

## Делимость-2

04 июля

**Теорема** (о делении с остатком). Пусть  $a$  и  $b$  — два целых числа,  $b \neq 0$ . Существует единственная пара целых чисел  $q$  и  $r$ , такая, что  $0 \leq r < |b|$  и при этом  $a = b \cdot q + r$ .

**Определение.** Число  $q$  называется (неполным) частным от деления  $a$  на  $b$ , число  $r$  — остатком.

1. Найдите остаток от деления на 8 чисел:  $9^{100}$ ;  $7^{99}$ ;  $2026^{2025}$ .
2. Докажите, что  $2222^{5555} + 5555^{2222}$  делится на 7.
3. Найдите последнюю цифру числа  $7^{7^7}$ .
4. Алиса с пятью подружками купили с собой в ЛМШ огромный рюкзак конфет. Они распределили конфеты поровну на 24 дня и еще 18 конфет осталось на дорогу домой. По дороге в лагерь девочки поссорились и поделили конфеты поровну. Маша распределила свои конфеты поровну на 24 дня, а остаток отложила на обратную дорогу. Какое количество конфет могло быть отложено?
5. На Поле Чудес растут деревья с золотыми монетами. Каждую ночь на каждом дереве вырастает по одной новой монете. 1 февраля на деревьях было всего 1000 монет. В один из следующих февральских дней Буратино посадил еще одно дерево, и 1 марта на деревьях оказалось всего 2440 монет. В какой день Буратино посадил дерево?
6. Докажите, что
  - а)  $n^3 + 2n$  делится на 3 при любом натуральном  $n$ ;
  - б)  $n^2 + 1$  не делится на 3 ни при каком натуральном  $n$ ;
7. Известно, что  $p$  и  $p^2 + 2$  — простые числа. Докажите, что  $p^3 + 2$  — также простое число.
8. Ярик играл в солдатики. Сначала он попытался построить их парами, но один солдатик оказался лишним. Тогда Ярик стал строить солдат тройками, но снова один остался. Та же история повторялась и при построениях по 4, по 5 и по 6. Ярик уже приготовился выбрасывать непослушного, но тут ему наконец удалось построить всех в колонну по 7. Сколько солдат могло быть у Ярика, если их было меньше 1000?

9. Дано четное число  $a$ . Докажите, что существует бесконечно много нечетных натуральных чисел  $n$  таких, что  $a^n + n$  – составное число.
10. Вначале на доске написаны числа 3, 7 и 9. Если написаны числа  $a$  и  $b$ , где  $a > b$ , то можно дописать число  $5a - 4b$ . Может ли на доске в некоторый момент оказаться число 2025?
11. Сколько существует натуральных чисел  $n$ , (а) меньших 30;  
(б) меньших 10000, для которых  $2^n - n^2$  делится на 7?