

Делимость-4

12 июля

Теорема (основная теорема арифметики; **ОТА**). Любое натуральное число $a \neq 1$ единственным способом (с точностью до порядка сомножителей) представляется в виде произведения простых чисел.

Натуральное число n называется **точным** (полным) **квадратом**, если найдется натуральное число k такое, что $n = k^2$.

Мудрые факты:

- Любое натурального числа a лежит между двумя квадратами, то есть для любого a найдется n , что $n^2 \leq a < (n + 1)^2$.
- Если $n^2 < a < (n + 1)^2$, то a не является точным квадратом.
- Количество делителей числа нечетно тогда и только тогда, когда число является точным квадратом.

Определение: **Степенью вхождения** простого числа p в натуральное число n будем называть наибольшее такое k , что n делится на p^k . Обозначать для краткости будем $v_p(n)$ (это греческая буква “ню”).

Еще мудрые факты:

- $v_p(a + b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$, причём если $v_p(a) \neq v_p(b)$, то $v_p(a + b) = \min\{v_p(a), v_p(b)\}$.
- $v_p(a \cdot b) = v_p(a) + v_p(b)$.
- Если натуральное число a делится на b , то $v_p(a) \geq v_p(b)$.
- $v_p(\text{НОД}(a; b)) = \min\{v_p(a), v_p(b)\}$.
- $v_p(\text{НОК}(a; b)) = \max\{v_p(a), v_p(b)\}$.

1. Найдите решение ребуса $АБ \cdot ВГ = ДДЕЕ$.
2. При каких n число $(n - 1)!$ делится на n ?
3. Все простые числа, не превосходящие простого числа p , разбили на две группы и нашли произведение всех чисел в каждой из групп, после чего из большего произведения вычли меньшее. Эта разность оказалась меньше p . Докажите, что она равна 1.
4. Решить в натуральных числах уравнение $n! + 57 = k^2$.
5. a, b и c - натуральные числа такие, что a^3 делится на b , b^3 делится на c , а c^3 делится на a . Докажите, что $(a+b+c)^{13}$ делится на abc .
6. Натуральные числа a и b таковы, что сумма $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}$ целая. Докажите, что оба слагаемых целые.
7. Взаимно простые в совокупности натуральные числа a, b, c удовлетворяют условию $ab = ac + bc$. Докажите, что abc — точный квадрат.

8. Найдите все натуральные n , для которых $n! + 3n^2$ — квадрат натурального числа.

Дополнительные задачи

9. Существуют ли такие натуральные числа a и b такие, что $(2a + 2b)! - ab$ является точным квадратом.
10. Докажите, что при любых натуральных a и d в последовательности: $a, a+d, a+2d, \dots, a+nd, \dots$ найдутся 100 подряд идущих членов, не являющихся квадратами натуральных чисел.
11. Докажите, что число $n!$ является суммой двух натуральных степеней двойки лишь для конечного количества значений n .
12. Петя выписал на доску натуральное число N . Каждую минуту он берет число M , полученное из N перемещением первой цифры числа N в конец, а затем вместо N на доску записывает число $N + M$. Мог ли он через некоторое ненулевое количество шагов получить число, которое при увеличении на 3 будет натуральной степенью числа 2025?