

Кировское областное государственное автономное образовательное учреждение
дополнительного образования
«ЦЕНТР ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ ОДАРЕННЫХ ШКОЛЬНИКОВ»

Принято на заседании
Экспертного совета
Регионального центра
«14» мая 2024 г.

Принято на заседании
методического совета
КОГАОУ ДО ЦДООШ
«15» мая 2024 г.

УТВЕРЖДАЮ

директор ЦДООШ
Е. Н. Перминова
«15» мая 2024 г.

**ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ
ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА
«МАТЕМАТИКА В ЛЕТНЕЙ ШКОЛЕ»**

Направленность программы — естественно-научная
Срок реализации — 26 дней

СОСТАВИТЕЛИ:

И. С. Рубанов, к. ф.-м. н., доц.,
заслуженный учитель РФ
И. А. Семенова, к. ф.-м. н.,
педагог дополнительного образования
О. В. Старостина,
педагог дополнительного образования

РУКОВОДИТЕЛЬ ПРОГРАММЫ:
И. С. Рубанов

Киров
2024

I. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

1.1. Направленность

Направленность программы — естественно-научная.

1.2. Актуальность, новизна, педагогическая целесообразность

Данный курс предназначен для учащихся Кировской области, показавших хорошие результаты при выполнении вступительной работы в Кировскую летнюю многопредметную школу, а также показавших высокие результаты на олимпиадах, кружках по математике КОГАОУ ДО ЦДООШ. В рамках курса изучаются дополнительные главы курса математики, а также решаются вопросы подготовки школьников к олимпиадам.

1.3. Цели и задачи дополнительной общеобразовательной программы

Цель — развитие математического мышления учащихся, повышение логической культуры, расширение и углубление знаний и умений учащихся, проявляющих интерес к математике.

Задачи:

– образовательные: совершенствование и углубление полученных в основном курсе математики знаний и умений; обучение новым приемам и методам математических рассуждений и доказательств; формирование умений применять математические знания при решении различных задач и оценивать полученные результаты; знакомство с теоретическими основами современной математики; формирование представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов.

– воспитательные: воспитание средствами математики культуры личности, отношения к математике как к части общечеловеческой культуры; воспитание ответственности, целеустремленности, настойчивости, внимательности, дисциплинированности и других качеств личности;

– развивающие: развитие познавательного интереса и стремления к самообразованию, развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления; развитие самостоятельности и творческих способностей учащихся.

1.4. Отличительные особенности данной общеобразовательной программы от уже существующих образовательных программ

Программа предполагает дальнейшее совершенствование учащимся имеющихся знаний и сформированных умений по математике, а также изучение новых тем, которые выходят за рамки школьной программы по математике.

При отборе содержания занятий учитывается высокий интеллектуальный уровень школьников, а также индивидуальные особенности учащихся и области научных интересов педагогов.

В первый учебный день во всех группах проводится вступительная олимпиада, по результатам которой ученики зачисляются либо в обычную группу, либо в группу «профи». Обучение в группе «профи» рассчитано на более подготовленных школьников.

1.5. Формы и режим занятий

Формы организации занятий — беседа, дискуссия, решение и обсуждение задач, разборы задач, консультации, математические соревнования. Предполагается также выполнение домашних заданий по решению задач. Занятия проводятся в форме непосредственного общения с учащимися, широко используется проблемное обучение. На занятиях применяются индивидуальные, групповые и коллективные формы работы.

1.6. Правила и критерии отбора обучающихся

Правила и критерии отбора на программу публикуются на официальном сайте ЦДООШ <https://cdoosh.ru/lmsh/> не позднее чем за 75 дней до начала смены.

1.7. Ожидаемые результаты и способы определения их результативности

Результатами занятий являются повышение уровня знаний и умений учащихся, развитие мыслительных процессов.

Основным средством диагностики является проверка решений задач для самостоятельной работы, результаты заключительной олимпиады и зачета.

II. СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ

2.1. Учебно-тематический план

6 класс, обычная группа и группа «Профи»

	Тема	Количество часов
1	Вступительный тест	1
2	Вступительная олимпиада	3
3	Текстовые задачи и введение переменной	4
4	Делимость	8
5	Логика. Метод доказательства от противного	2
6	Принцип Дирихле	4
7	Игры	4
8	Комбинаторика	6
9	Взвешивания. Количество информации	4
10	Графы	4
11	Раскраска	2
12	Инварианты	2
13	Принцип крайнего	2
14	Задачи на разрезание	2
15	Разнобои	18
16	Заключительная олимпиада	4
17	Зачет	2
	Итого:	72

7 класс, обычная группа и группа «Профи»

	Тема	Количество часов
1	Вступительный тест	1
2	Вступительная олимпиада	3
3	Теория чисел	12
4	Геометрия	10
5	Дискретная непрерывность	2
6	Процессы и полуинварианты	2
7	Метод математической индукции	4
8	Комбинаторика	8
9	Графы	6
10	Разнобои	18
11	Заключительная олимпиада	4
12	Зачет	2
	Итого:	72

8 класс, обычная группа и группа «Профи»

	Тема	Количество часов
1	Вступительный тест	1
2	Вступительная олимпиада	3
3	Неравенства	8
4	Теория чисел	6
5	Рациональность, иррациональность	4
6	Множества. Мощность множеств	4
7	Векторы. Центр масс	4
8	Движение плоскости	8
9	Гомотетия	6
10	Графы	4
11	Разнобои	18
12	Заключительная олимпиада	4
13	Зачет	2
	Итого:	72

