

Заключительная олимпиада

22 июля

Довывод

1. На доске 2020×2020 стоят 1800 фигур — ладей и ферзей. Они бьют все незанятые клетки доски. (Фигура бьет все клетки, до которых может дойти по шахматным правилам, не проходя сквозь другие фигуры.) Докажите, что ферзей не меньше 219.
2. В треугольник с целочисленными высотами вписана окружность радиуса 1. Чему может быть равна его площадь?
3. Даны приведённые квадратные трёхчлены $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$. Назовём вещественное число a забавным, если из чисел $f(a)$, $g(a)$ и $h(a)$ одно равно сумме двух других. Оказалось, что забавных чисел ровно k . Найдите наибольшее возможное значение k .
4. В государстве некоторые пары городов соединены беспосадочными (двусторонними) авиарейсами. Новый министр авиации решил раз в месяц перестраивать маршрутную сеть по следующему принципу: в следующем месяце будут соединены рейсами те и только те пары городов, для которых сейчас существует маршрут ровно с одной пересадкой. Через полгода выяснилось, что из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что если реорганизация будет продолжаться, то и через год можно будет из любого города долететь до любого другого.

Вывод

5. Докажите, что последовательность $a_n = 2^n - 3$ содержит бесконечную подпоследовательность, любые два члена которой взаимно просты друг с другом.
6. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота AN . На прямых AB и AC отмечены точки Q и P соответственно так, что $QM \perp AC$ и $PM \perp AB$. Описанная окружность треугольника PMQ пересекает прямую BC вторично в точке X . Докажите, что $BN = CX$.
7. Дано семейство конечных множеств натуральных чисел, в каждом из которых хотя бы два элемента. Известно, что любые два множества данного семейства пересекаются не более чем по одному элементу, а при добавлении любого конечного множества из хотя бы двух натуральных чисел это свойство нарушится. Может ли оказаться, что все натуральные числа можно окрасить в два цвета так, чтобы в каждом множестве семейства присутствовали элементы обоих цветов?

Послевывод

8. Квадрат разбит на меньшие квадратики. При этом любая прямая пересекает не более 10 из них. Докажите, что количество квадратилов не превосходит 10^{20} .
9. Определите все натуральные n , удовлетворяющие следующему условию: для любого приведённого многочлена $P(x)$ степени не более n с целыми коэффициентами существует натуральное k , не превосходящее n , и $k + 1$ различных целых чисел x_1, \dots, x_{k+1} , таких что $P(x_1) + \dots + P(x_k) = P(x_{k+1})$.

Послевывод

8. Квадрат разбит на меньшие квадратики. При этом любая прямая пересекает не более 10 из них. Докажите, что количество квадратилов не превосходит 10^{20} .
9. Определите все натуральные n , удовлетворяющие следующему условию: для любого приведённого многочлена $P(x)$ степени не более n с целыми коэффициентами существует натуральное k , не превосходящее n , и $k + 1$ различных целых чисел x_1, \dots, x_{k+1} , таких что $P(x_1) + \dots + P(x_k) = P(x_{k+1})$.

Послевывод

8. Квадрат разбит на меньшие квадратики. При этом любая прямая пересекает не более 10 из них. Докажите, что количество квадратилов не превосходит 10^{20} .
9. Определите все натуральные n , удовлетворяющие следующему условию: для любого приведённого многочлена $P(x)$ степени не более n с целыми коэффициентами существует натуральное k , не превосходящее n , и $k + 1$ различных целых чисел x_1, \dots, x_{k+1} , таких что $P(x_1) + \dots + P(x_k) = P(x_{k+1})$.

Послевывод

8. Квадрат разбит на меньшие квадратики. При этом любая прямая пересекает не более 10 из них. Докажите, что количество квадратилов не превосходит 10^{20} .
9. Определите все натуральные n , удовлетворяющие следующему условию: для любого приведённого многочлена $P(x)$ степени не более n с целыми коэффициентами существует натуральное k , не превосходящее n , и $k + 1$ различных целых чисел x_1, \dots, x_{k+1} , таких что $P(x_1) + \dots + P(x_k) = P(x_{k+1})$.