

Последовательности

18 июля

1. Число $\alpha = \overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots}$ построено так: a_k — это первая цифра слева от запятой в десятичной записи числа $k\sqrt{2}$. Докажите, что α — иррациональное число.
2. Последовательность a_n такова, что $a_{n+1} = 1 - |1 - 2a_n|$ и $a_1 \in (0, 1)$.
(а) Докажите, что если a_1 рационально, то последовательность, начиная с некоторого места, периодическая.
(б) Докажите, что если последовательность, начиная с некоторого места, периодическая, то a_1 рационально.
3. Последовательность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n \dots$ задана следующим образом:

$$a_1 = a_2 = 1; \quad a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}} \quad (n \geq 3).$$

Докажите, что все числа в последовательности — целые.

4. Числовая последовательность определяется условиями: $a_1 = 1; a_{n+1} = a_n + [\sqrt{a_n}]$. Докажите, что среди членов этой последовательности бесконечно много полных квадратов.
5. По данному натуральному числу a_0 строится последовательность $\{a_n\}$ следующим образом: $a_{n+1} = a_n^2 - 5$, если a_n нечетно и $a_{n+1} = a_n/2$, если a_n четно. Докажите, что при любом нечетном $a_0 > 5$ в последовательности $\{a_n\}$ встретятся сколь угодно большие числа.
6. Рассмотрим степени пятерки: 1, 5, 25, 125, 625, ... Образует последовательность их первых цифр: 1, 5, 2, 1, 6, ... Докажите, что любой кусок этой последовательности, записанный в обратном порядке, встретится в последовательности первых цифр степеней двойки (1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, ...).
7. Последовательности положительных чисел (x_n) и (y_n) удовлетворяют условиям $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}^2, y_{n+2} = y_n^2 + y_{n+1}$ при всех натуральных n . Докажите, что если все числа x_1, x_2, y_1, y_2 больше 1, то $x_n > y_n$ при каком-нибудь натуральном n .
8. Последовательность задана соотношениями $x_1 = 1, x_{n+1} = (1 + \frac{3}{n})x_n + (2 - \frac{3}{n})$. Докажите, что все ее члены — натуральные числа.
9. Последовательность a_1, a_2, \dots такова, что $a_1 \in (1, 2)$ и $a_{k+1} = a_k + \frac{1}{a_k}$ при любом натуральном k . Докажите, что в ней не может существовать более одной пары членов с целой суммой.