9 класс, обычная группа и группа «Профи»

	Тема	Количество часов
1	Вступительный тест	1
2	Вступительная олимпиада	3
3	Многочлены	10
4	Комплексные числа	8
5	Первообразные корни	4
6	Симедиана. Гармонический четырехугольник	6
7	Инверсия	6

	Тема	Количество часов
8	Выпуклая оболочка. Теорема Хелли	4
9	Графы	6
10	Разнобои	18
11	Заключительная олимпиада	4
12	Зачет	2
	Итого:	72

10 класс, обычная группа и группа «Профи»

	Тема	Количество часов
1	Вступительный тест	1
2	Вступительная олимпиада	3
3	Предел и непрерывность функции	4
4	Производная функции, неравенства	4
5	Выпуклые функции	4
6	Линейные пространства	6
7	Системы линейных уравнений	2
8	Цепные дроби. Уравнение Пелля	4
9	Лемма об уточнении показателя и ее применение	4
10	Квадратичные вычеты	4
11	Линейность в геометрии	2
12	Проективная геометрия	6
13	Поляры и полярные преобразования	4
14	Графы	4
15	Разнобои	14
16	Заключительная олимпиада	4
17	Зачет	2
	Итого:	72

2.2. Учебная программа

6 класс, обычная группа и группа «Профи»

1. *Вступительный тест.* Включает задачи теоретического характера с целью выявления у учащихся знаний и умений, необходимых для успешного освоения программы.

2. *Вступительная олимпиада.* Включает несколько разнообразных по тематике и трудности олимпиадных задач. По итогам олимпиады (с учётом «олимпийской биографии») выделяется группа «профи» с повышенным уровнем обучения.

3. *Текстовые задачи и введение переменной.* Решение текстовых задач без введения переменной: арифметический метод, обратный ход. Разные способы

введения переменной: их сравнение и выбор оптимального. Скрытая переменная. Разумный перебор при решении уравнений. Задачи на движение: выбор системы отсчёта, относительность движения, движение по кругу. Задачи на совместную работу, их связь с задачами на движение. Задачи на нехватки и избытки. Уравнение с избыточным числом переменных.

4. *Делимость*. Понятие делимости, основные свойства. Разложение на простые множители. Признаки делимости. Деление с остатком, его существование и единственность. Свойства деления с остатком. Критерий равноостаточности. Понятие перебора по остаткам и его применение к задачам, связанным с делимостью. НОК, НОД, способы их нахождения.

5. *Логика. Метод доказательства от противного*. Истинные и ложные высказывания. Отрицание высказываний. Логические союзы И и ИЛИ в составных утверждениях. Построение отрицаний к утверждениям, содержащим союзы И и ИЛИ. Построение отрицаний к высказываниям, содержащим кванторы. Сюжетные логические задачи. Перебор в логических задачах. Задачи о рыцарях, лжецах и хитрецах. Суть метода от противного, решение задач методом от противного.

6. *Принцип Дирихле*. Формулировка и доказательство принципа Дирихле. Обобщенный принцип Дирихле. Принцип Дирихле и делимость целых чисел. Принцип Дирихле в геометрии. Окраска плоскости и ее частей. Таблицы. Принцип Дирихле и дополнительные соображения. Доказательство оценки и идея построения примера с помощью разбиения фигуры на меньшие части в задачах на «оценку+пример».

7. *Игры*. Понятие математической игры. Поиск выигрышной стратегии. Игры-шутки. Симметрия. Идея «оставь себе ход». Передача хода. Анализ выигрышных и проигрышных позиций. Изоморфизм игр.

8. *Комбинаторика*. Задачи пересчетной комбинаторики. Правило суммы для пересекающихся и непересекающихся множеств. Использование кругов Эйлера и идеи дополнения. Правило произведения при выборе независимых элементов. Правило произведения при выборе элементов, зависящих от предыдущего выбора. Отработка правил произведения и суммы на конкретных комбинаторных задачах. Взаимно-однозначное соответствие. Применение взаимно однозначных соответствий в комбинаторных задачах. Кодирование одних задач другими задачами.

9. *Взвешивания. Количество информации*. Взвешивание на чашечных весах без гирь. Взвешивания на весах с гирями. Методы комбинаторного оценивания количества различных вариантов. Задачи на нахождение фальшивой монеты. Взвешивания и нахождение фальшивых монет двух разных типов. Методы оценки числа взвешиваний.

10. *Графы*. Понятие графа, степени вершины графа. Подсчет числа ребер, лемма о рукопожатиях. Простейшие свойства двудольных графов. Лемма о

хороводах, применение леммы о хороводах в задачах. Определение эйлера графа. Критерий эйлеровости графа.

11. *Раскраска*. Шахматная раскраска. Другие двухцветные раскраски. Раскраски в несколько цветов, диагональные раскраски. Неклетчатые объекты раскраски. Идеи подсчета двумя способами и принципа Дирихле при нахождении необходимой раскраски. Раскраска как инвариант. Применение идеи четности в задачах на раскраски. Доказательство оценок с помощью раскрасок. Применение двух и более раскрасок для решения сложных задач.

12. *Инварианты*. Определение инварианта, простейшие примеры. Инвариант в различных задачах. Остатки и делимость как инвариант. Четность как самый часто встречающийся инвариант. Раскраска как инвариант. Чередувание. Поиск инварианта. Выделение объектов, для которых применим инвариант, инвариантные зоны. Инвариант как инструмент для вычисления результата процесса.

