# 9 класс, инверсия-задачи, 15 июля

**1.** В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей. Найдите ГМТ их точек касания (сделайте инверсию относительно угла сегмента).

**2**. В сегмент вписываются всевозможные окружности. Докажите, что все прямые, соединяющие точки касания таких окружностей с сегментом, проходят через середину дополняющей сегмент дуги.

**3**. В сегмент вписываются всевозможные пары пересекающихся окружностей. Рассмотрим множество прямых, проходящих через их точки пересечения. Докажите, что все такие прямые проходят через одну точку (сравните с предыдущими задачами. Решите двумя способами – инверсия относительно угла сегмента и относительно искомой точки).

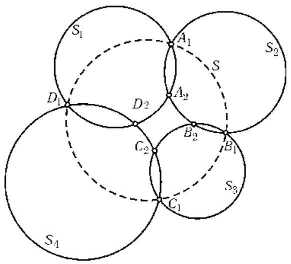
**4.** Пусть даны прямая *a*, окружность *S* и такая точка *X* на окружности *S* такая, что радиус *XO* перпендикулярен а. Две прямые, проходящие через *X*, пересекают *a* и *S* в точках *A, B, C* и *D*. Докажите, что точки *A, B, C, D* лежат на одной окружности.

**5**. Угол между обобщенными описанными окружностями треугольников *ABC* и *ABD* равен тому же углу для треугольников *ACD* и *BCD*.

**6**. В треугольнике *ABC* проведена биссектриса *AD*. Точки *M* и *N* являются проекциями вершин *B* и *C* на *AD*. Окружность с диаметром *MN* пересекает *BC* в точках *X* и *Y*. Докажите, что $\angle BAX = \angle CAY$.

**7**. Даны две неравные пересекающиеся окружности. Докажите, что две окружности инверсии, каждая из которых отображает одну из данных окружностей на другую, ортогональны.

**8.** На окружности выбраны точки *A* и *B*. Рассматриваются всевозможные пары касающихся окружностей, лежащих внутри данной, причем первая из них касается данной в точке *A*, а вторая - в точке *B*. Найдите ГМТ точек касания окружностей *двух внутренних окружностей.*




**9.** Четыре окружности расположены так, что первая касается второй в точке *A*, вторая третьей – в точке *B*, третья четвёртой – в точке *C*, а четвёртая первой – в точке *D*. Все касания внешние. Докажите, что точки *A*, *B*, *C* и *D* лежат на одной окружности.

**10**. Каждая из четырех окружностей пересекает две другие. Докажите, что если четыре точки пересечения, взятые по одной из каждой пары точек пересечения двух окружностей, лежат на одной окружности или прямой, то и оставшиеся четыре точки пересечения тоже лежат на одной окружности или прямой.

*Тридцать третья Летняя Многопредметная Школа Кировской области*
*Вишкиль. 3-28 июля 2017 года.*

# 9 класс, инверсия-задачи, 15 июля

**1.** В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей. Найдите ГМТ их точек касания (сделайте инверсию относительно угла сегмента).

**2**. В сегмент вписываются всевозможные окружности. Докажите, что все прямые, соединяющие точки касания таких окружностей с сегментом, проходят через середину дополняющей сегмент дуги.

**3**. В сегмент вписываются всевозможные пары пересекающихся окружностей. Рассмотрим множество прямых, проходящих через их точки пересечения. Докажите, что все такие прямые проходят через одну точку (сравните с предыдущими задачами. Решите двумя способами – инверсия относительно угла сегмента и относительно искомой точки).

**4.** Пусть даны прямая *a*, окружность *S* и такая точка *X* на окружности *S* такая, что радиус *XO* перпендикулярен а. Две прямые, проходящие через *X*, пересекают *a* и *S* в точках *A, B, C* и *D*. Докажите, что точки *A, B, C, D* лежат на одной окружности.

**5**. Угол между обобщенными описанными окружностями треугольников *ABC* и *ABD* равен тому же углу для треугольников *ACD* и *BCD*.

**6**. В треугольнике *ABC* проведена биссектриса *AD*. Точки *M* и *N* являются проекциями вершин *B* и *C* на *AD*. Окружность с диаметром *MN* пересекает *BC* в точках *X* и *Y*. Докажите, что $\angle BAX = \angle CAY$.

**7**. Даны две неравные пересекающиеся окружности. Докажите, что две окружности инверсии, каждая из которых отображает одну из данных окружностей на другую, ортогональны.

**8.** На окружности выбраны точки *A* и *B*. Рассматриваются всевозможные пары касающихся окружностей, лежащих внутри данной, причем первая из них касается данной в точке *A*, а вторая - в точке *B*. Найдите ГМТ точек касания окружностей *двух внутренних окружностей.*

**9.** Четыре окружности расположены так, что первая касается второй в точке *A*, вторая третьей – в точке *B*, третья четвёртой – в точке *C*, а четвёртая первой – в точке *D*. Все касания внешние. Докажите, что точки *A*, *B*, *C* и *D* лежат на одной окружности.

**10**. Каждая из четырех окружностей пересекает две другие. Докажите, что если четыре точки пересечения, взятые по одной из каждой пары точек пересечения двух окружностей, лежат на одной окружности или прямой, то и оставшиеся четыре точки пересечения тоже лежат на одной окружности или прямой.