9 класс, показатели, 5 июля

Воспоминание. Вспомните доказательство теоремы Эйлера через разбиение приведенной системы вычетов на циклы.

Определение. Число t является показателем a по модулю n, если t является наименьшим натуральным числом, таким, что $a^t \equiv 1 \pmod{n}$.

Теория. Пусть t является показателем а по модулю n

1. Докажите, что числа $1 = a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{t-1}$ попарно различны по модулю n.
2. Докажите, что $a^d \equiv 1 \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда d делится на t.
3. Докажите, что $a^d \equiv a^s \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда $d-s$ делится на t.
4. Докажите, что $\varphi(n)$ делится на t.

Задачи

1. а) Докажите, что в разложении на простые сомножители числа 2^q-1, где q – простое, любое число будет давать остаток 1 по модулю q.

б) Выведите из пункта б, что простых чисел бесконечно много.

2. Пусть a , b , m , n –натуральные числа, причем a взаимно просто с b и $a>1$. Докажите, что если a^m+b^m делится на a^n+b^n , то m делится на n .

3. Найдите все целые неотрицательные числа n, a, b, $n\neq 0$, такие, что n^b-1 делится на n^a+1.

4. Числа вида $F_n = 2^{2^n} + 1$ называются числами Ферма. а) Докажите, что если число 2^n+1 простое, то это – число Ферма; б) Докажите, что F_5 – не простое число (это доказал Эйлер в 1732 г)

5. Докажите, что $\varphi(a^n-1)$ делится на n для натуральных a и n.

6. Докажите, что если p – простое число, $p\neq 3$ и $n = \frac{2^{2p}-1}{3}$, то 2^n-2 делится на n.

7 p и q — простые, $q > 5$. Известно, что $2^p + 3^p$ делится на q. Докажите, что $q>2p$.

8. Найдите все простые числа p и q, что 2^p+1 делится на q , а 2^q+1 делится на p.

9. Докажите, что если число $a=2^{2k}+2^k+1$ не является делителем числа $2^{2^k+1} - 1$, то a – составное.

10. Докажите, что если m, n – натуральные числа и m^2+9 делится на 2^n-1, то n – степень двойки.

11. Натуральные n, m, k таковы, что числа 5^n-2 и 2^k-5 делятся на 5^m-2^m. Докажите, что n и m взаимно просты.

Тридцать третья Летняя Многопредметная Школа Кировской области
Вишкиль. 3-28 июля 2017 года.

9 класс, показатели, 5 июля

Воспоминание. Вспомните доказательство теоремы Эйлера через разбиение приведенной системы вычетов на циклы.

Определение. Число t является показателем a по модулю n, если t является наименьшим натуральным числом, таким, что $a^t \equiv 1 \pmod{n}$.

Теория. Пусть t является показателем а по модулю n

1. Докажите, что числа $1 = a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{t-1}$ попарно различны по модулю n.
2. Докажите, что $a^d \equiv 1 \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда d делится на t.
3. Докажите, что $a^d \equiv a^s \pmod{n}$ тогда и только тогда, когда $d-s$ делится на t.
4. Докажите, что $\varphi(n)$ делится на t.

Задачи

1. а) Докажите, что в разложении на простые сомножители числа 2^q-1, где q – простое, любое число будет давать остаток 1 по модулю q.

б) Выведите из пункта б, что простых чисел бесконечно много.

2. Пусть a , b , m , n –натуральные числа, причем a взаимно просто с b и $a>1$. Докажите, что если a^m+b^m делится на a^n+b^n , то m делится на n .

3. Найдите все целые неотрицательные числа n, a, b, $n\neq 0$, такие, что n^b-1 делится на n^a+1.

4. Числа вида $F_n = 2^{2^n} + 1$ называются числами Ферма. а) Докажите, что если число 2^n+1 простое, то это – число Ферма; б) Докажите, что F_5 – не простое число (это доказал Эйлер в 1732 г)

5. Докажите, что $\varphi(a^n-1)$ делится на n для натуральных a и n.

6. Докажите, что если p – простое число, $p\neq 3$ и $n = \frac{2^{2p}-1}{3}$, то 2^n-2 делится на n.

7 p и q — простые, $q > 5$. Известно, что $2^p + 3^p$ делится на q. Докажите, что $q>2p$.

8. Найдите все простые числа p и q, что 2^p+1 делится на q , а 2^q+1 делится на p.

9. Докажите, что если число $a=2^{2k}+2^k+1$ не является делителем числа $2^{2^k+1} - 1$, то a – составное.

10. Докажите, что если m, n – натуральные числа и m^2+9 делится на 2^n-1, то n – степень двойки.

11. Натуральные n, m, k таковы, что числа 5^n-2 и 2^k-5 делятся на 5^m-2^m. Докажите, что n и m взаимно просты.