

Вступительная олимпиада

2 июля

1. Прямую на координатной плоскости с уравнением $y = px + q$ назовём хорошей если она имеет ровно одну общую точку с графиком квадратного трёхчлена $y = x^2 + qx + p$. Докажите, что на координатной плоскости можно выбрать две точки так, чтобы любая хорошая прямая проходила через одну из этих точек.
2. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC , а точка M — середина стороны BC . A_1 — точка пересечения прямой AM с описанной окружностью треугольника ABC , точка A_2 симметрична точке A_1 относительно M . Докажите, что прямые A_2H и AM перпендикулярны.
3. Клетки таблицы 2×2025 надо заполнить числами (в каждую клетку вписать ровно одно число) по следующим правилам. В верхней строке должны стоять 2025 действительных чисел, среди которых нет двух равных, а в нижней строке должны стоять те же 2025 чисел, но в другом порядке. В каждом из 2025 столбцов должны быть записаны два разных числа, причем сумма этих двух чисел должна быть рациональным числом. Какое наибольшее количество иррациональных чисел могло быть в первой строке таблицы?
4. Натуральное число называется зебррой, если оно либо однозначно, либо в его записи строго чередуются четные и нечетные цифры. Докажите, что всякое натуральное число, начиная с числа 3, можно представить в виде суммы трех зебр.
5. В классе из 42 человек, в котором поровну мальчиков и девочек, проводилась олимпиада. Известно, что каждый ребёнок решил не более 6 задач, и для каждой пары из девочки и мальчика есть задача, которую решили оба. Докажите, что найдётся задача, которую решили хотя бы 3 мальчика и хотя бы 3 девочки.
6. Дано натуральное число n . Клетки квадрата $4n \times 4n$ раскрашены в 4 цвета. Множество из 4 клеток назовём цветным, если эти клетки окрашены в 4 разных цвета, а их центры являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата. Найдите наибольшее возможное количество цветных множеств.