13. *Принцип крайнего*. Идея начинать «с края». Типичные края в клетчатых задачах: угловые клетки, клетки на краю доски. Типичные края в геометрических конструкциях: вершины многоугольников, границы, верхние и нижние точки и отрезки. Типичные края в числовых примерах: наибольшие и наименьшие значения. Использование рассуждения о крайних элементах для доказательства невозможности конструкции.

14. *Задачи на разрезание*. Равновеликость. Методы подсчёта площади фигуры на клетчатой плоскости. Задачи на разрезание на две или более равновеликие фигуры. Периметр. Методы сравнения периметров фигур на клетчатой плоскости; пропедевтика понятия «несоизмеримость». Разрезание на две равные фигуры: использование поворота, симметрии, переноса для решения указанного типа задач. Пропедевтика понятия «движение».

15. *Разнобои*. Задачи различных математических олимпиад, соревнований, турниров. В разнобое могут быть как задачи на приложение пройденных идей, на повторение, так и задачи на пропедевтику того, что будет. Разнобои могут быть проведены в форме математических соревнований или игр таких, как матбой, перестрелка, карусель и др.

16. *Заключительная олимпиада*. Включает несколько разнообразных по тематике и трудности олимпиадных задач. Среди задач олимпиады могут быть предложены одна или несколько задач на изученную тему в ЛМШ.

17. *Зачет*. Необходим для повторения и полной систематизации полученных знаний, умений и навыков. На зачете учащиеся должны не только воспроизвести изученный материал, но и творчески воспользоваться изученными методами.

7 класс, обычная группа и группа «Профи»

1. *Вступительный тест.* Включает задачи теоретического характера с целью выявления у учащихся знаний и умений, необходимых для успешного освоения программы обучения.

2. *Вступительная олимпиада.* Включает несколько разнообразных по тематике и трудности олимпиадных задач. По итогам олимпиады (с учётом «олимпийской биографии») выделяется группа «профи» с повышенным уровнем обучения.

3. *Теория чисел.* НОД, НОК. Алгоритм Евклида. Линейное представление НОД. Основная теорема арифметики. Отношение сравнимости целых чисел по данному модулю. Основные свойства сравнений. Классы вычетов. Полная и приведенная системы вычетов по данному модулю. Малая теорема Ферма. Теорема Вильсона. Линейные сравнения первой степени. Линейные диофантовы уравнения. Системы линейных сравнений. Китайская теорема об остатках.

4. *Геометрия.* Счет углов в треугольниках, равенства треугольников. Дополнительные построения для счета углов треугольников: параллельные переносы, отражения, повороты (без формализации этих преобразований). Использование уравнений для счета углов. Геометрические места точек (ГМТ). Задачи о серединных перпендикулярах, о биссектрисах и внешних биссектрисах как ГМТ. ГМТ, из которых заданный отрезок виден под прямым углом; медиана прямоугольного треугольника. Задачи на построение. Общая схема решений задач на построение. Построение треугольников по различным элементам. Построение треугольников по различным точкам. Построения методом ГМТ. Площадь, свойства, вычисление площади различных многоугольников. Метод перекидывания площадей при помощи параллельной прямой. Вычисление площади треугольника двумя способами как метод решения задач. Использование площадей в комбинаторно-геометрических задачах.

5. *Дискретная непрерывность.* Дискретная непрерывность в задачах, в которых объекты расположены в ряд или по кругу. Дискретная непрерывность на плоскости. Задачи на дискретную непрерывность с ограниченным изменением.

6. *Процессы и полуинварианты.* Бесконечные и конечные процессы. Понятие полуинварианта, отличие от инварианта. Полуинварианты в теории чисел, полуинварианты в графах, полуинварианты в геометрии. Доказательство конечности процессов при помощи полуинвариантов.

7. *Метод математической индукции.* Постепенное конструирование как введение в метод математической индукции. Понятие утверждения, базы, предположения и перехода. Решение комбинаторных задач методом математической индукции. Алгебраические задачи, решаемые по индукции. Индукция в графах. Более сложные схемы математической индукции: индукция

со ссылкой на несколько предыдущих элементов, индукция со ссылкой на все предыдущие элементы, возвратная схема математической индукции.

8. *Комбинаторика*. Размещения. Перестановки. Сочетания. Перестановки с повторениями. Сочетания с повторениями. Маршруты. Треугольник Паскаля. Бином Ньютона. Свойства сочетаний. Доказательство тождеств. Комбинаторные доказательства в теории чисел: доказательство малой теоремы Ферма через подсчет количества раскрасок ожерелья в n цветов; доказательство теоремы Вильсона через подсчет числа ломаных, проходящих через вершины p -угольника. Комбинаторные доказательства свойств делимости биномиальных коэффициентов.

9. *Графы*. Деревья, свойства. Эквивалентность различных определений дерева. Остовное дерево, применение остовных деревьев в задачах на связность. Двудольный граф. Связь двудольности с раскрасками. Двудольность дерева. Таблица как двудольный граф. Принцип крайнего в графах: рассмотрение вершины наименьшей/наибольшей степени в графе, рассмотрение самого длинного простого пути в графе и т.п.

10. *Разнобои*. Задачи различных математических олимпиад, соревнований, турниров. В разнобое могут быть как задачи на приложение пройденных идей, на повторение, так и задачи на пропедевтику того, что будет. Разнобои могут быть проведены в форме математических соревнований или игр таких, как матбой, перестрелка, карусель и др.

11. *Заключительная олимпиада*. Включает несколько разнообразных по тематике и трудности олимпиадных задач. Среди задач олимпиады могут быть предложены одна или несколько задач на изученную тему в ЛМШ.

