

Инвариант

08 июля

В этих задачах происходит некоторый процесс. Процесс идёт, числа меняются, но что-то остаётся неизменным. Такое неизменное свойство называется *инвариантом*.

Пример 1. Может ли слон на шахматной доске за несколько ходов попасть с поля $a1$ на поле $a8$?

Пример 2. Каждым ходом компьютер увеличивает число на экране. Если сумма цифр числа делится на 4, он увеличивает число на сумму цифр, а если не делится, то увеличивает на 10. Вначале на экране было число 13. Может ли получиться число 1000?

1. На доске записано число 1010101010101010101010101010. Можно либо добавить в любой промежуток строчку 1010, либо вычеркнуть строчку 01. Можно ли в конце получить 01?
2. Есть две кучки: в одной 30 шишек, а во второй — 70. Можно увеличить количество шишек в одной куче на 6, но уменьшить количество шишек в другой куче на 1 или уменьшить количество шишек в одной куче на 3, а в другой — на 7. Можно ли при помощи таких действий получить в одной куче 71 шишку, а в другой — 53?
3. На доске записаны три числа a , b , c . Каждую секунду Ваня стирает числа и меняет на $a+b-c$, $b+c-a$, $c+a-b$. Вначале на доске был набор чисел 2022, 2023, 2024. Может ли через некоторое время получиться набор 2023, 2024, 2025?
4. В ряд стоят 40 шестиклассников. Кирилл Вячеславович выбирает двух школьников, стоящих через одного, и меняет их местами. Он хочет переставить детей в обратном порядке. Получится ли у него выполнить свое желание?
5. В алфавите языка племени ЛОО всего две буквы: Л и О. Известно, что смысл слова не изменится если из слова выкинуть стоящие рядом буквы ОЛ и при добавлении в любое место слова буквосочетания ЛО или ООЛЛ. Можно ли утверждать, что слова ЛОО и ОЛЛ имеют одинаковый смысл?
6. На доске написано число 12. В течение каждой минуты число либо умножают, либо делят (если делится нацело) на 2 или на 3, и результат записывают на доску вместо исходного числа. Докажите, что число, которое будет написано на доске ровно через час, не может быть равно 54.
7. Дана доска 8×8 , раскрашенная в шахматном порядке. За одно действие можно выбрать любые две соседние клетки и перекрасить их в противоположные цвета: белые в черный, а черные в белый. Можно ли за несколько действий оставить на доске ровно одну черную клетку?
8. Даны три кучки камней, по n камней в каждой. За один ход можно выбрать две кучки, убрать из них по одному камню, при этом добавив один камень в третью кучку. При каких n можно через несколько ходов оставить только один камень?
9. В таблице 9×9 одна из угловых клеток закрашена черным цветом, все остальные — белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце.

10. В таблице 5×5 расставлены единицы и нули (по одному числу в каждой клетке). За один ход разрешается в любом квадрате 3×3 заменить все единицы нулями, а нули – единицами. При любой ли расстановке единиц и нулей за несколько таких операций получить таблицу из одних нулей?
11. На поле 6×7 расставлены единицы и нули. Разрешается взять любой прямоугольник 1×5 и инвертировать в нем цифры. Всегда ли можно за несколько таких ходов получить таблицу из одних нулей?
12. На доске написаны натуральные числа от 1 до 100, каждое по одному разу. Каждую минуту мальчик Петя выбирает два числа a и b , написанных на доске, вычисляет $\text{НОД}(a^2 + b^2 + 2, a^2b^2 + 3)$, пишет его на доску, а сами числа стирает. Через 99 минут на доске останется одно число. Докажите, что оно не может быть квадратом.