

9 класс, счет в комплексных, задачи, 16 июля

1. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов его противоположных сторон равны.
2. Даны окружность с центром O и точка M . Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки M до концов хорды, параллельной OM , не зависит от выбора хорды.
3. а) Докажите, что если a, b, c – стороны треугольника, и выполняется равенство $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$, то треугольник правильный. б) Докажите, что комплексные числа u, v, w удовлетворяют равенству $u^2+v^2+w^2=uv+vw+wv$, то треугольник с вершинами в комплексных числах u, v, w – правильный.
4. Докажите, что центр тяжести n комплексных точек – это их среднее арифметическое.
5. а) Докажите неравенство Птолемея для любого четырехугольника $ABCD$ $AC \cdot BD \leq AD \cdot BC + AB \cdot CD$. б) Докажите, что оно превращается в равенство тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABCD$ – вписанный.
6. Точка D симметрична центру описанной около треугольника ABC окружности относительно прямой AB . Доказать, что расстояние CD выражается формулой $CD^2 = R^2 + AC^2 + BC^2 - AB^2$, где R – радиус описанной окружности.
7. Пусть $|z|=|u|=|v|$. Докажите, что $\left| \frac{zu+uv+zw}{z+u+v} \right| = |z|$.
8. Пусть $|z|=|u|=|v|=|w|$. Докажите, что следующие утверждения эквиваленты а) z, u, v, w образуют прямоугольник; б) верно, что $z+u+v+w=0$; в) z, u, v, w – корни уравнения $(x^2-a^2)(x^2-b^2)$ при некоторых комплексных числах $a, b, |a|=|b|$.

9 класс, счет в комплексных, задачи, 16 июля

1. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов его противоположных сторон равны.
2. Даны окружность с центром O и точка M . Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки M до концов хорды, параллельной OM , не зависит от выбора хорды.
3. а) Докажите, что если a, b, c – стороны треугольника, и выполняется равенство $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$, то треугольник правильный. б) Докажите, что комплексные числа u, v, w удовлетворяют равенству $u^2+v^2+w^2=uv+vw+wv$, то треугольник с вершинами в комплексных числах u, v, w – правильный.
4. Докажите, что центр тяжести n комплексных точек – это их среднее арифметическое.
5. а) Докажите неравенство Птолемея для любого четырехугольника $ABCD$ $AC \cdot BD \leq AD \cdot BC + AB \cdot CD$. б) Докажите, что оно превращается в равенство тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABCD$ – вписанный.
6. Точка D симметрична центру описанной около треугольника ABC окружности относительно прямой AB . Доказать, что расстояние CD выражается формулой $CD^2 = R^2 + AC^2 + BC^2 - AB^2$, где R – радиус описанной окружности.
7. Пусть $|z|=|u|=|v|$. Докажите, что $\left| \frac{zu+uv+zw}{z+u+v} \right| = |z|$.
8. Пусть $|z|=|u|=|v|=|w|$. Докажите, что следующие утверждения эквиваленты а) z, u, v, w образуют прямоугольник; б) верно, что $z+u+v+w=0$; в) z, u, v, w – корни уравнения $(x^2-a^2)(x^2-b^2)$ при некоторых комплексных числах $a, b, |a|=|b|$.