12. *Зачет*. Необходим для повторения и полной систематизации полученных знаний, умений и навыков. На зачете учащиеся должны не только воспроизвести изученный материал, но и творчески воспользоваться изученными методами.

8 класс, обычная группа и группа «Профи»

1. *Вступительный тест*. Включает задачи теоретического характера с целью выявления у учащихся знаний и умений, необходимых для успешного освоения программы обучения.

2. *Вступительная олимпиада*. Включает несколько разнообразных по тематике и трудности олимпиадных задач. По итогам олимпиады (с учётом «олимпийской биографии») выделяется группа «профи» с повышенным уровнем обучения.

3. *Неравенства*. Числовые неравенства. Равносильные алгебраические преобразования неравенств. Метод выделения полного квадрата. Метод последовательных оценок. Неравенства между классическими средними. Транснеравенства. Неравенство Чебышева. Неравенство Коши-Буняковского-

Шварца. Метод Штурма. Метод Штурма в комбинаторных задачах оптимизации. Неравенства в теории чисел.

4. *Теория чисел.* Мультипликативные функции в теории чисел. Мультипликативность функции Эйлера. Явная формула для вычисления функции Эйлера. Теорема Эйлера. Усиление теоремы Эйлера. Применение теоремы Эйлера к решению задач. Числа Кармайкла. Определение показателя для числа, взаимно простого с модулем. Существование показателя. Основные свойства показателей. Применение теории показателей для доказательства частных случаев теоремы Дирихле.

5. *Рациональность, иррациональность.* Понятие иррационального числа. Доказательство иррациональности радикалов. Задачи на преобразование алгебраических выражений, связанных с доказательством рациональности. Иррациональность непериодических дробей, рациональность периодических дробей. Длина периода десятичной дроби, ее связь с показателем по модулю десять. Критерий существования предпериода, длина предпериода, связь с показателями. Оценки периода суммы и произведения двух дробей.

6. *Множества. Мощность множеств.* Основные операции над множествами, их свойства. Декартово произведение множеств. Отображения множеств. Равномощные множества. Понятие мощности. Неравномощность множества натуральных чисел и отрезка числовой прямой. Равномощность всех промежутков на числовой прямой. Счетные множества, примеры, основные свойства. Теоремы об объединении и прямом произведении счетных множеств. Введение отношения порядка для мощностей. Теорема Кантора-Бернштейна, ее применение для определения мощности промежуточного множества. Мощность булеана.

7. *Векторы. Центр масс.* Векторы, операции над векторами. Центр масс. Правило рычага. Существование и единственность центра масс системы материальных точек. Правило группировки. Отрицательные массы. Центр масс и его применение при решении геометрических задач. Вывод теорем Чебы, Менелая, Ван Обеля помощью центра масс.

8. *Движение плоскости.* Движение, свойства движений. Частные виды движений плоскости: центральная симметрия, осевая симметрия, параллельный перенос, поворот. Композиция движений. Теорема о задании движения по трем неколлинеарным точкам. Представление движения с помощью композиции осевых симметрий. Теорема Шаля. Классификация движений.

9. *Гомотетия.* Свойства гомотетии. Применение гомотетии в задачах на доказательство и построение. Композиция гомотетий. Теорема о трех колпаках. Определение поворотной гомотетии, свойства. Нахождение центра поворотной гомотетии, переводящей один отрезок в другой. Точка Микеля. Применение поворотной гомотетии для решения задач.

10. *Графы*. Планарные графы, плоские графы. Формула Эйлера для плоского графа. Неравенства на количества вершин, ребер и граней. Примеры непланарных графов. Гамильтоновы пути и циклы. Определение, простейшие свойства гамильтоновых графов. Теоремы Оре и Дирака. Замыкание графа, доказательство теоремы Хватала.

11. *Разнобой*. Задачи различных математических олимпиад, соревнований, турниров. В разнобой могут быть как задачи на приложение пройденных идей, на повторение, так и задачи на пропедевтику того, что будет. Разнобой могут быть проведены в форме математических соревнований или игр таких, как матбой, перестрелка, карусель и др.

12. *Заключительная олимпиада*. Включает несколько разнообразных по тематике и трудности олимпиадных задач. Среди задач олимпиады могут быть предложены одна или несколько задач на изученную тему в ЛМШ.

13. *Зачет*. Необходим для повторения и полной систематизации полученных знаний, умений и навыков. На зачете учащиеся должны не только воспроизвести изученный материал, но и творчески воспользоваться изученными методами.

9 класс, обычная группа и группа «Профи»

1. *Вступительный тест*. Включает задачи теоретического характера с целью выявления у учащихся знаний и умений, необходимых для успешного освоения программы обучения.

2. *Вступительная олимпиада*. Включает несколько разнообразных по тематике и трудности олимпиадных задач. По итогам олимпиады (с учётом «олимпийской биографии») выделяется группа «профи» с повышенным уровнем обучения.

