9 класс, оценки в делимости, 7 июля

1. Натуральные числа d и d_1, $d_1>d$ – делители натурального числа n. Докажите, что $d_1 > d + \frac{d^2}{n}$.

2. $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$ (m и n – натуральные числа). Докажите, что $\frac{m}{n} < \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$.

3. Обозначим $\pi(x)$ количество простых чисел, не превосходящих x. Конечно или бесконечно множество натуральных n, для которых n делится на $\pi(\sqrt{n})$?

4. Пусть $a < b < c$ – натуральные числа. Доказать, что среди любых $2c$ последовательных натуральных чисел найдутся три таких (различных) числа x, y, z, что xyz делится на abc.

5. Дано натуральное число n. В интервале (n^2, n^2+n) выбраны различные натуральные числа a и b. Докажите, что в этом интервале нет натуральных делителей числа ab, отличных от a и b.

6. Пусть $d_1, d_2, ..., d_k$ ($k > 1$) — некоторые различные натуральные делители натурального числа n. Оказалось, что $d_k–d_{k–1} = d_{k–1}–d_{k–2} = ... = d_2–d_1$ и $n = d_1+d_2+...+d_k$. При каких n это возможно?

7. Пусть $e(k)$ — количество четных натуральных делителей натурального числа k, а $o(k)$ — количество его нечетных натуральных делителей. Докажите, что $e(1)+e(2)+…+e(n)$ отличается от $o(1)+o(2)+…+o(n)$ меньше, чем на n.

8. $a_1, …, a_n$ – такой набор различных натуральных чисел, что ни одно из них не является “началом” другого (в десятичной записи). Докажите, что

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 3.$$

Тридцать третья Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2017 года.

9 класс, оценки в делимости, 7 июля

1. Натуральные числа d и d_1, $d_1>d$ – делители натурального числа n. Докажите, что $d_1 > d + \frac{d^2}{n}$.

2. $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$ (m и n – натуральные числа). Докажите, что $\frac{m}{n} < \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$.

3. Обозначим $\pi(x)$ количество простых чисел, не превосходящих x. Конечно или бесконечно множество натуральных n, для которых n делится на $\pi(\sqrt{n})$?

4. Пусть $a < b < c$ – натуральные числа. Доказать, что среди любых $2c$ последовательных натуральных чисел найдутся три таких (различных) числа x, y, z, что xyz делится на abc.

5. Дано натуральное число n. В интервале (n^2, n^2+n) выбраны различные натуральные числа a и b. Докажите, что в этом интервале нет натуральных делителей числа ab, отличных от a и b.

6. Пусть $d_1, d_2, ..., d_k$ ($k > 1$) — некоторые различные натуральные делители натурального числа n. Оказалось, что $d_k–d_{k–1} = d_{k–1}–d_{k–2} = ... = d_2–d_1$ и $n = d_1+d_2+...+d_k$. При каких n это возможно?

7. Пусть $e(k)$ — количество четных натуральных делителей натурального числа k, а $o(k)$ — количество его нечетных натуральных делителей. Докажите, что $e(1)+e(2)+…+e(n)$ отличается от $o(1)+o(2)+…+o(n)$ меньше, чем на n.

8. $a_1, …, a_n$ – такой набор различных натуральных чисел, что ни одно из них не является “началом” другого (в десятичной записи). Докажите, что

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 3.$$