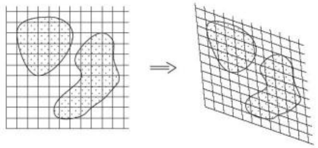
Тридцать третья Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2017 года.

9 класс, спецкурсоликбез по аффинке, 5 июля

Теория по аффинке



1. Докажите, что если M' и N' — образы многоугольников M и N при аффинном преобразовании, то отношение площадей M и N равно отношению площадей M' и N'.

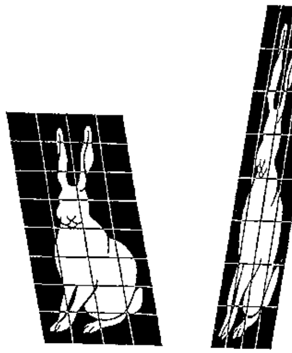
2. Докажите, что любой выпуклый четырехугольник, кроме трапеции, аффинным преобразованием можно перевести в четырехугольник, у которого противоположные углы прямые.

3. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника параллельна одной из его сторон. Докажите, что аффинным преобразованием этот пятиугольник можно перевести в правильный пятиугольник.

4. Докажите, что любой выпуклый шестиугольник $ABCDEF$, в котором каждая сторона параллельна противоположной стороне, аффинным преобразованием можно перевести в шестиугольник с равными диагоналями AD, BE и CF.

5. На плоскости дан многоугольник $A_1A_2...A_n$ и точка O внутри его. Докажите, что равенства $\overrightarrow{OA_{i-1}} + \overrightarrow{OA_{i+1}} = 2\cos\frac{2\pi}{n}\overrightarrow{OA_i}$, i=1, 2, ….n, $A_0=A_n$, $A_{n+1}=A_1$, необходимы и достаточны для того, чтобы существовало аффинное преобразование, переводящее данный многоугольник в правильный, а точку O — в его центр.

6. Верно ли, что если любое биективное преобразование плоскости, переводящее любую прямую в прямую, является аффинным?



7. Аффинное преобразование циклически меняет местами вершины треугольника ABC, т.е. переводит точку A в точку B, точку B в точку C, а точку C в точку A. Найти все неподвижные точки этого преобразования.

8. Доказать, что у каждого аффинного преобразования найдется пара перпендикулярных прямых, переходящая в пару перпендикулярных прямых.

9. Докажите, что если при аффинном преобразовании какая-то окружность переходит в окружность, то это – движение.

Собственно задачки

Упражнение. В трапеции $ABCD$ точка пересечения диагоналей делит диагональ AC пополам. Докажите, что $ABCD$ - параллелограмм.

1. Через каждую вершину треугольника проведены 2 прямые, делящие противоположную сторону треугольника на три равные части. Доказать, что диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, образованного этими прямыми, пересекаются в одной точке.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AH, медиана AM, медиана BN и чевиана BG, причем точка G делит сторону AC в таком же отношении, в каком точка H делит сторону BC. Обозначим точку пересечения BN и AH через K и точку пересечения AM и BG через L. Докажите, что KL параллельно AB.

3. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны соответственно точки M, N, P и построены симметричные им точки M_1, N_1, P_1 относительно середин этих сторон соответственно. Докажите, что треугольники MNP и $M_1N_1P_1$ равновелики.

4. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны соответственно точки M, N, P и построены точки M_1, N_1, P_1 так, что прямая MM_1 параллельна BC, прямая NN_1 параллельна CA, прямая PP_1 параллельна AB. Докажите, что треугольники MNP и $M_1N_1P_1$ равновелики.

5. Через внутреннюю точку O треугольника ABC проведены три прямые, параллельные сторонам треугольника, пересекающие его стороны AB в точках K и L, BC - в точках M и N, CA - в точках P и Q, где KN параллельно AC, MQ параллельно AB, LP параллельно BC. Доказать, что $\frac{ON}{AC} + \frac{OQ}{AB} + \frac{OL}{BC} = 1$.

6. На сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$ выбраны точки A_1, B_1, C_1, D_1. На сторонах A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1 четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ выбраны точки A_2, B_2, C_2, D_2 Известно, что $\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{BB_1}{B_1C} = \frac{CC_1}{C_1D} = \frac{DD_1}{D_1A} = \frac{B_1A_2}{A_2A_1} = \frac{C_1B_2}{B_2B_1} = \frac{D_1C_2}{C_2C_1} = \frac{A_1D_2}{D_2D_1}$. Докажите, что $A_2B_2C_2D_2$ - параллелограмм, подобный параллелограмму $ABCD$.

7. В треугольнике ABC проведены чевианы AM и BN, которые пересекаются в точке O. Докажите, что середины отрезков CO, MN и AB лежат на одной прямой.

8. Дан треугольник ABC. Через точку X, лежащую внутри него, проводится отрезок c_X, параллельный AB, с концами на сторонах AC и BC, и отрезок b_X, параллельный AC, с концами на сторонах AB и CB. Докажите, что все точки X, для которых длины отрезков b_X и c_X равны, лежат на одной прямой.

9. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = NC$, Q – точка пересечения отрезков AN и CM. Докажите, что DQ – биссектриса угла D.

10. На сторонах AB, BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки K, L и M соответственно, делящие эти стороны в одинаковых отношениях. Пусть b, c и d – прямые, проходящие через точки B, C и D параллельно прямым KL, KM, ML соответственно. Докажите, что b, c, d пересекаются в одной точке.