3. *Многочлены*. Кольцо многочленов. Деление с остатком и алгоритм Евклида. Теорема Безу, следствия теоремы Безу. Схема Горнера. Сумма коэффициентов и свободный член как значение многочлена. Задачи на свойства коэффициентов многочлена. Многочлены с рациональными и целыми коэффициентами, их рациональные корни. Задача интерполяции. Интерполяционный многочлен Ньютона. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Единственность интерполяционного многочлена. Применение интерполяционных многочленов в решениях задач. Многочлены с коэффициентами из кольца вычетов по простому модулю. Формальное и функциональное равенство многочленов с коэффициентами из кольца вычетов по простому модулю. Достаточные условия для формального равенства многочленов с коэффициентами из кольца вычетов по простому модулю. Теорема Вильсона как следствие теорем Виета и малой теоремы Ферма. Неприводимые над \mathbb{Q} многочлены. Лемма Гаусса. Признак Эйзенштейна. Неприводимые многочлены над \mathbb{C} и \mathbb{R} . Разложение многочленов на неприводимые множители над этими полями. Основная теорема алгебры, ее

следствия. Симметрические многочлены, выражение через элементарные симметрические многочлены. Теорема Виета.

4. *Комплексные числа.* Построение поля комплексных чисел как множества пар действительных чисел с определенными на нем операциями. Алгебраическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в алгебраической форме. Операция сопряжения. Геометрическое изображение комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме, их геометрическая интерпретация. Формула Муавра. Корни из комплексных чисел. Корни из единицы, их свойства. Применение формулы Муавра к вычислению тригонометрических сумм. Применение комплексных чисел в геометрии. Критерий параллельности, перпендикулярности отрезков в комплексных координатах, критерий коллинеарности трех точек. Уравнение прямой, уравнение окружности. Уравнение хорды единичной окружности, уравнение касательной к единичной окружности, координата точки пересечения двух касательных к единичной окружности и т.п. Двойное отношение, критерий принадлежности четырех точек одной окружности или одной прямой.

5. *Первообразные корни.* Количество вычетов, взаимно простых с данным модулем. Определение первообразного корня по произвольному модулю. Примеры модулей, по которым не существует первообразных корней. Доказательство существования первообразного корня по простому модулю. Количество первообразных корней по простому модулю. Полное описание модулей, по которым существует первообразный корень. Несуществование первообразных корней по всем остальным модулям. Применение первообразных корней в решении задач.

6. *Симедиана. Гармонический четырехугольник.* Определение симедианы, симедиана как ГМТ. Отношение отрезков, на которые симедиана делит сторону треугольника. Связь между симедианами и касательными. Использование симедиан в решении геометрических задач. Гармоническая четвёрка точек. Окружность Аполлония. Различные определения гармонического четырехугольника и доказательство их эквивалентности. Конструкции, в которых возникают гармонические четырехугольники. Задачи, решаемые при помощи свойств гармонических четырехугольников.

7. *Инверсия.* Основные свойства инверсии, образы прямых и окружностей при инверсии. Применение основных свойств к решению задач, лемма Архимеда. Сохранение углов между прямыми и окружностями при инверсии, применение к решению задач. Свойства ортогональных окружностей. Совпадение центра инверсии и гомотетии для двух окружностей, задача об арбелосе. Формула изменения расстояния между точками при инверсии, неравенство Птолемея и

теорема Птолемея. Цепочки касающихся окружностей, теорема Понселе. Применение инверсии в задачах на построение циркулем и линейкой.

8. *Выпуклая оболочка. Теорема Хелли.* Выпуклая оболочка системы точек. Алгоритмы построения выпуклой оболочки. Пересечение выпуклых оболочек. Существование выпуклого четырехугольника на множестве из пяти точек. Критерий принадлежности всех точек данного конечного множества точек выпуклой оболочке. Экстремальные и оценочные задачи на использование выпуклой оболочки. Теорема Хелли для прямой. Теорема Хелли для прямоугольников с попарно параллельными сторонами. Теорема Хелли для плоскости: достаточность наличия общей точки для трёх множеств. Контрпримеры в невыпуклых ситуациях. Применение теоремы Хелли.

9. *Графы.* Паросочетания. Условие разнообразия как необходимое условие наличия паросочетания в двудольном графе. Лемма Холла, следствия леммы Холла. Применение леммы Холла. Определение ориентированного графа. Входящие и исходящие степени. Ориентированный путь, ориентированный цикл. Эйлеровы пути и циклы в ориентированных графах. Сильная и слабая связность ориентированных графов, разбиение на компоненты сильной связности. Свойства турнирных графов и сильно связанных турнирных графов: существование гамильтонова пути в турнире, существование гамильтонова цикла в сильно связанном турнире. Числа Рамсея. Определение числа Рамсея для раскраски полного графа в два цвета, основные свойства. Существование чисел Рамсея. Многоцветные числа Рамсея. Применение теоремы Рамсея к комбинаторным задачам, теорема Шура.

10. *Разнобои.* Задачи различных математических олимпиад, соревнований, турниров. В разнобое могут быть как задачи на приложение пройденных идей, на повторение, так и задачи на пропедевтику того, что будет. Разнобои могут быть проведены в форме математических соревнований или игр таких, как матбой, перестрелка, карусель и др.

11. *Заключительная олимпиада.* Включает несколько разнообразных по тематике и трудности олимпиадных задач. Среди задач олимпиады могут быть предложены одна или несколько задач на изученную тему в ЛМШ.

12. *Зачет.* Необходим для повторения и полной систематизации полученных знаний, умений и навыков. На зачете учащиеся должны не только воспроизвести изученный материал, но и творчески воспользоваться изученными методами.

10 класс, обычная группа и группа «Профи»

1. *Вступительный тест.* Включает задачи теоретического характера с целью выявления у учащихся знаний и умений, необходимых для успешного освоения программы обучения.

2. *Вступительная олимпиада.* Включает несколько разнообразных по тематике и трудности олимпиадных задач. По итогам олимпиады (с учётом

«олимпийской биографии») выделяется группа «профи» с повышенным уровнем обучения.

