

Деревья 10 июля

Определения. *Циклом* называется замкнутый путь по ребрам графа без повторяющихся ребер. *Простым циклом* называется цикл без повторяющихся вершин.

Связный граф называется *деревом*, если в нём отсутствуют циклы.

Граф (необязательно связный), в котором отсутствуют циклы, называется *лесом*.

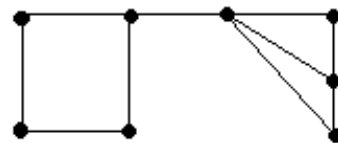
Вершина графа, степень которой равна одному, называется *висячей*.

Утверждения.

- 1) Если в дереве более одной вершины, то в нем есть две висячие вершины.
- 2) Если из дерева выкинуть любое ребро, то оно перестанет быть связным.
- 3) В дереве на n вершинах ровно $n - 1$ ребро.
- 4) Из любого связного графа можно выкинуть несколько ребер (возможно, ни одного) так, что останется дерево. В любом связном графе на n вершинах имеется как минимум $n - 1$ ребро.

Определение. *Скелетом (остовным деревом)* связного графа называется подграф исходного графа с тем же набором вершин, который является деревом.

1. Степени вершин дерева равны 5, 4, 3, 2, 1, 1, ..., 1. Сколько в этом графе висячих вершин?
2. Вася нарисовал на доске 8 графов, каждый из которых является деревом с шестью вершинами. Докажите, что среди них есть два «одинаковых» (изоморфных).
3. Сколько остовных деревьев имеет граф, изображенный на рисунке?
4. Можно ли раскрасить ребра куба в синий и красный цвета так, чтобы ребра каждого цвета образовывали связный граф, проходящий по всем вершинам?
5. Каждая грань кубика разбита на 4 квадрата. Некоторые стороны этих квадратов раскрасили в красный цвет — всего 26 сторон. Докажите, что на поверхности кубика найдётся замкнутая ломаная из красных отрезков.
6. а) Докажите, что из любого связного графа можно выкинуть одну вершину со всеми выходящими из нее ребрами так, чтобы он остался связным.
б) В связном графе есть вершина степени n . Докажите, что в этом графе можно выделить n вершин так, чтобы при удалении любого набора из этих вершин, граф оставался связным.
7. Докажите, что вершины дерева можно покрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние вершины были покрашены в разные цвета.
8. В стране 15 городов. Некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трём авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полёты, можно будет добраться из любого города в любой другой, пользуясь оставшимися авиалиниями. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в этой стране?



9. В связном графе n вершин и $2n - 1$ ребер. Докажите, что из этого графа можно выкинуть все ребра некоторого цикла так, чтобы он остался связным.
10. В стране 100 городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями, причем из любого города можно добраться самолетом до любого другого (возможно, с пересадками). Министерство региональной политики рассматривает все возможные проекты разбиения страны на 3 республики так, что никакие два города из одной республики не соединены авиалинией. Докажите, что количество таких проектов не превосходит $3 \cdot 2^{99}$.