Целые гауссовы числа. 20 июля

Определение: Множеством *целых гауссовых чисел* (обозначается $\mathbb{Z}[i]$) называется множество комплексных чисел $a + bi$ с целыми a и b.

1. Докажите, что целое гауссово число z можно *поделить с остатком* на целое гауссово число w, то есть найти целые гауссовы q и r такие, что $z = qw + r$, и $|r| < |w|$.

Заметьте, что если это выполнено, то мы умеем делать алгоритм Евклида, а значит и раскладывать единственным образом любое целое гауссово в произведение простых целых гауссовых

2. **(a)** Докажите, что один из НОДов вещественных целых чисел, как целых гауссовых, является вещественным целым числом.

(b) Дано целое число $a > 1$. Найдите НОД$(a + i, a - i)$.

(c) Даны различные целые числа a и b. Найдите НОД$(a + bi, a - bi)$.

(d) А что будет, если $a = b$?

3. Докажите, что произведение двух целых чисел, представимых в виде суммы двух квадратов, также представимо в виде суммы двух квадратов.

4. **(a)** Дано простое число $p = 4k + 1$. Докажите, что найдется целое a такое, что $a^2 + 1 \vdots p$.

(b) Найдите целое гауссово число, не кратное p и не взаимно простое с ним. Чему равен их НОД?

(c) **(Рождественская теорема Ферма)** Докажите, что p представимо в виде суммы двух квадратов целых чисел.

5. Докажите, что число 5^n раскладывается в сумму двух квадратов целых чисел $[\frac{n}{2}] + 1$ различными способами.

6. **(Пифагоровы тройки)** Взаимно простые в совокупности целые числа a, b и c таковы, что $a^2 + b^2 = c^2$. Докажите, что существуют такие целые числа u и v, что $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ или наоборот.

7. Решите в целых числах уравнение $x^5 - 1 = y^2$.

8. Целые числа x, y и z таковы, что $xy = z^2 + 1$. Докажите, что существуют четыре целых числа a, b, c, d такие, что $x = a^2 + b^2$, $y = c^2 + d^2$, а $z = ac + bd$.

Целые гауссовы числа. 20 июля

Определение: Множеством *целых гауссовых чисел* (обозначается $\mathbb{Z}[i]$) называется множество комплексных чисел $a + bi$ с целыми a и b.

1. Докажите, что целое гауссово число z можно *поделить с остатком* на целое гауссово число w, то есть найти целые гауссовы q и r такие, что $z = qw + r$, и $|r| < |w|$.

Заметьте, что если это выполнено, то мы умеем делать алгоритм Евклида, а значит и раскладывать единственным образом любое целое гауссово в произведение простых целых гауссовых

2. **(a)** Докажите, что один из НОДов вещественных целых чисел, как целых гауссовых, является вещественным целым числом.

(b) Дано целое число $a > 1$. Найдите НОД$(a + i, a - i)$.

(c) Даны различные целые числа a и b. Найдите НОД$(a + bi, a - bi)$.

(d) А что будет, если $a = b$?

3. Докажите, что произведение двух целых чисел, представимых в виде суммы двух квадратов, также представимо в виде суммы двух квадратов.

4. **(a)** Дано простое число $p = 4k + 1$. Докажите, что найдется целое a такое, что $a^2 + 1 \vdots p$.

(b) Найдите целое гауссово число, не кратное p и не взаимно простое с ним. Чему равен их НОД?

(c) **(Рождественская теорема Ферма)** Докажите, что p представимо в виде суммы двух квадратов целых чисел.

5. Докажите, что число 5^n раскладывается в сумму двух квадратов целых чисел $[\frac{n}{2}] + 1$ различными способами.

6. **(Пифагоровы тройки)** Взаимно простые в совокупности целые числа a, b и c таковы, что $a^2 + b^2 = c^2$. Докажите, что существуют такие целые числа u и v, что $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ или наоборот.

7. Решите в целых числах уравнение $x^5 - 1 = y^2$.

8. Целые числа x, y и z таковы, что $xy = z^2 + 1$. Докажите, что существуют четыре целых числа a, b, c, d такие, что $x = a^2 + b^2$, $y = c^2 + d^2$, а $z = ac + bd$.