Тридцать третья Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2017 года.

9 класс, системы отрезков на прямой и не только, 21 июля

Упражнение. На прямой дано несколько отрезков, любые два из которых пересекаются. Докажите, что все отрезки имеют общую точку.

1. На прямой дана система белых, и система черных отрезков. Известно, что любой черный отрезок пересекается с любым белым. Докажите, что отрезки одной из систем имеют общую точку.

2. На плоскости дана система белых, и система черных прямоугольников, со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что любой черный прямоугольник пересекается с любым белым. Докажите, что или прямоугольники одной из систем имеют общую точку, или прямоугольники каждой из систем по отдельности можно проткнуть одной прямой.

Утверждение. На прямой дана система отрезков. Либо в ней найдутся n попарно непересекающих отрезков, либо все отрезки можно приколоть (n–1) кнопкой. *(приколоть n кнопками – то есть найти n точек таких, что для каждого отрезка есть хотя бы одна точка из этого набора, принадлежащая ему)*

3. На прямой дана система отрезков, покрашенных в n цвета. Известно, что среди любых n разноцветных отрезков найдутся два пересекающихся. Докажите, что отрезки одной из систем можно приколоть (n–1)-й кнопками.

4. Докажите, что если в конечном семействе отрезков никакая точка не принадлежит более чем k отрезкам, то отрезки семейства можно покрасить в k цветов так, что никакие два отрезка одного цвета не будут пересекаться.

5. На прямой дано 50 отрезков. Докажите, что верно хотя бы одно из следующих утверждений: **а)** некоторые 8 из этих отрезков имеют общую точку; б) некоторые 8 из этих отрезков таковы, что никакие два из них не пересекаются.

6. На прямой расположены 2k–1 белый и 2k–1 черный отрезок. Известно, что любой белый отрезок пересекается хотя бы с k черными, а любой черный – хотя бы с k белыми. Докажите, что найдутся черный отрезок, пересекающийся со всеми белыми, и белый отрезок, пересекающийся со всеми черными.

7. Пусть на плоскости дано семейство прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Докажите, что если в нём любые два прямоугольника пересекаются, то все прямоугольники имеют общую точку.

8. Внутри квадрата расположены пять попарно непересекающихся прямоугольников со сторонами, параллельными сторонам квадрата. Всегда ли из них можно выбрать три таких, что их проекции на одну из сторон квадрата (параллельно другой стороне) попарно не пересекаются?

9. На прямоугольном столе разложено несколько одинаковых квадратных листов бумаги так, что их стороны параллельны краям стола (листы могут перекрываться). Докажите, что можно воткнуть несколько булавок таким образом, что каждый лист будет прикреплен к столу ровно одной булавкой.

10. На плоскости расположено $\left[\frac{4}{3}n\right]$ прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что любой прямоугольник пересекается хотя бы с n прямоугольниками. Доказать, что найдется прямоугольник, пересекающийся со всеми.

11. На прямой выбрано 100 множеств $A_1, A_2, .., A_{100}$, каждое из которых является объединением 100 попарно непересекающихся отрезков. Докажите, что пересечение множеств $A_1, A_2, .., A_{100}$ является объединением не более 9901 попарно непересекающихся отрезков (точка также считается отрезком).