{Z}_p[x]$ и первообразные задачи, 10 июля

1. Приведите пример ненулевого многочлена $F \in \mathbb{Z}_p[x]$ такого, что для всех что с $\in \mathbb{Z}_p$ выполнено F(c)=0.

2. Пусть $F, G \in \mathbb{Z}_p[x]$ и их степени не больше p–1. Докажите, что если для всех что с $\in \mathbb{Z}_p$ выполнено F(c)=G(c), то $F \equiv G$.

3. Докажите, что любая функция $f: \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ задается некоторым многочленом степени не выше p–1.

4. Докажите, что многочлен $(x^2-13)(x^2-17)(x^2-221)$ имеет корни по любому простому модулю p.

5. Докажите, что для любого простого p первые (p–1) натуральных чисел можно расставить по кругу так, чтобы для любых трех подряд идущих чисел a, b, c разность $b^2 - ac$ делилась на p.

6. Найдите а) произведение всех ненулевых вычетов по модулю p; б) сумму их k-х степеней.

7. Решите сравнение $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 \equiv 0 \pmod{101}$.

8. Пусть p – простое число и $S = 1^n+2^n+\ldots+(p-1)^n$. Докажите, что S или S+1 делится на p.

9. Докажите, что число 3 является первообразным корнем по модулю простого числа $p=2^n+1$, $n>1$.

10. Пусть p – простое число, F – многочлен с целыми коэффициентами такой, что $F(0)=0$, $F(1)=1$ и для любого натурального n остаток при делении F(n) на p равен 0 или 1. Докажите, что $\deg F \le p-1$.

Тридцать третья Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2017 года.

9 класс, многочлены $\mathbb{Z}_p[x]$ и первообразные задачи, 10 июля

1. Приведите пример ненулевого многочлена $F \in \mathbb{Z}_p[x]$ такого, что для всех что с $\in \mathbb{Z}_p$ выполнено F(c)=0.

2. Пусть $F, G \in \mathbb{Z}_p[x]$ и их степени не больше p–1. Докажите, что если для всех что с $\in \mathbb{Z}_p$ выполнено F(c)=G(c), то $F \equiv G$.

3. Докажите, что любая функция $f: \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ задается некоторым многочленом степени не выше p–1.

4. Докажите, что многочлен $(x^2-13)(x^2-17)(x^2-221)$ имеет корни по любому простому модулю p.

5. Докажите, что для любого простого p первые (p–1) натуральных чисел можно расставить по кругу так, чтобы для любых трех подряд идущих чисел a, b, c разность $b^2 - ac$ делилась на p.

6. Найдите а) произведение всех ненулевых вычетов по модулю p; б) сумму их k-х степеней.

7. Решите сравнение $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 \equiv 0 \pmod{101}$.

8. Пусть p – простое число и $S = 1^n+2^n+\ldots+(p-1)^n$. Докажите, что S или S+1 делится на p.

9. Докажите, что число 3 является первообразным корнем по модулю простого числа $p=2^n+1$, $n>1$.

10. Пусть p – простое число, F – многочлен с целыми коэффициентами такой, что $F(0)=0$, $F(1)=1$ и для любого натурального n остаток при делении F(n) на p равен 0 или 1. Докажите, что $\deg F \le p-1$.