# 9 класс, вступительная олимпиада, 4 июля

**1.** Докажите, что между натуральными числами $n$ и $11n$ найдется число, у которого сумма цифр на 5 больше, чем сумма цифр числа $n$.

**2.** Даны десять чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ из отрезка [0,1]. Докажите, что

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} \le x_1 x_2 .. x_{10} + 9.$$

**3.** Докажите, что не существует двух таких натуральных различных чисел $n$ и $k$, что НОК($n$+5,$k$) = НОК($n$,$k$+5).

**4.** Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром $O$, причем $AD$ – диаметр окружности. Прямые $AD$ и $BC$ пересекаются в точке $E$. Описанная окружность треугольника $BOC$ пересекает отрезок $AD$ в точке $K$. Прямая, проведенная через точку $K$ параллельно $BC$ пересекает прямые $AB$ и $DC$ в точках $L$ и $M$. Докажите, что точки $E$, $L$, $O$, $M$ лежат на одной окружности.

**5.** Изначально в пробирке было 100 бактерий, находящихся на первой ступени эволюции. Каждая бактерия, находящаяся на $k$-ой ступени эволюции, может разделиться на две, находящиеся на $k$+1-ой ступени. Назовём колонию *$n$-устойчивой*, если в любой момент в ней есть хотя бы $n$ бактерий на одной ступени эволюции. При каком минимальном $n$ можно гарантировать, что колония всегда будет $n$-устойчивой?

**6.** В равенстве $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2k-1} = a + b\sqrt{3}$, $a$, $b$ и $k$ – натуральные числа. Докажите, что $a = n^2+1$ для какого-то целого $n$.

*Тридцать третья Летняя Многопредметная Школа Кировской области*
*Вишкиль. 3-28 июля 2017 года.*

# 9 класс, вступительная олимпиада, 4 июля

**1.** Докажите, что между натуральными числами $n$ и $11n$ найдется число, у которого сумма цифр на 5 больше, чем сумма цифр числа $n$.

**2.** Даны десять чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ из отрезка [0,1]. Докажите, что

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} \le x_1 x_2 .. x_{10} + 9.$$

**3.** Докажите, что не существует двух таких натуральных различных чисел $n$ и $k$, что НОК($n$+5,$k$) = НОК($n$,$k$+5).

**4.** Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром $O$, причем $AD$ – диаметр окружности. Прямые $AD$ и $BC$ пересекаются в точке $E$. Описанная окружность треугольника $BOC$ пересекает отрезок $AD$ в точке $K$. Прямая, проведенная через точку $K$ параллельно $BC$ пересекает прямые $AB$ и $DC$ в точках $L$ и $M$. Докажите, что точки $E$, $L$, $O$, $M$ лежат на одной окружности.

**5.** Изначально в пробирке было 100 бактерий, находящихся на первой ступени эволюции. Каждая бактерия, находящаяся на $k$-ой ступени эволюции, может разделиться на две, находящиеся на $k$+1-ой ступени. Назовём колонию *$n$-устойчивой*, если в любой момент в ней есть хотя бы $n$ бактерий на одной ступени эволюции. При каком минимальном $n$ можно гарантировать, что колония всегда будет $n$-устойчивой?

**6.** В равенстве $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2k-1} = a + b\sqrt{3}$, $a$, $b$ и $k$ – натуральные числа. Докажите, что $a = n^2+1$ для какого-то целого $n$.