

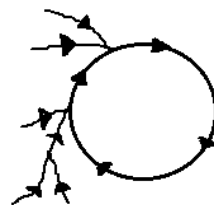
Зацикливание

17 июля

Упражнения

- У1. На доске написано число 76. Каждую минуту число стирают с доски и на его место записывают произведение его цифр, увеличенное на 12.
- а) Что окажется на доске через час? б) Докажите, что, какое бы число ни было написано на доске первоначально, последовательность зациклится.
- У2. Леонид Борисович оставил на дверях всех корпусов Вишкиля записки следующего содержания: «Я в корпусе № ...» и исчез в неизвестном направлении. (Разные записки могут сообщать разную информацию). Шестиклассник Андрей начал его поиски, руководствуясь этими указаниями.
- а) Докажите, что с некоторого момента шестиклассник начнет двигаться по циклу.
- б) Можно ли утверждать, что Андрей когда-нибудь вернется в корпус, с которой начал поиски?
- в) Можно ли утверждать, что Андрей вернётся в начальный корпус, если все записки сообщают разную информацию?

Утверждение. Если система может находиться в конечном числе состояний, и каждое следующее состояние однозначно определяется по предыдущему, то система с некоторого момента зациклится. Если вдобавок по текущему состоянию можно определить предыдущее, то система зацикливается без предпериода.



- Петя написал на доске двузначное число. После этого он умножил его сумму цифр на 23 и написал последние две цифры результата. Потом он снова умножил сумму цифр получившегося числа на 23 и написал 2 последние цифры, и т. д.
 - Докажите, что не позже, чем через 100 ходов на доске появится число, которое там уже было, и с этого момента последовательность выписываемых чисел зациклится.
 - Верно ли, что начальное число обязательно появится на доске?
- В последовательности цифр 1, 1, 4, 6, 1, 1, 8, 0, 9, ... каждая цифра, начиная с четвертой, равна последней цифре суммы трех предыдущих.
 - Докажите, что какая-нибудь комбинация из трех цифр в этой последовательности встретится бесконечное число раз.
 - Докажите, что можно найти повторяющуюся комбинацию среди первых 1003 цифр этой последовательности.
 - Встретятся ли в этой последовательности еще раз цифры 1, 1, 4, идущие подряд?
 - Встретятся ли цифры 1, 8, 2, идущие подряд?
 - Встретятся ли цифры 2, 7, 4, идущие подряд?
- По кругу стоит несколько коробочек. Каждая из них может быть пустой или содержать один или несколько шариков. Сначала из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки. На следующем ходу раскладывают шарики из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходу, и т. д. Докажите, что в какой-то момент повторится начальное расположение шариков.

4. В стране Топляндии дорог много, а тупиков и вовсе нет. По этой стране едет рыцарь. Докажите, что когда-нибудь он вернется в начало пути, если на развилках он поворачивает
 - а) на самую левую дорогу;
 - б) то на самую левую, то на самую правую дорогу.
5. В алфавите людоедского племени 10 букв: А, Е, Ё, И, О, У, Ы, Э, Ю, Я. Людоедские шпионы обмениваются зашифрованными сообщениями. Алгоритм шифрования заменяет каждую из 10 людоедских букв на какую-то *другую* букву, причём разные заменяются на разные.
 - а) Докажите, что после нескольких применений этого алгоритма мы вернёмся к исходному тексту.
 - б) Мы не знаем правило замены, но у нас есть зашифрованный текст и программа, реализующая алгоритм шифрования. Программу можно запускать любое число раз. Какое наименьшее число раз нужно запустить эту программу, чтобы наверняка прочитать расшифрованное сообщение?
 - в) Слово АИУЭО после однократного применения алгоритма шифрования превратилось в ЁЭИОЯ. Может ли оно после еще нескольких применений этого же алгоритма превратиться в слово АУЮИЭ? Если может, то через сколько (укажите все варианты)?
6. В зоопарке имеется десять лестниц, на нижней ступеньке каждой из которых сидит по обезьяне, а на верхней — лежит по одному банану. От некоторых ступенек лестниц отходят веревки к ступенькам других лестниц (от каждой ступеньки – не более одной веревки, к самым верхним и самым нижним ступенькам лестниц верёвки не привязаны). Обезьяны лезут по лестницам вверх; каждый раз, когда обезьяна попадает на ступеньку с веревкой, она перелезает по веревке на другую лестницу и продолжает лезть вверх. Докажите, что все бананы будут съедены.

Дополнительные задачи

7. Дана бесконечная последовательность цифр. Известно, что количество различных подпоследовательностей из 15 цифр равно количеству различных подпоследовательностей из 16 цифр. Докажите, что эта последовательность цифр периодична.
8. К некоторому натуральному числу справа приписывают тройки. Докажите, что в некоторый момент получится составное число.