3. *Предел и непрерывность функции.* Предел функции в точке: два определения. Непрерывность функции в точке. Непрерывность функции на множестве. Первая и вторая теоремы Вейерштрасса. Теорема о промежуточном значении. Применение теоремы о промежуточном значении в геометрии. Непрерывность некоторых функций: площадь части фигуры, лежащей в данной полуплоскости относительно прямой (при параллельном перемещении прямой и при вращении прямой); проекция фигуры на вращающуюся прямую. Теоремы о блинах. Функциональные уравнения, решаемые в непрерывных функциях.

4. *Производная функции, неравенства.* Производная функции в точке. Производная функции на множестве. Теорема Ферма. Теоремы Ролля и Лагранжа. Исследование функции на монотонность с помощью производной. Применение производной к доказательству неравенств. Метод подпора касательной для доказательства неравенств. Методы математического анализа в исследовании многочленов. Существование корня у многочлена нечетной степени, применение к решению задач. Производная многочлена и кратные корни. Применение соображений асимптотики в комбинаторных и алгебраических задачах.

5. *Выпуклые функции.* Определение выпуклых и вогнутых функций. Достаточные условия выпуклости функции. Неравенство Йенсена. Применение неравенства Йенсена для доказательств неравенств о средних степенных, Коши-Буняковского-Шварца, Гёльдера и др. Обобщенное транснеравенство.

6. *Линейные пространства.* Определение, примеры и контрпримеры. Линейная зависимость и независимость систем векторов. Базис, различные определения и их эквивалентность. Размерность пространства, корректность определения размерности. Изоморфизм пространств. Описание конечномерных пространств с точностью до изоморфизма. Применение методов линейной алгебры в комбинаторике. Линейные пространства над полем из двух элементов, базис, размерность. Скалярное произведение в пространствах над конечными полями. Пространство решений линейной рекуррентности, его базис. Замкнутость множества решений линейного рекуррентного соотношения относительно операций сложения и умножения на константу. Характеристическое уравнение линейной рекуррентности. Описание всех решений в случае отсутствия кратных корней у характеристического многочлена и в случае наличия кратных корней у характеристического многочлена. Применение линейных рекуррент для решения комбинаторных задач.

7. *Системы линейных уравнений.* Совместные, несовместные системы; определённые и неопределённые системы. Эквивалентные системы, элементарные преобразования трех типов. Свободные и главные переменные. Независимость количества свободных переменных от способа приведения к

ступенчатому виду. Альтернатива Фредгольма. Системы уравнений над полем из двух элементов, применение к решению комбинаторных задач.

8. *Цепные дроби. Уравнение Пелля.* Цепные дроби. Цепные дроби рациональных чисел, их связь с алгоритмом Евклида. Подходящие дроби, их свойства. Рекуррентное соотношение для подходящих дробей. Оценка точности приближения подходящими дробями. Доказательство сходимости цепных дробей. Подходящие дроби, как наилучшие приближения иррациональных чисел. Множество решений уравнения Пелля. Доказательство того, что если $(x_0; y_0)$ решение уравнения $x^2 - dy^2 = 1$, то $\frac{x_0}{y_0}$ — подходящая дробь числа \sqrt{d} . Алгоритм

поиска всех решений. Доказательство существования нетривиального решения Пелля. Применение уравнения Пелля в теоретико-числовых задачах.

9. *Лемма об уточнении показателя и ее применение.* Формулировка леммы об уточнении показателя. Доказательство равенства в лемме через разложение по биному Ньютона для случая нечетного простого числа. Формулировка леммы об уточнении показателя для модуля 2. Применения леммы об уточнении показателя. Применение леммы к доказательству существования первообразных корней по модулям, равным степени простого числа. Лемма об уточнении показателя и диофантовы уравнения.

10. *Квадратичные вычеты.* Определение квадратичных вычетов, квадратичных невычетов. Количество квадратичных вычетов и квадратичных невычетов по простому модулю. Свойства произведений двух квадратичных вычетов. Символ Лежандра, мультипликативность символа Лежандра. Критерий Эйлера. Критерий Гаусса. Теорема Жирара. Квадратичный закон взаимности Гаусса. Доказательство квадратичного закона. Применение квадратичного закона взаимности Гаусса к решению задач, задача о делителях чисел Ферма. Символ Якоби и его свойства. Квадратичный закон взаимности для символа Якоби.

11. *Линейность в геометрии.* Линейные функции на плоскости, их свойства. Линейность ориентированного расстояния от точки до прямой и ориентированной площади. Доказательство коллинеарности точек при помощи соображений линейности: прямая Гаусса, прямая Ньютона, основания внешних биссектрис треугольника. Метод линейного варьирования при решении комбинаторно-геометрических задач.

12. *Проективная геометрия.* Бесконечно удаленные точки и бесконечно удаленные прямые. Две модели проективной плоскости: расширенная евклидова плоскость и связка прямых и плоскостей, их изоморфизм. Проективные преобразования. Задание проективных преобразований образами четырех точек общего положения. Сохранение двойных отношений при проективных преобразованиях. Сохранение отношений трех точек на прямой, параллельной прямой, переходящей в бесконечно удаленную прямую. Существование

проективного преобразования, переводящего точку внутри окружности в ее центр, и сохраняющего окружность. Существование проективного преобразования, переводящего прямую вне окружности в бесконечно удаленную прямую, и сохраняющего окружность. Проективные доказательства теоремы Паскаля, теоремы Бриансона, теорема о бабочке. Классические теоремы проективной геометрии. Теорема Дезарга. Теорема Паппа и двойственная теорема Паппа. Использование теорем Дезарга и Паппа в решении задач. Применение проективных преобразований в задачах на доказательство и в задачах на построение.

