

Графы-1

05 июля

1. Построили граф, степени вершин которых равны: 8, 7, 4, 4, 4, 2, 2, 1, x . Чему может быть равна степень x ?
2. В шахматном турнире, в котором каждый участник встречался с каждым, два шахматиста заболели и выбыли из турнира. Всего в турнире было проведено 94 встречи. Сколько шахматистов участвовало в турнире?
3. У Маши 5 друзей среди одноклассников. У остальных ее одноклассников 4, 6 или 8 друзей. И только у новичка Саши всего один друг. Докажите, что Маша может отправить Саше записку, если каждый будет передавать записку одному из своих друзей.
4. Назовем граф "хлипким", если степень любой его вершины равна 1, 3 или 6. Доказать, что из связного "хлипкого" графа, содержащего 34 ребра, можно выкинуть ребро так, что он перестанет быть связным.
5. В стране 100 городов, причем каждый соединен с каждым дорогой. Докажите, что если закрыть на ремонт 98 дорог, то граф дорог останется связен.
6. Страна состоит из больших и малых городов. Каждый город (и малый, и большой) соединён дорогами с тремя малыми городами и с тремя большими городами. Докажите, что общее число городов в стране делится на 4.
7. У каждого марсианина по три руки и несколько антенн. Каждый марсианин взял за руки трех других (так, что все руки оказались заняты). Оказалось, что у любых двух марсиан, взявшихся за руки, количество антенн отличается ровно в 6 раз. Может ли суммарное количество антенн быть 2025?
8. В некотором государстве система авиалиний устроена так, что любой город соединен авиалиниями не более чем с тремя другими. И из любого города в любой другой можно перелететь, сделав не более одной пересадки. Какое наибольшее число городов может быть в этом государстве?
9. В стране 10 городов. Любые два города соединены дорогой, если и только если из них выходит одинаковое число дорог. Может ли число дорог равняться 20? А 21?

- 10.** В районе несколько сёл и три деревни. Из каждого села выходят 3 дороги, а из деревень — по одной. Каждая дорога соединяет два населённых пункта и обслуживается одной из трёх бригад. Дороги, выходящие из села, обслуживаются разными бригадами. Докажите, что дороги, выходящие из деревень, тоже обслуживаются разными бригадами.
- 11.** В стране Эйлери 101 город. Каждые два города соединены двусторонним беспосадочным рейсом одной из 99 авиакомпаний. Известно, что из каждого города выходят рейсы всех 99 компаний. Назовём треугольником три города, попарно соединённых рейсами одной и той же компании. Докажите, что в Эйлери не больше одного треугольника.
- 12.** В кружке 42 человека, любые двое из которых имеют среди кружковцев не менее десяти общих друзей. Докажите, что найдутся двое, имеющие среди кружковцев не менее двенадцати общих друзей.