13. *Поляры и полярные преобразования.* Полнос прямой относительно окружности и поляра точки относительно прямой. Основное свойство поляры. Полярное свойство секущих, полярное свойство касательных. Полярное преобразование относительно окружности. Доказательство коллинеарности точек и конкурентности прямых при помощи полярных преобразований. Свойства описанных четырехугольников. Полярная двойственность, ее использование в геометрических и комбинаторно-геометрических задачах.

14. *Графы.* Раскраски графов. Определение правильной вершинной раскраски, правильной реберной раскраски. Вершинное хроматическое число графа и реберное хроматическое число графа. Оценки для хроматического числа через число независимости и размер наибольшей клики. Удаление вершины из графа для оценки хроматического числа. Хроматическое число планарного графа. Теорема Брукса, обобщения и усиления теоремы Брукса. Потоки в сетях. Определение сети, пропускной способности, потока через ребро. Исток и сток. Поток через разрез. Остаточная сеть, дополняющий путь. Теорема Форда-Фалкерсона для целочисленных и нецелочисленных сетей. Применение в задачах: теорема Холла, теорема Кёнига, задача о назначениях. Вершинная и реберная теоремы Менгера.

15. *Разнобои.* Задачи различных математических олимпиад, соревнований, турниров. В разнобое могут быть как задачи на приложение пройденных идей, на повторение, так и задачи на пропедевтику того, что будет. Разнобои могут быть проведены в форме математических соревнований или игр таких, как матбой, перестрелка, карусель и др.

16. *Заключительная олимпиада.* Включает несколько разнообразных по тематике и трудности олимпиадных задач. Среди задач олимпиады могут быть предложены одна или несколько задач на изученную тему в ЛМШ.

17. *Зачет.* Необходим для повторения и полной систематизации полученных знаний, умений и навыков. На зачете учащиеся должны не только воспроизвести изученный материал, но и творчески воспользоваться изученными методами.

III. ФОРМЫ АТТЕСТАЦИИ И ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Вид аттестации	Формы контроля	Виды оценочных материалов
Входящая	Вступительный тест, вступительная олимпиада	Решение задач вступительной олимпиады
Текущая	Участие в решении задач	Решение задач
Итоговая	Заключительная олимпиада, итоговый зачет	Решение задач заключительной олимпиады, сдача зачета

IV. ОРГАНИЗАЦИОННО–ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ

4.1. Учебно-методическое и информационное обеспечение программы

1. Акопян А. В. Геометрические свойства кривых второго порядка / А. В. Акопян, А. А. Заславский. — М.: МЦНМО, 2011. — 152 с.
2. Александров П. С. Введение в теорию групп. — М.: Бюро Квантум, 2008. — 160 с. (Библиотечка «Квант», Вып. 108)
3. Алфутова Н. Б. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ / Н. Б. Алфутова, А. В. Устинов. — М.: МЦМНО, 2005. — 320 с.
4. Балк М. Б. Геометрические приложения понятия о центре тяжести / М. Б. Балк. — М.: Физматгиз, 1959. — 230 с. — Б-ка математического кружка; вып. 9.
5. Бибиков П. В. Неравенства в задачах / П. В. Бибиков. — М.: МЦНМО, 2020. — 104 с.
6. Бибиков П. В. Теория чисел во Второй школе / П. В. Бибиков, К. В. Козаренко, А. И. Малахов. — М.: МЦНМО, 2021. — 224 с.
7. Блинков А. Д. Геометрические задачи на построение. / А. Д. Блинков, Ю. А. Блинков. — М.: МЦНМО, 2010. — 152 с.
8. Блинков А. Д. Геометрия в негеометрических задачах. / А. Д. Блинков. — М.: МЦНМО, 2016. — 160 с.
9. Блинков А. Д. Классические средние в арифметике и геометрии. / А. Д. Блинков. — М.: МЦНМО, 2012. — 168 с.
10. Блинков А. Д. Непрерывность. / А. Д. Блинков, В. М. Гуровиц. — М.: МЦНМО, 2015. — 160 с.
11. Блинков А. Д. Последовательности. / А. Д. Блинков. — М.: МЦНМО, 2018. — 160 с.
12. Васильев Н. Б. Заочные математические олимпиады / Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер и др. — М.: МЦНМО, 2012. — 192 с. (Библиотечка «Квант», Вып. 121)
13. Васильев Н. Б. Прямые и кривые / Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер. — М.: МЦМНО, 2006. — 128 с.

14. Виленкин Н. Я. Комбинаторика / Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин. — М.: ФИМА, МЦМНО, 2006. — 400 с.
15. Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах / Н. Я. Виленкин. — М.: МЦМНО, 2005. — 152 с.
16. Волчкевич М. А. Уроки геометрии в задачах. 7–8 классы. — М.: МЦМНО, 2016. — 200 с.
17. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2006: Окружной и финальный этап / Н. Х. Агаханов и др. Под ред. Н. Х. Агаханова. — М.: МЦМНО, 2007. — 472 с.
18. Генкин С. А. Ленинградские математические кружки / С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин. — Киров: издательство «АСА» 1994. — 272 с.
19. Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике / Н. В. Горбачев. — М.: МЦМНО, 2010. — 560 с.
20. Гордин Р. К. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы / Р. К. Гордин. — М.: МЦМНО, 2008. — 416 с.
21. Журнал «Квант», выпуски с 1970 по 2024 г.
22. Журнал «Квантик», выпуски с 2012 по 2024 г.
23. Заславский А. А. Геометрические преобразования. / А. А. Заславский. — М.: МЦМНО, 2003. — 84 с.
24. Заславский А. А. Задачи о турнирах. / А. А. Заславский, Б. Р. Френкин, А. В. Шаповалов. — М.: МЦМНО, 2013. — 104 с.
25. Карпов Д. В. Теория графов. / Д. В. Карпов. — М.: МЦМНО, 2022. — 555 с.
26. Кноп К. А. Азы теории чисел. / К. А. Кноп. — М.: МЦМНО, 2017. — 80 с.
27. Кноп К. А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам. / К. А. Кноп. — М.: МЦМНО, 2011. — 104 с.
28. Кохась К. П. Санкт-Петербургские математические олимпиады. 1992–2008/ К. П. Кохась, Д. В. Фомин. — М.: МЦМНО, 2023. — 672 с.
29. Математика в задачах. Сборник выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду / Под ред. А. А. Заславского, Д. А. Пермякова и др. — М.: МЦМНО, 2009. — 488 с.
30. Материалы Летних многопредметных школ: <https://cdoosh.ru/lmsh/lmsh-archives/>.
31. Материалы Московской математической олимпиады: <http://olympiads.mcsme.ru/mmo/>.
32. Материалы Московской устной математической олимпиады: <https://olympiads.mcsme.ru/ustn/>.
33. Материалы олимпиады им. Леонарда Эйлера: www.matol.ru.
34. Материалы Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике: www.pdmi.ras.ru/~olymp.
35. Материалы Турнира городов и летних конференций: <http://www.turgor.ru>.
36. Медников Л. Э. Турнир городов: мир математики в задачах. / Л. Э. Медников, А. В. Шаповалов. — М.: МЦМНО, 2012. — 480 с.

37. Понарин Я. П. Аффинная и проективная геометрия / Я. П. Понарин. — М.: МЦНМО, 2009. — 288 с.
38. Понарин Я. П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах / Я. П. Понарин. — М.: МЦНМО, 2004. — 160 с.
39. Понарин Я. П. Элементарная геометрия: В 3 т. Том 3. Треугольники и тетраэдры / Я. П. Понарин. — М.: МЦНМО, 2009. — 192 с.
40. Понарин Я. П. Элементарная геометрия: В 2 т. Том 1. Планиметрия, преобразования плоскости / Я. П. Понарин. — М.: МЦНМО, 2004. — 312 с.
41. Прасолов В. В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу: Учебное пособие. — М.: МЦМНО, 2007. — 608 с.
42. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии / В. В. Прасолов. — М.: МЦМНО, 2007. — 640 с.
43. Раскина И. В. Комбинаторика. / И. В. Раскина, А. В. Шаповалов. — М.: МЦМНО, 2020. — 132 с.
44. Раскина И. В. Комбинаторика: заседание продолжается. / И. В. Раскина, А. В. Шаповалов. — М.: МЦНМО, 2023. — 256 с.
45. Рубанов И. С. Математические олимпиады для восьмиклассников им. Леонарда Эйлера. 2008-2023. Задачи и решения. — Киров, 2023. — 268 с.
46. Рукшин С. Е. Математические соревнования в Ленинграде — Санкт-Петербурге. Первые пятьдесят лет. — Ростов н/Д: издательский центр «МарТ», 2000. — 320 с.
47. Сайт Московского центра непрерывного математического образования: <https://www.mcsme.ru>.
48. Соминский И. С. О математической индукции. / И. С. Соминский, Л. И. Головина, И. М. Яглом. — М.: Наука, 1967. — 144 с.
49. Толпыго А. К. Задачи Международного математического Турнира городов. / А. К. Толпыго — М.: МЦНМО, 2023. — 427 с.
50. Уфнаровский В. А. Математический аквариум / В. А. Уфнаровский. — Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000. — 216 с.
51. Шаповалов А. В. Индукция без формальностей. / А. В. Шаповалов — М.: МЦМНО, 2021. — 144 с.
52. Шаповалов А. В. Как построить пример? / А. В. Шаповалов. — М.: МЦНМО, 2013. — 80 с.
53. Шаповалов А. В. Принцип узких мест / А. В. Шаповалов. — М.: МЦНМО, 2008. — 32 с.
54. Шарыгин И. Ф. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами / И. Ф. Шарыгин, Р. К. Гордин. — М.: ООО «Издательство Астрель», 2001. — 400 с.
55. Элементы математики в задачах. Через олимпиады и кружки — к профессии / Под ред. А. А. Заславского и др. — М.: МЦНМО, 2018. — 592 с.
56. Яглом И. М. Выпуклые фигуры / И. М. Яглом, В. Г. Болтянский — М.: Гостехиздат, 1955. — 282 с. (Б-ка математического кружка; Вып. 4).
57. Яглом И. М. Геометрические преобразования, I. Движения и преобразования подобия / И. М. Яглом — М.: Гостехиздат, 1955. — 282 с. (Б-ка математического кружка; Вып. 7).

4.2. Материально-технические условия реализации программы

Перечень необходимого оборудования и материалов для реализации программы:

Общее обеспечение: доска, мел, раздаточный материал с содержанием лекционного материала, заданиями и условиями задач.

Канцелярские товары: ручки, тетради, принтер, картридж.